UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00183005 8

Schol. Gustrow.
1852.

Supplemente

zu

Georg Simon Klügel's

Wörterbuche

der

reinen Mathematik.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Zweite Abtheilung

E bis Z.

Mit vier Kupfertafeln.

Leipzig, 1836.

Bei E. B. Schwickert.

QA
5
K562
1833
Bd.2

E.

Ebene. Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes von Steiner in Crelles Journal. B. I. S. 349. Wegen der analytischen Behandlung der Ebene s. m. den Artikel Linie, gerade.

Ecke. Wenn mehrere, wenigstens drei, Ebenen in einem Punkte zusammenstoßen, so sagt man, daß sie in demselben eine Ecke bilden. Man sieht also, daß dieser Begriff der Stereometrie angehört, und daß die in der Geometrie der Ebene vorkommenden Benennungen: Dreieck, Viereck, Fünfeck, Vieleck streng genommen falsch sind, indem es eigentlich Dreiseit, Vierseit, Fünfseit, Vielseit heißen müßte. Jeder bloß von Ebenen umschlossene Körper hat eine gewisse Anzahl Ecken, weshalb Körper dieser Art auch gewöhnlich eckige Körper genannt werden. Eine merkwürdige Relation zwischen der Anzahl der Ecken, Seitenflächen und Kanten eines eckigen Körpers giebt der Euler'sche Satz an, worüber der Art. Vieleckiger Körper (1.) nachzusehen ist.

Eckige Körper, s. Ecke.

Einhüllende Curven und Flächen (enveloppes). 1. Sey $V = \varphi(x, y, a) = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve von einfacher Krümmung und a eine Größe, die zwar in Bezug auf x und y in derselben Curve als constant betrachtet wird, welcher man aber doch jeden beliebigen Werth beilegen kann, wodurch man, wenn man diese Größe sich stetig verändern läßt, eine stetige Folge zwar unter einander verschiedener, aber doch einander ähnlicher oder einem gemeinschaftlichen durch die obige Gleichung ausgedrückten Gesetze unterworfener Curven erhalten wird, deren auf einander folgende Durchschnittspunkte offenbar eine gewisse Curve bilden werden, welche alle diese Curven berührt und daher die einhüllende Curve (enveloppe), auch wohl die Gränzcurve derselben genannt wird. Zu den Gleichungen dieser einhüllenden oder Umhüllungscurven gelangt man auf folgende Art.

Ist nämlich die obige Gleichung

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

die Gleichung einer beliebigen der gegebenen Curven, so geht man zu der Gleichung der nächstfolgenden Curve über, wenn man a sich um das unendlich kleine ∂a verändern läßt, so daß also die Gleichung der nächstfolgenden Curve

$$\varphi(x, y, a + \partial a) = 0$$

ist. Nach Principien der Differentialrechnung ist aber

$$\varphi(x, y, a + \partial a) = V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a ,$$

und folglich

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0$$

die Gleichung der nächstfolgenden Curve. Für den Durchschnittspunkt, oder, da es in gewissen Fällen offenbar mehrere geben kann, für die Durchschnittspunkte der beiden stetig auf einander folgenden Curven müssen x, y den beiden Gleichungen

$$V = 0, \; V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0 ,$$

oder

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0$$

oder

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

genügen, und man wird also eine allgemeine Relation zwischen den beiden Coordinaten x, y dieser Durchschnittspunkte, d. i. die gesuchte Gleichung der sämmtliche in der Gleichung

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

enthaltene Curven einhüllenden Curven erhalten, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \; \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

den sogenannten in jeder einzelnen Curve constanten, von einer Curve zu der nächst folgenden aber variabeln Parameter a eliminirt. Einige Beispiele werden dieses allgemeine Verfahren erläutern.

2. Für die aus allen Punkten einer gegebenen geraden Linie mit demselben Radius beschriebenen Kreise die einhüllende Curve zu finden.

Der gemeinschaftliche Halbmesser aller Kreise sey ϱ, und

$$y = Ax + B$$

sey die Gleichung des geometrischen Orts der Mittelpunkte. Sind a, b die Coordinaten des Mittelpunkts eines beliebigen Kreises, so ist dessen Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \varrho^2 ,$$

und nach der Bedingung der Aufgabe hat man

$$b = Aa + B,$$

also

$$(x-a)^2 + (y-Aa-B)^2 = \varrho^2,$$

oder

$$V = (x-a)^2 + (y-Aa-B)^2 - \varrho^2 = 0.$$

Differentiirt man nun nach a, so erhält man

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -2(x-a) - 2A(y-Aa-B) = 0,$$

und man muß also nach (1.), um die Gleichung der einhüllenden Curve zu finden, a aus den beiden Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-Aa-B)^2 = \varrho^2,$$
$$(x-a) + A(y-Aa-B) = 0$$

eliminiren. Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$a = \frac{x + A(y-B)}{1 + A^2},$$

welches, in die erste Gleichung gesetzt, giebt:

$$(y-Ax)^2 + A^2B^2 = (1+A^2)\varrho^2,$$
$$(y-Ax)^2 = \varrho^2 + A^2(\varrho^2 - B^2),$$
$$y = Ax \pm \sqrt{\varrho^2 + A^2(\varrho^2 - B^2)}.$$

Dies sind die Gleichungen zweier der geraden Linie, in welcher die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise liegen, paralleler gerader Linien, von denen also, wie es in der That auch seyn muß, diese Kreise eingehüllt werden. Nähme man den geometrischen Ort der Mittelpunkte als Axe der x an, so wäre $A = B = 0$, folglich die Gleichung der beiden einhüllenden geraden Linien nach dem Obigen $y = \pm \varrho$, woraus man zugleich sieht, daß, wie es in der That auch seyn muß, die Entfernungen der beiden einhüllenden Geraden von dem geometrischen Orte der Mittelpunkte $= \pm \varrho$ sind.

3. Die einhüllende Curve der aus allen Punkten der Peripherie eines gegebenen Kreises als Mittelpunkten mit einerlei Radius beschriebenen Kreise zu finden.

Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sey der Anfang der Coordinaten, ϱ sein Radius und folglich

$$x^2 + y^2 = \varrho^2$$

die Gleichung desselben. Die Coordinaten des Mittelpunkts irgend eines der mit dem Radius r aus den Punkten der Peripherie des gegebenen Kreises beschriebenen Kreise seyen a, b; so ist

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

die Gleichung dieses Kreises, und nach der Bedingung der Aufgabe

$$a^2 + b^2 = \varrho^2, \quad b = \sqrt{\varrho^2 - a^2},$$

folglich

$$V = (x-a)^2 + (y-\sqrt{\varrho^2-a^2})^2 - r^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -2(x-a) + \frac{2a(y-\sqrt{\varrho^2-a^2})}{\sqrt{\varrho^2-a^2}} = 0,$$

oder die zweite Gleichung nach einigen leichten Reductionen:

$$ay - x\sqrt{\varrho^2-a^2} = 0;$$

folglich

$$a = \frac{\varrho x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sqrt{\varrho^2-a^2} = b = \frac{ay}{x} = \frac{\varrho y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

und demnach die Gleichung der gesuchten einhüllenden Curve:

$$\frac{x^2(\sqrt{x^2+y^2}-\varrho)^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2(\sqrt{x^2+y^2}-\varrho)^2}{x^2+y^2} = r^2,$$

$$(\sqrt{x^2+y^2}-\varrho)^2 = r^2,$$

$$\sqrt{x^2+y^2} - \varrho = \pm r,\ x^2+y^2 = (\varrho \pm r)^2.$$

Folglich werden, wie auch sogleich aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung erhellet, alle gegebene Kreise von zwei Kreisen eingehüllt, deren Halbmesser $\varrho \pm r$ sind.

4. Die vorhergehende Aufgabe läßt sich allgemeiner so ausdrücken: Der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, bewege sich auf einer durch die Gleichung $y = \varphi x$ gegebenen Curve; man sucht die Curve, welche alle diese Kreise einhüllt.

Sind a, b die Coordinaten des Mittelpunkts des sich bewegenden Kreises in irgend einer Lage desselben, so ist

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

seine Gleichung in dieser Lage. Aber nach der Bedingung der Aufgabe $b = \varphi a$; folglich

$$(x-a)^2 + (y-\varphi a)^2 - r^2 = 0,$$

und, wenn man nach a differentiirt:

$$-(x-a) - (y-\varphi a)\,\varphi' a = 0.$$

Daher wird die Gleichung der einhüllenden Curve erhalten, wenn man a aus den beiden Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-\varphi a)^2 = r^2,$$
$$(x-a) + (y-\varphi a)\,\varphi' a = 0$$

eliminirt.

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man ohne Schwierigkeit:

$$x = a \pm \frac{r\varphi' a}{\sqrt{1+(\varphi' a)^2}},\quad y = \varphi a \mp \frac{r}{\sqrt{1+(\varphi' a)^2}},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\lambda = \pm\{1 + (\varphi' a)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

setzen:

$$x = a + \lambda r \varphi' a, \quad y = \varphi a - \lambda r .$$

Durch Differentation ergiebt sich

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \lambda r \varphi'' a + r \varphi' a \frac{\partial \lambda}{\partial a} ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \varphi' a - r \frac{\partial \lambda}{\partial a} ,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = \mp \tfrac{1}{2} \{1 + (\varphi' a)^2\}^{-\frac{3}{2}} . 2 \varphi' a . \varphi'' a$$

$$= - \lambda^3 \varphi' a \varphi'' a ;$$

also

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \lambda r \varphi'' a \{1 - \lambda^2 (\varphi' a)^2\}$$

$$= 1 + \lambda^3 r \varphi'' a ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \varphi' a \{1 + \lambda^3 r \varphi'' a\} ,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} = \varphi' a = \frac{\partial b}{\partial a} .$$

Hieraus schließt man nach dem Artikel Berührung (5.) i. d. Z., daß die gegebene und die einhüllende Curve in den zusammengehörenden Punkten (a, b) und (x, y) einander parallel sind.

Die Gleichung der Normale der gegebenen Curve in dem Punkte (a, b) ist nach dem angeführten Artikel (6.)

$$y' - b = - \frac{x' - a}{\varphi' a} .$$

Setzt man

$$x' = x = a + \lambda r \varphi' a, \quad y' = y = \varphi a - \lambda r ;$$

so erhält man, da $b = \varphi a$ ist, die Gleichung $\lambda r = \lambda r$, woraus, da diese Gleichung identisch ist, folgt, daß der Punkt (x, y) der einhüllenden Curve auf der durch den Punkt (a, b) der gegebenen Curve gezogenen Normale liegt, so daß es also, wenn der Punkt (a, b) gegeben ist, immer leicht ist, den Punkt (x, y) zu finden, indem die Entfernung dieser beiden Punkte von einander offenbar $= r$ ist. Da man r auf beiden Seiten von (a, b) nehmen kann, so giebt es, wie sich von selbst versteht, und auch durch das doppelte Zeichen von λ angedeutet wird, jederzeit zwei Enveloppen. Man denke sich jetzt zwei beliebige auf den beiden Curven normale gerade Linien, deren eine als auf die andere folgend betrachtet werden, und den zusammengehörenden Punkten (a, b) und (x, y) der beiden Curven entsprechen soll. Sind nun σ und s respective die zwischen diesen Normalen liegenden Bogen der beiden Curven, so ist bekanntlich

$$\partial s = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} , \quad \partial \sigma = \partial a \sqrt{1 + (\varphi' a)^2} .$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial a} = \varphi' a ;$$

folglich

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial a} ,$$

und demnach

$$\partial s = \frac{\partial x}{\partial a}\,\partial\sigma = (1 + 1^3\, r\varphi'' a)\,\partial\sigma$$

$$= \partial\sigma \pm \{1+(\varphi' a)^2\}^{-\frac{3}{2}}\,\{1+(\varphi' a)^2\}^{\frac{3}{2}}\, r\varphi'' a\partial a$$

$$= \partial\sigma \pm \frac{r\varphi'' a\partial a}{1+(\varphi' a)^2} = \partial\sigma \pm \frac{r\varphi'' a}{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial a}\right)^2}\cdot\partial a ,$$

$$s = \sigma \pm r\int \frac{\varphi'' a}{1+(\varphi' a)^2}\,\partial a = \sigma \pm r\,\text{Arc tang}\,\varphi' a + C ,$$

da bekanntlich

$$\partial\,\text{Arc tang}\,\varphi' a = \frac{\partial\varphi' a}{1+(\varphi' a)^2} = \frac{\varphi'' a}{1+(\varphi' a)^2}\,\partial a$$

ist. Ist α die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen am Anfangspunkte des Bogens σ die Berührende der gegebenen Curve mit der Axe der x bildet, so ist bekanntlich (Berührung 5.) in diesem Punkte $\alpha = \varphi' a$. Für diesen Punkt ist aber $\sigma = s = 0$, also

$$0 = \pm r\,\text{Arc tang}\,\alpha + C ,$$

$$C = \mp r\,\text{Arc tang}\,\alpha ,$$

und folglich

$$s = \sigma \mp r\{\text{Arc tang}\,\alpha - \text{Arc tang}\,\varphi' a\} ;$$

d. i. nach einer sehr bekannten goniometrischen Formel

$$s = \sigma \mp r\,\text{Arc tang}\,\frac{\alpha - \varphi' a}{1+\alpha\varphi' a} .$$

Ist also ω der in Theilen des Radius $= 1$ ausgedrückte Bogen oder Winkel, unter welchem die den Endpunkten der Bogen σ und s entsprechenden Normalen sich schneiden, so ist offenbar

$$s = \sigma \mp r\omega .$$

Das obere und untere Zeichen entspricht der einen und der andern einhüllenden Curve aller Kreise, da es, wie wir aus dem Obigen wissen, immer zwei solche Curven giebt. Setzen wir

$$s = \sigma - r\omega ,\ s' = \sigma + r\omega ;$$

so ist immer

$$\sigma = \frac{s+s'}{2} ,$$

welches ebenfalls eine merkwürdige Relation ist. Aehnliche Ausdrücke würden sich auch für die zwischen den beiden Normalen und den Bogen σ, s, s' enthaltenen Flächenräume auf ähnliche Art finden lassen. Am leichtesten scheint man indeß zu diesen Ausdrücken

auf folgende Art zu gelangen. Ist F überhaupt die Fläche zwischen σ, dem allgemeinen Bogen s und den beiden Normalen, so erhellet leicht, daß man

$$\partial F = \tfrac{1}{2} r(\partial\sigma + \partial s)$$

setzen kann, indem sich ∂F als ein geradliniges Trapezium betrachten läßt, dessen parallele Seiten $\partial\sigma$, ∂s sind, und die Höhe $= \frac{1}{2} r$ ist. Nach dem Obigen ist also

$$\partial F = \tfrac{1}{2} r \left\{ 2\partial\sigma \pm \frac{r\varphi'' a \partial a}{1+(\varphi' a)^2} \right\},$$

$$F = r\sigma \pm \tfrac{1}{2} r^2 \int \frac{\varphi'' a \partial a}{1+(\varphi' a)^2}$$

$$= r\sigma \pm \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc\,tang} \varphi' a + C,$$

und auf ähnliche Art wie oben:

$$0 = \pm \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc\,tang} \alpha + C, \quad C = \mp \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc\,tang} \alpha.$$

Also

$$F = r\sigma \mp \tfrac{1}{2} r^2 \{\operatorname{Arc\,tang} \alpha - \operatorname{Arc\,tang} \varphi' a\}$$

$$= r\sigma \mp \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc\,tang} \frac{\alpha - \varphi' a}{1 + \alpha\varphi' a},$$

oder nach dem Obigen

$$F = r\{\sigma \mp \tfrac{1}{2} r\omega\}.$$

Setzt man jetzt

$$F = r\{\sigma - \tfrac{1}{2} r\omega\}, \quad F' = r\{\sigma + \tfrac{1}{2} r\omega\};$$

so ist $F + F' = 2r\sigma$, d. i. der zwischen s, s' und den Normalen enthaltene Raum $= 2r\sigma$.

5. Der Mittelpunkt eines Kreises mit veränderlichem Radius bewege sich auf der Axe der x so, daß das Quadrat seines Halbmessers immer dem Product der Abscisse seines Mittelpunkts in eine gegebene constante Größe α gleich ist; man sucht die Gleichung der alle diese Kreise einhüllenden Curve.

Die Gleichung des sich bewegenden Kreises in irgend einer seiner verschiedenen Lagen ist nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$(x-a)^2 + y^2 = a\alpha.$$

Also

$$V = (x-a)^2 + y^2 - a\alpha = 0,$$

und, wenn man nach a differentiirt:

$$2(x-a) + \alpha = 0, \quad a = \tfrac{1}{2}\alpha + x.$$

Folglich

$$\tfrac{1}{4}\alpha^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \alpha x, \quad y^2 = \alpha x + \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \alpha(x + \tfrac{1}{4}\alpha),$$

oder, für $x + \frac{1}{4}\alpha = x'$:

$$y^2 = \alpha x',$$

so daß also die einhüllende Curve in diesem Falle eine apollonische Parabel ist.

6. Eine gerade Linie bewege sich so, daß die Summe der Entfernungen ihrer Durchschnittspunkte mit den Coordinatenaxen von dem Anfange der Coordinaten stets eine gegebene constante Größe α ist; man soll die einhüllende Curve dieser geraden Linien finden.

Für eine beliebige Lage der sich bewegenden Linie seyen die Entfernungen ihrer Durchschnittspunkte mit der Axe der x und der Axe der y vom Anfange der Coordination respective a, b, und $y = Ax + B$ sey die allgemeine Gleichung der sich bewegenden Linie; so ist

$$0 = Aa + B,\ b = B,\ A = -\frac{b}{a};$$

folglich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

die Gleichung der sich bewegenden Linie. Aber $a + b = \alpha$, $b = \alpha - a$; also

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\alpha - a} = 1,\ (\alpha - a)x + ay = a(\alpha - a);$$

$$V = (\alpha - a)x + ay - a(\alpha - a) = 0;$$

und folglich, wenn man nach a differentiirt:

$$-x + y - (\alpha - a) + a = 0,\ a = \tfrac{1}{2}(\alpha + x - y).$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung $V = 0$, so erhält man nach leichter Rechnung folgende Gleichung der einhüllenden Curve:

$$(x-y)^2 - 2\alpha(x+y) + \alpha^2 = 0.$$

Für

$$x - y = z,\ 2(x+y) - \alpha = u$$

wird diese Gleichung

$$z^2 = \alpha u,$$

woraus man sieht, daß dieselbe einer apollonischen Parabel entspricht.

Diese Aufgaben werden zur Erläuterung der allgemeinen Methode hinreichend seyn. Ihre Auflösung ist nie Schwierigkeiten unterworfen, die Elimination von a ausgenommen, welche in einzelnen Fällen beschwerlich werden kann, und von den bekannten Schwierigkeiten der Elimination überhaupt unzertrennlich ist.

Die einhüllende Curve aller von einem gegebenen Kreise gleiche Segmente abschneidenden Sehnen ist offenbar ein dem gegebenen Kreise concentrischer Kreis, welcher alle Sehnen in ihren Mittelpunkten berührt. Diesen und ähnliche Sätze hat **Magnus** in der Abhandlung **Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes** (Annales de Mathém. T. XVI. p. 80.) auf Curven überhaupt erweitert.

7. Wir haben nur noch kurz zu zeigen, in welchem Zusammenhange die Theorie der einhüllenden Curven mit der so wichtigen Lehre von den partikulären oder besondern Auflösungen der Differentialgleichungen in der Integralrechnung steht. Dazu müssen wir die folgenden allgemeinen Begriffe vorausschicken. Wenn $V = 0$ eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist, so ist die primitive Gleichung $U = 0$ dieser derivirten Gleichung im Allgemeinen eine Gleichung zwischen x, y und einer willkührlichen Constante, die wir a nennen wollen. Obgleich nun allerdings eigentlich das ganze System aller primitiven Gleichungen der derivirten Gleichung $V = 0$ erhalten werden sollte, wenn man in der Gleichung $U = 0$ der willkührlichen Constante a alle möglichen Werthe beilegt; so giebt es doch zuweilen Gleichungen, die nicht zu diesem Systeme gehören, und doch als primitive Gleichungen der derivirten Gleichung $V = 0$ genugthun. Solche Gleichungen nennt man *besondere* oder *partikuläre Auflösungen*, auch wohl bloß *particuläre Integrale* der Differentialgleichung $V = 0$, so wie im Gegentheil $U = 0$ die *vollständige Auflösung* oder das *vollständige Integral* dieser Differentialgleichung genannt wird. Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, so habe man die Gleichung

$$V = x + y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0.$$

Da

$$\frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{\partial x} = \frac{x + y\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}},$$

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}\cdot\frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{\partial x}$$

ist; so läßt sich diese Gleichung auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \partial y = \partial\sqrt{x^2 + y^2 - b^2},$$

und das vollständige Integral ist also

$$y + a = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2},\ x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Der gegebenen Differentialgleichung entspricht aber auch noch die partikuläre Auflösung oder das partikuläre Integral

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

Differentiirt man nämlich, so erhält man

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und es ist daher offenbar auch für obige Gleichung

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0 .$$

8. Sey nun wieder überhaupt $V = 0$ die gegebene Differentialgleichung des ersten Grades und $U = 0$ deren vollständiges Integral, welches also eine willkührliche Constante a implicirt. Offenbar kann man sich $U = 0$ als die allgemeine Gleichung einer stetigen Folge von Curven denken, welche durch Variation der in dieser Gleichung enthaltenen willkührlichen Constante erhalten werden, und sämmtlich eine allgemeine, durch die Differentialgleichung $V = 0$ analytisch ausgedrückte Eigenschaft haben. Denkt man sich nun die alle diese Curven einhüllende Curve, so hat dieselbe mit jeder dieser Curven einen ihrer Punkte gemein, und muß folglich dieselbe allgemeine durch die Differentialgleichung $V = 0$ analytisch ausgedrückte Eigenschaft haben, wie diese Curven selbst, woraus sich also ergiebt, daß die Gleichung der einhüllenden Curve zugleich das partikuläre Integral der Differentialgleichung $V = 0$ seyn muß. Daraus ergiebt sich mittelst des Obigen folgende Regel zur Auffindung der partikulären Integrale der Differentialgleichungen ersten Grades. Man suche das vollständige Integral $U = 0$ der Gleichung $V = 0$, wodurch die willkührliche Constante a eingeführt wird. Hierauf differentiire man U nach a, setze

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0 ,$$

und eliminire a aus den Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0 ;$$

so erhält man das gesuchte partikuläre Integral. So war z. B. in (7.) der Differentialgleichung

$$V = x + y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0$$

vollständiges Integral:

$$x^2 + 2ay + a^2 - b^2 = 0 ,$$

wo a die willkührliche Constante, und

$$U = x^2 - 2ay - a^2 - b^2$$

ist. Differentiirt man nach a, so kommt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = -2y - 2a ,$$

und man muß nun a aus den Gleichungen

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0, \; y + a = 0$$

eliminiren. Dies giebt

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

als partikuläres Integral, wie wir schon in (7.) gefunden haben.

9. Einige hierher gehörende Aufgaben knüpfen wir zugleich an geometrische Bedingungen. Sey z. B. die einhüllende Curve derjenigen Curven zu finden, bei denen die Normale zu der Summe der Abscisse und Subnormale ein gegebenes constantes Verhältniß hat.

Nach dem Artikel Berührung (6.) i. d. Z. hat man

$$\text{Normale} = y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},\ \text{Subnormale} = \frac{y\partial y}{\partial x};$$

folglich nach der Bedingung der Aufgabe, wenn α den Exponenten des gegebenen constanten Verhältnisses bezeichnet,

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \alpha\left\{x+\frac{y\partial y}{\partial x}\right\},$$

woraus leicht, wenn man diese Gleichung rational macht, und die dadurch sich ergebende quadratische Gleichung nach $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Größe auflöst:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\alpha^2 x}{(1-\alpha^2)y} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2x^2-(1-\alpha^2)y^2}}{(1-\alpha^2)y},$$

$$0 = \alpha^2 x - (1-\alpha^2)y\frac{\partial y}{\partial x} \pm \sqrt{\alpha^2x^2-(1-\alpha^2)y^2},$$

oder

$$\mp 1 = \frac{\alpha^2 x - (1-\alpha^2)y\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{\alpha^2x^2-(1-\alpha^2)y^2}},$$

d. i., wie auf der Stelle in die Augen fällt:

$$\mp 1 = \frac{\partial\sqrt{\alpha^2x^2-(1-\alpha^2)y^2}}{\partial x},$$

$$\partial x = \mp\,\partial\sqrt{\alpha^2x^2-(1-\alpha^2)y^2};$$

folglich das vollständige Integral unserer obigen Differentialgleichung

$$x-a = -\sqrt{\alpha^2x^2-(1-\alpha^2)y^2},$$

oder

$$(1-\alpha^2)(x^2+y^2) - 2ax + a^2 = 0,$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Zugleich ist dies die allgemeine Gleichung der Curven, welchen die in der Aufgabe ausgesprochene Eigenschaft zukommt. Um die einhüllende Curve derselben und zugleich das particuläre Integral unserer obigen Differentialgleichung zu finden, differentire man vorstehende Gleichung nach a; so kommt

$$-2x+2a = 0,\ x = a.$$

Dies in obige Gleichung gesetzt giebt als Gleichung der einhüllenden Curve oder als particuläres Integral unserer Differentialgleichung:

$$y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0,\ (1 - a^2)y^2 = a^2x^2,\ y = \pm \frac{ax}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Die einhüllende Curve ist also das System zweier durch diese Gleichung dargestellter gerader Linien. Da aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

folgt, und

$$\frac{a^2x}{(1-a^2)y} = \pm \frac{a^2x}{1-a^2} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{ax} = \pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\ a^2x^2 - (1-a^2)y^2 = 0$$

ist, so sieht man, daß in der That durch dieselbe unserer obigen Differentialgleichung ebenfalls genügt wird.

Setzt man in der Gleichung

$$(1-a^2)(x^2+y^2) - 2ax + a^2 = 0$$

$$x - \frac{a}{1-a^2} = u,$$

so wird dieselbe

$$u^2 + y^2 = \left\{\frac{a^2}{1-a^2}\right\}^2$$

und entspricht also einer Reihe von Kreisen mit dem veränderlichen Radius $\frac{a^2}{1-a^2}$. Der Mittelpunkt jedes dieser Kreise wird durch die Coordinaten $\frac{a}{1-a^2}$, 0 bestimmt.

10. Die einhüllende Curve aller der Curven zu finden, deren Normale die mittlere Proportionale zwischen einer gegebenen Linie b und der Summe der Abscisse und Subnormale ist.

Aus (9.) und den Bedingungen der Aufgabe ergiebt sich auf der Stelle folgende Gleichung:

$$b\left\{x + \frac{y\partial y}{\partial x}\right\} = y^2\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\},$$

oder

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{b}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{bx - y^2}{y^2};$$

folglich durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{2y} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + bx - y^2}}{y},$$

$$0 = b - 2y\frac{\partial y}{\partial x} \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2},$$

$$\pm 1 = \frac{b - 2y\frac{\partial y}{\partial x}}{2\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + bx - y^2}},$$

d. i., wie man sogleich übersieht:

$$\mp 1 = \frac{\partial \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + bx - y^2}}{\partial x},$$

$$\partial x = \mp \partial \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2},$$

$$x - a = \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2},$$

oder, wenn man diese Gleichung rational macht:

$$x^2 - 2ax + a^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2,$$

$$x^2 - 2(a+\tfrac{1}{2}b)x + (a+\tfrac{1}{2}b)^2 = ab + \tfrac{1}{4}b^2 - y^2,$$

$$\{x - (a+\tfrac{1}{2}b)\}^2 + y^2 = b(a+\tfrac{1}{2}b),$$

woraus man sieht, daß die Curven, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, Kreise sind, deren Halbmesser $= \sqrt{b(a+\frac{1}{2}b)}$ ist. a ist auch hier, wie früher, die willkührliche Constante.

Um nun die einhüllende Curve zu finden, differentiire man die Gleichung

$$x^2 - 2ax + a^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2$$

nach a, so erhält man

$$-2x + 2a = 0, \quad x = a,$$

und folglich die Gleichung der einhüllenden Curve

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx = b(\tfrac{1}{4}b + x),$$

oder, für $\frac{1}{4}b + x = x'$:

$$y^2 = bx',$$

so daß also die einhüllende Curve eine apollonische Parabel ist. Zugleich ist

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx$$

das partikuläre Integral der Differentialgleichung

$$0 = b - 2y\frac{\partial y}{\partial x} \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2}.$$

Man erhält nämlich leicht

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = b, \quad b - 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \tfrac{1}{4}b^2 + bx - y^2 = 0,$$

und sieht hieraus, daß durch die Gleichung

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + bx$$

der in Rede stehenden Differentialgleichung genügt wird.

Diese Aufgabe ist für die gegenwärtige Theorie von historischer Bedeutung, weil sie, von Leibnitz in den Act. erud. 1694. aufgelöst, die erste seyn mag, welche auf eine einhüllende Curve oder ein particuläres Integral geführt hat.

11. Sey nun ferner

$$V = \varphi(x, y, z, a) = 0$$

die Gleichung einer krummen Fläche mit dem Parameter a, wel-

cher für dieselbe Fläche als constant betrachtet wird, durch dessen stetige Veränderung man aber eine stetige Folge gleichartiger krummer Flächen bilden kann, die sich in einer stetigen Folge krummer Linien schneiden werden, welche zusammen eine neue krumme Fläche bilden, von der die erstern Flächen sämmtlich berührt werden, und die man daher die einhüllende Fläche, auch wohl die Gränzfläche, dieser Flächen nennt. Um die Gleichung der einhüllenden Fläche zu finden, lasse man a sich um das unendlich kleine ∂a verändern, so sind die Gleichungen zweier unmittelbar auf einander folgenden Flächen in der stetigen Folge aller der Flächen, deren Umhüllungsfläche gesucht wird,

$$V = \varphi(x, y, z, a) = 0 ,$$

$$V' = \varphi(x, y, z, a + \partial a) = 0 .$$

Für die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden Flächen haben x, y, z dieselben Werthe, und die beiden obigen Gleichungen, wenn man in denselben den x, y, z sich gleiche Werthe beigelegt denkt, sind also die Gleichungen dieser Durchschnittslinie. Weil aber nach Principien der Differentialrechnung

$$V' = V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a$$

ist; so sind auch

$$V = 0, \; V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0 ,$$

oder

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

die Gleichungen dieser Durchschnittslinie, für jede zwei unmittelbar auf einander folgende Flächen. Man nennt diese Durchschnittslinie nach Monge die Charakteristik der eingehüllten Flächen. Da man sich nach dem Vorhergehenden die einhüllende Fläche als die stetige Folge aller Charakteristiken zu denken hat, so liegt jede Charakteristik ganz in der einhüllenden Fläche, und in den vorhergehenden beiden Gleichungen kann man sich also x, y, z auch als allgemeine Coordinaten der einhüllenden Fläche denken. Will man nun also eine allgemeine Relation zwischen den Coordinaten irgend eines Punktes der einhüllenden Fläche, d. i. eben die Gleichung dieser Fläche finden, so muß man den Parameter a aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

eliminiren, wodurch diese Gleichung erhalten wird.

Die stetige Folge der Durchschnittspunkte aller Charakteristiken bildet auf der einhüllenden Fläche eine Curve, welche nach Monge die Wendungscurve (arête de rebroussement),

welches man auch durch Knotenkante oder Knotenfurche übersetzt hat, genannt wird. Sind

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0,$$

die Gleichungen irgend einer Charakteristik, so sind, wenn a sich um das unendlich kleine ∂a ändert, auf ganz ähnliche Art, wie oben,

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right)\partial a = 0,$$

oder, der beiden ersten Gleichungen wegen,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right) = 0$$

die Gleichungen der nächst folgenden Charakteristik. Für den Durchschnittspunkt, oder, wenn es mehrere giebt, für die Durchschnittspunkte beider Charakteristiken, müssen x, y, z in den beiden obigen Systemen als gleich gedacht werden, und man hat folglich für die Durchschnittspunkte jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Charakteristiken die drei Gleichungen

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right) = 0.$$

Will man nun bloß eine allgemeine Relation zwischen den Coordinaten der Durchschnittspunkte jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Charakteristiken haben, so muß man a aus den vorhergehenden drei Gleichungen eliminiren, wodurch man zwei solche allgemeine Relationen erhält, welche, wie auf den ersten Blick in die Augen fällt, die Gleichungen der Wendungscurve der einhüllenden Fläche seyn werden.

12. Bewegte sich z. B. eine Kugel mit dem constanten Radius ϱ im Raume auf eine solche Weise, daß ihr Mittelpunkt stets auf einer in der Ebene der xy liegenden und durch die Gleichung $y = fx$ charakterisirten Curve hingleitet, so würde sich die einhüllende Fläche aller dieser Kugeln nach dem Vorhergehenden auf folgende Art bestimmen lassen.

Ist a der Werth von x für eine beliebige Lage der sich bewegenden Kugel, so ist

$$(x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 = \varrho^2$$

die Gleichung derselben, und folglich in diesem Falle

$$V = (x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 - \varrho^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -2(x-a) - 2(y-fa)f'a,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right) = 2 - 2(y-fa)f'a + 2(f'a)^2.$$

Also sind

$$(x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$
$$(x-a) + (y-fa)\,f'a = 0$$

die Gleichungen der Charakteristik der einhüllenden Fläche. Die Gleichung dieser Fläche selbst wird gefunden, wenn man a aus den vorstehenden zwei Gleichungen eliminirt. Die beiden Gleichungen der Wendungscurve endlich ergeben sich, wenn man a aus den drei Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-fa)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$
$$(x-a) + (y-fa)\,f'a = 0 ,$$
$$1 + (f'a)^2 - (y-fa)\,f''a = 0$$

eliminirt.

Wäre die in der Ebene der xy gegebene Curve eine gerade Linie, und, wenn wir uns dieselbe zugleich der Einfachheit wegen durch den Anfang der Coordinaten gehend denken, $y = Ax$ ihre Gleichung, so sind die Gleichungen der Charakteristik

$$(x-a)^2 + (y-Aa)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$
$$(x-a) + A(y-Aa) = 0 .$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$a = \frac{x+Ay}{1+A^2} ,$$

und dies, in die erste Gleichung gesetzt, giebt als Gleichung der einhüllenden Fläche

$$z^2 = \varrho^2 - \left\{\frac{A^2x-Ay}{1+A^2}\right\}^2 - \left\{\frac{y-Ax}{1+A^2}\right\}^2 , \ldots\ldots$$

oder

$$z^2 = \varrho^2 - \frac{(Ax-y)^2}{1+A^2} , \quad z = \sqrt{\varrho^2 - \frac{(Ax-y)^2}{1+A^2}} ,$$

so daß also $z = f(Ax-y)$ ist, und daher diese Gleichung offenbar einer Cylinderfläche entspricht (s. Cylindrische Flächen i. d. Z.). Die Gleichung

$$(x-a) + A(y-Aa) = 0$$

ist die Gleichung der Projection der Charakteristik auf der Ebene der xy, und diese Projection folglich eine gerade Linie, so daß also die Charakteristik eine Curve von einfacher Krümmung ist. Da ferner

$$x - a = -A(y-Aa)$$

ist, so ist die Gleichung der Projection der Charakteristik auf der Ebene der yz:

$$(1+A^2)\,(y-Aa)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$

oder

$$\varrho^2\,(y-Aa)^2 + \frac{\varrho^2}{1+A^2}\,z^2 = \varrho^2 \cdot \frac{\varrho^2}{1+A^2} ,$$

woraus also erhellet, daß diese Projection eine Ellipse ist, deren beide Halbaxen

$$\varrho \text{ und } \frac{\varrho}{\sqrt{1+A^2}}$$

sind. Da ferner

$$y - Aa = -\frac{x-a}{A}$$

ist, so ist die Gleichung der Projection der Charakteristik auf der Ebene der xz:

$$\frac{1+A^2}{A^2}(x-a)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$

oder

$$\varrho^2(x-a)^2 + \frac{\varrho^2 A^2}{1+A^2}\, z^2 = \varrho^2 \frac{\varrho^2 A^2}{1+A^2} ,$$

und diese Projection also auch eine Ellipse, deren Halbaxen

$$\varrho \text{ und } \frac{\varrho A}{\sqrt{1+A^2}}$$

sind. Daß die Charakteristik selbst ein Kreis ist, erhellet leicht auf folgende Art. Man nehme nämlich, wie es offenbar verstattet ist, die Axe der x so an, daß sie mit der Geraden, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, parallel ist; so ist die Gleichung dieser Gerade $y = A$; folglich die Gleichungen der Charakteristik nach dem Obigen

$$(x-a)^2 + (y-A)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$
$$x - a = 0 ,$$

da hier $f'a = 0$ zu setzen ist. Die Gleichung $x = a$ ist die Gleichung der Projection der Charakteristik auf der Ebene der xy, so daß also die Charakteristik offenbar immer in einer Ebene liegt, welche der Ebene der yz parallel ist. Die Gleichung der Projection der Charakteristik auf dieser Ebene ist

$$(y - A)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$

die Gleichung eines Kreises, so daß also die Charakteristik selbst ein Kreis ist. Zugleich erhellet hieraus, daß die Ebenen aller Charakteristiken unter einander parallel sind, und folglich an eine Wendungscurve in diesem Fall nicht zu denken ist, wie sich auch ergeben würde, wenn man die Wendungscurve nach der oben angegebenen allgemeinen Regel zu bestimmen suchte.

Wäre die in der Ebene der xy gegebene Curve ein Kreis und

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung desselben, wenn man den Anfang der Coordinaten der Einfachheit wegen im Mittelpunkte dieses Kreises annimmt; so wären unsere drei obigen Gleichungen:

$$(x-a)^2 + (y - \sqrt{r^2-a^2})^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$
$$x = \frac{ay}{\sqrt{r^2-a^2}}, \quad \frac{r^2 y}{(r^2-a^2)\sqrt{r^2-a^2}} = 0 .$$

Die beiden ersten Gleichungen sind die Gleichungen der Charakteristik, welche eine Curve von einfacher Krümmung ist, da, wegen der zweiten Gleichung, die Projektion auf der Ebene der xy eine gerade Linie ist. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$a = \frac{x}{y}\sqrt{r^2-a^2}, \; a = \frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \; \sqrt{r^2-a^2} = \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Also ist

$$\sqrt{x^2+y^2} = r + \sqrt{\varrho^2 - z^2}$$

die Gleichung der einhüllenden Fläche.

Ist ψ der Winkel, unter welchem die Projection der Charakteristik auf der Ebene der xy die Axe der x schneidet, so ist, weil

$$y = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} x$$

ist:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}, \; \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\psi^2}} = \frac{a}{r} .$$

Für die Gleichung der Projection der Charakteristik in der Ebene der xz erhält man leicht:

$$(x-a)^2 \cdot \frac{r^2}{a^2} + z^2 = \varrho^2 .$$

Nimmt man aber die Ebene der Charakteristik, welche wegen der Gleichung

$$y = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} x$$

offenbar durch den Anfang der Coordinaten geht, selbst als Ebene der x'z an, so ist offenbar

$$x = x' \cos\psi = \frac{ax'}{r} ,$$
$$x - a = \frac{a(x'-r)}{r} ,$$

und folglich nach dem Obigen die Gleichung der Charakteristik

$$(x'-r)^2 + z^2 = \varrho^2 ,$$

so daß also die Charakteristik ein Kreis ist.

Bewegte sich auf der durch die Gleichung $y = fx$ gegebenen Curve mit seinem Mittelpunkte ein durch die Umdrehung einer Ellipse um die Axe der z entstandenes Ellipsoid, so wäre dessen Gleichung in einer beliebigen Lage, wenn die beiden Halbaxen

der erzeugenden Ellipse durch α, β bezeichnet werden, wie leicht erhellet:

$$\alpha^2\{(x-a)^2 + (y-fa)^2\} + \beta^2 z^2 = \alpha^2\beta^2 ;$$

folglich in diesem Falle

$$V = \alpha^2\{(x-a)^2 + (y-fa)^2\} + \beta^2 z^2 - \alpha^2\beta^2 ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -2\alpha^2\{(x-a) + (y-fa)f'a\} ,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right) = 2\alpha^2\{1-(y-fa)f''a + (f'a)^2\} ,$$

und man hat folglich in diesem Falle zur Bestimmung der Charakteristik, der einhüllenden Fläche und der Wendungscurve nachstehende drei Gleichungen:

$$\alpha^2\{(x-a)^2 + (y-fa)^2\} + \beta^2 z^2 = \alpha^2\beta^2 ,$$
$$(x-a) + (y-fa)f'a = 0 ,$$
$$1 - (y-fa)f''a + (f'a)^2 = 0 .$$

Ist die gegebene Curve ein Kreis, so sind die beiden ersten Gleichungen:

$$\alpha^2\{(x-a)^2 + (y-\sqrt{r^2-a^2})^2\} + \beta^2 z^2 = \alpha^2\beta^2 ,$$

$$x - a - (y-\sqrt{r^2-a^2}).\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}} = 0 ,$$

oder die zweite Gleichung kürzer

$$x\sqrt{r^2-a^2} - ay = 0 .$$

Bestimmt man hieraus a und setzt den Werth in die erste Gleichung, so ergiebt sich als Gleichung der einhüllenden Fläche:

$$\alpha(\sqrt{x^2+y^2} - r) = \beta\sqrt{\alpha^2-z^2} .$$

Für $\alpha = \beta = \varrho$ geht das Ellipsoid in eine Kugel über, und man erhält die bei der vorigen Aufgabe gefundene Gleichung.

13. Es könnte auch der Fall vorkommen, daß die Gleichung der einzuhüllenden Flächen

$$V = \varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

die beiden Parameter a, b enthielte, und hier könnte wieder b von a abhängig, oder a und b könnten beide von einander ganz unabhängig seyn. Im ersten Fall finde zwischen a und b die Gleichung

$$v = f(a, b) = 0$$

Statt. Der Differentialquotient von V in Bezug auf a ist nach Principien der Differentialrechnung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a} ,$$

und aus der zweiten Gleichung $v = 0$ ergiebt sich

$$\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a} = 0 .$$

Also wird man nach (11.) die Gleichung der einhüllenden Fläche erhalten, wenn man aus den vier Gleichungen:

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a} = 0;$$

$$v = 0, \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)\frac{\partial b}{\partial a} = 0$$

die drei Größen a, b, $\frac{\partial b}{\partial a}$ eliminirt.

Sind ferner a, b unabhängig von einander, so betrachte man zuerst b als constant. Unter dieser Bedingung ist die Gleichung der alle durch Variation von a aus der Gleichung $V=0$ hervorgehende Flächen einhüllenden Fläche das Resultat der Elimination von a aus den Gleichungen

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0.$$

Die Gleichung, welche man auf diese Art erhält, ist von a unabhängig, enthält aber b. Läßt man nun b variiren, so erhält man eine stetige Folge einhüllender Flächen, die alle selbst wieder eine einhüllende Fläche haben, deren Gleichung sich aus der für die erste einhüllende Fläche gefundene, b noch enthaltende, Gleichung nach denselben Principien wie vorher ergiebt. Diese Fläche ist nun offenbar die Fläche, von welcher alle aus der Gleichung $V = 0$ durch Variation von a und b sich ergebende Flächen eingehüllt werden. Man kann sich aber die durch Variation von b hervorgehende stetige Folge einhüllender Flächen durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

gegeben vorstellen, unter der Voraussetzung, daß a in einer durch die Gleichung

$$V = 0$$

ausgedrückten Abhängigkeit von b sich befindet, wodurch man auf den vorher behandelten Fall zurückgeführt wird, und folglich die einhüllende Fläche aller ersten einhüllenden Flächen erhält, wenn man a, b, $\frac{\partial a}{\partial b}$ aus den vier Gleichungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right)\frac{\partial a}{\partial b} = 0;$$

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial b} = 0$$

eliminirt. Wegen der ersten Gleichung geht aber die vierte in

$$\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) = 0$$

über, und man erhält also die Gleichung der alle durch Variation von a und b aus der Gleichung $V = 0$ hervorgehende Flä-

chen einhüllenden Fläche, wenn man a und b aus den drei Gleichungen

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) = 0$$

eliminirt. Nur hat man hierbei zu bemerken, daß die gegebenen Flächen von der ersten Reihe einhüllender Flächen in zusammenhängenden Linien berührt werden, und daß dies auch von dieser ersten Reihe einhüllender Flächen und der Fläche, von welcher sie eingehüllt werden, gilt, daß aber eben deshalb diese letzte einhüllende Fläche die gegebenen Flächen im Allgemeinen offenbar nur in Punkten berühren kann.

14. Nach ganz ähnlichen Betrachtungen wie in (7.) und (8.) läßt sich hiervon nun wieder folgende Anwendung auf die partikulären Integrale der Differentialgleichung $V = 0$ zwischen den veränderlichen Größen x, y, z und den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ machen. Ist nämlich $U = 0$ das vollständige Integral der Differentialgleichung $V = 0$, welches also zwei willkührliche Constanten a, b enthält, so erhält man das partikuläre Integral von $V = 0$, wenn man a und b aus den Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = 0$$

eliminirt. Die zu diesem Schluß führende Betrachtung ist der in (7.) angestellten ganz ähnlich und soll daher hier nicht wiederholt werden.

Für

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$$

ist das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\varkappa\sqrt{1+p^2+q^2} = z - px - qy,$$

wie man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann:

$$z = ax + by + \varkappa\sqrt{1 + a^2 + b^2},$$

und a, b sind zwei willkührliche Constanten. Setzt man also

$$U = ax + by - z + \varkappa\sqrt{1 + a^2 + b^2};$$

so ist

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = x + \frac{a\varkappa}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = y + \frac{b\varkappa}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Um also das partikuläre Integral unserer Differentialgleichung zu finden, muß man a, b aus den Gleichungen

$$ax + by - z + \varkappa\sqrt{1 + a^2 + b^2} = 0,$$

$$a\varkappa + x\sqrt{1+a^2+b^2} = 0, b\varkappa + y\sqrt{1+a^2+b^2} = 0$$

eliminiren. Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$a^2 x^2 = x^2(1+a^2+b^2),\ b^2 x^2 = y^2(1+a^2+b^2);$$
$$x^2(a^2+b^2) = (x^2+y^2)(1+a^2+b^2),$$
$$x^2(1+a^2+b^2) = z^2 + (x^2+y^2)(1+a^2+b^2);$$
$$1 + a^2 + b^2 = \frac{x^2}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Ferner hat man

$$ax = -\frac{x^2}{z}\sqrt{1+a^2+b^2},\ by = -\frac{y^2}{z}\sqrt{1+a^2+b^2};$$

$$ax + by = -\frac{x^2+y^2}{z}\sqrt{1+a^2+b^2};$$

folglich mittelst der ersten Gleichung:

$$\frac{z^2 - x^2 - y^2}{z}\sqrt{1+a^2+b^2} - z = 0,$$

und daher

$$\sqrt{z^2 - x^2 - y^2} - z = 0,$$

oder

$$z = \sqrt{z^2 - x^2 - y^2}$$

das gesuchte partikuläre Integral. Differentiirt man, um die Richtigkeit zu prüfen, nach x und y, so erhält man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = -\frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}},\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = -\frac{y}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}};$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{z^2}{z^2 - x^2 - y^2},\ z\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}}.$$

Ferner ist

$$z - px - py = \sqrt{z^2 - x^2 - y^2} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}} = \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}},$$

und man sieht also, daß durch die Gleichung

$$z = \sqrt{z^2 - x^2 - y^2}$$

wirklich der Differentialgleichnng

$$z\sqrt{1+p^2+q^2} = z - px - qy$$

genügt wird, wie verlangt wurde.

15. In dem vollständigen Integrale $U = 0$ der Differentialgleichung $V = 0$ kann man sich offenbar auch die eine der beiden willkührlichen Constanten, z. B. b, als Function der andern a denken, und die Gleichung $U = 0$ kann man sich immer auf ähnliche Art, wie in (8.), als die allgemeine Gleichung einer stetigen Folge durch Variation von a entstandener krummer Flächen vorstellen, welche sämmtlich eine durch die Differentialgleichung $V = 0$ analytisch ausgedrückte gemeinschaftliche Eigenschaft haben. Jeder Punkt der einhüllenden Fläche dieser Flächen

ist ein Punkt dieser Flächen selbst, so daß also die einhüllende Fläche offenbar dieselbe Eigenschaft haben, ihre Gleichung folglich auch eine der Differentialgleichung $V = 0$ genügende Gleichung seyn wird, welches immer Statt finden muß, was auch b für eine Function von a seyn mag. Ist nun $b = fa$, so wird nach (13.) die Gleichung der einhüllenden Fläche erhalten, wenn man a aus den beiden Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial fa}\right) f'a = 0$$

eliminirt, und man erhält also, da fa ganz willkührlich ist, jederzeit ein Integral von $V = 0$, wenn man für fa eine beliebige Function von a setzt, und dann a aus den beiden vorstehenden Gleichungen eliminirt. Lagrange nennt daher das System dieser beiden Gleichungen das allgemeine Integral (intégrale générale) der Differentialgleichung $V = 0$. Nehmen wir dies nun mit (14.) zusammen, so ist, wenn $V = 0$ eine beliebige Gleichung zwischen x, y, z, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$, und $U = 0$ deren vollständiges Integral (intégrale complète) mit den zwei willkührlichen Constanten a, b ist, das allgemeine Integral (intégrale générale) dieser Differentialgleichung das System der zwei Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial fa}\right) f'a = 0$$

für $b = fa$, so wie das particuläre Integral (intégrale singulière ou particulière) dieser Differentialgleichung das Resultat der Elimination von a, b aus den drei Gleichungen

$$U = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = 0$$

ist.

Hat man z. B. die Differentialgleichung

$$z = px + qy$$

oder

$$z - px - qy = 0,$$

so daß

$$V = z - px - qy$$

ist, so ist das vollständige Integral

$$z = ax + by,$$

weil aus dieser Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = a, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = b,$$

also

$$px + qy = ax + by = z$$

folgt, wie erfordert wird. Da nun

$$U = z - ax - by, \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = -x, \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right) = -y$$

ist; so ist das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung das System der zwei Gleichungen

$$z = ax + yfa, \quad x + yf'a = 0 .$$

Setzt man z. B. mit Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions, nouv. éd. p. 372.)

$$fa = A - \frac{a^2}{4B} ,$$

so ist

$$f'a = -\frac{a}{2B} ,$$

und folglich das allgemeine Integral für diese specielle Form von fa das System der Gleichungen

$$z = ax + y\left\{A - \frac{a^2}{4B}\right\}, \quad x - \frac{ay}{2B} = 0 .$$

Aus der zweiten folgt

$$a = \frac{2Bx}{y} ,$$

und dieser Werth, in die erste Gleichung gesetzt, giebt:

$$z = Ay + \frac{Bx^2}{y} .$$

Wir wollen prüfen, ob durch diese Gleichung auch der gegebenen Differentialgleichung genügt wird. Durch partielle Differentiation erhält man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = \frac{2Bx}{y}, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = A - \frac{Bx^2}{y^2} ;$$

also

$$px + qy = \frac{2Bx^2}{y} + Ay - \frac{Bx^2}{y} = Ay + \frac{Bx^2}{y} = z ,$$

wie erfordert wird.

Setzte man $fa = Aa^2$, so wäre $f'a = 2Aa$, und man müßte also a aus den beiden Gleichungen

$$z = ax + Aa^2y, \quad x + 2Aay = 0$$

eliminiren. Aus der zweiten folgt

$$a = -\frac{x}{2Ay} ,$$

und dies, in die erste Gleichung gesetzt, giebt:

$$z = -\frac{x^2}{2Ay} + \frac{x^2}{4Ay} = -\frac{x^2}{4Ay} .$$

Um zu zeigen, daß durch diese Gleichung wirklich der gegebenen Differentialgleichung genügt wird, differentiire man nach x und y; so erhält man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p = -\frac{x}{2Ay}, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = \frac{x^2}{4Ay^2};$$

folglich

$$px + qy = -\frac{x^2}{2Ay} + \frac{x^2}{4Ay} = -\frac{x^2}{4Ay} = z,$$

wie erfordert wird.

Größerer Ausführlichkeit über die Theorie der einhüllenden Curven und Flächen wegen verweisen wir vorzüglich auf **Littrow** analytische Geometrie. Wien. 1823. Cap. VI. VII. und **Brandes** höhere Geometrie. Thl. II. Lpzg. 1824. §. 184—218. §. 487—501. §. 544—554. Ueber die Theorie der allgemeinen und partikulären Integrale, welche wir in ihren ersten Elementen an die geometrische Theorie der einhüllenden Curven und Flächen zu knüpfen hier für zweckmäßig gehalten haben, s. m. aber vorzüglich **Lagrange** Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806. Leçon XIV—XVII. p. 371. ff. und außerdem **Lacroix** Traité du calcul diff. et du calcul int. T. II. Chap. V. Mémoires de Paris. 1784. Mémoires de Berlin 1774.

Einschalten oder Interpoliren ist eine in jeder Beziehung, besonders aber für alle Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften überaus wichtige Methode, welche im Allgemeinen den Zweck hat: wenn mehrere, bestimmten Werthen der unabhängigen veränderlichen Größe entsprechende, Werthe einer ihrer Form nach unbekannten Function gegeben sind, eine Function zu finden, deren Werthe für dieselben Werthe der unabhängigen veränderlichen Größe den gegebenen Werthen der unbekannten Function gleich sind. Daß diese Methode für alle Naturwissenschaften, besonders auch für die Auffindung allgemeiner Naturgesetze sehr wichtig ist, läßt sich leicht erläutern. Seyen nämlich überhaupt x und z zwei in der Natur vorkommende Größen, die in einer gegenseitigen Abhängigkeit von einander stehen. Das allgemeine Gesetz dieser Abhängigkeit sey unbekannt, man kenne aber eine gewisse Anzahl specieller durch Beobachtung gefundener zusammen stimmender Werthe von x und y, die wir durch

$$x_1, y_1,\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;\ x_4, y_4;\ \ldots\ x_n, y_n$$

bezeichnen wollen. Läßt sich nun die Form einer Function fx von x so bestimmen, daß

$$fx_1 = y_1,\ fx_2 = y_2,\ fx_3 = y_3,\ fx_4 = y_4,\ \ldots\ fx_n = y_n$$

ist; so wird offenbar durch die Function $fx = y$ das allgemeine Gesetz der Abhängigkeit der Größen x und y von einander mit desto größerer Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden, je größer die Anzahl der gegebenen einander entsprechenden Werthe von x und y ist. Zugleich wird diese Wahrscheinlichkeit augenscheinlich erhöhet, wenigstens für den zwischen den Gränzen $x = x_1$

und $x = x_n$ liegenden Theil der unbekannten Function, wenn dieselbe zwischen den angegebenen Gränzen continuirlich ist, und die einzelnen gegebenen Werthe recht nahe bei einander, in einer möglichst stetigen Folge liegen. Daß mehr als Wahrscheinlichkeit auf diesem Wege nie zu erreichen ist, versteht sich von selbst; es ist aber auch bloß von einer empirischen Auffindung von Naturgesetzen die Rede, und es kommt hauptsächlich darauf an, die Wahrscheinlichkeit durch Vervielfältigung der Beobachtungen möglichst zu erhöhen. Das Einschalten ist von der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate (s. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 77.) wesentlich verschieden, indem bei letzterer ein Naturgesetz schon als bekannt und durch eine allgemeine Formel dargestellt angenommen wird, wo nun in dieser Formel jederzeit neben der unabhängigen veränderlichen Größe x noch gewisse constante Größen, die also für alle Werthe von x ungeändert bleiben, vorkommen werden; und eben diese constanten Größen aus gegebenen numerischen Resultaten guter Beobachtungen mit der größten Wahrscheinlichkeit völliger Richtigkeit zu bestimmen, ist der Zweck der Methode der kleinsten Quadrate, worüber man in dem angeführten Artikel weitere Belehrung suchen muß.

Die obigen allgemeinen Bemerkungen über das Einschalten gewinnen an Anschaulichkeit, wenn man sie an eine einfache geometrische Betrachtung knüpft. Man kann sich nämlich die Werthe von x als Abscissen, die entsprechenden Werthe von y als Ordinaten einer ebenen Curve denken, und das allgemeine Problem der Interpolation fällt dann mit der geometrischen Aufgabe zusammen: durch eine gewisse Anzahl, z. B. n, gegebene Punkte eine Curve zu ziehen, oder die Gleichung einer Curve zu finden, welche durch n gegebene Punkte geht. Hieraus geht auch, wie es uns scheint, am deutlichsten hervor, daß das Einschalten im Allgemeinen eine unbestimmte Aufgabe ist, indem durch n gegebene Punkte offenbar unendlich viele eben so vielen bestimmten Gesetzen unterworfene Curven gezogen werden können. Nur wenn man die Aufgabe noch gewissen besondern Bedingungen unterwirft, kann dieselbe, wie wir nachher sehen werden, eine bestimmte werden. Für jetzt wollen wir das Problem in seinem obigen allgemeinsten Sinne nehmen.

Noch ist zu bemerken, daß der Name Einschalten oder Interpoliren einer eingeschränktern Ansicht der Sache seine Entstehung verdankt. Denkt man sich nämlich die unbekannte Function $y = fx$ als das allgemeine Glied einer Reihe, so sind die gegebenen Werthe $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$ Glieder dieser Reihe, welche den Stellenzahlen $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$, die freilich bei dieser Ansicht der Sache streng genommen nur als positive ganze Zahlen gedacht werden können, entsprechen, und die Interpolation verlangt nun, die Glieder der in Rede stehenden Reihe zu finden oder in diese Reihe einzuschalten, welche den in der Reihe $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ noch fehlenden Stellen-

zahlen entsprechen, wenigstens mit so großer Wahrscheinlichkeit oder annähernder Richtigkeit, als möglich. Man sieht aber leicht, daß dieses Problem nur auf die Weise zur Lösung gebracht werden kann, daß man die Form der unbekannten Function $y = fx$ so bestimmt, daß dieselbe, indem man dem x nach und nach die Werthe $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ beilegt, respective die Werthe $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$ erhält, wodurch wir von selbst wieder auf die gleich im Eingange ausgesprochene allgemeinere Ansicht zurückgeführt werden. Auch sollte hier bloß die Entstehung der Benennung Einschalten erläutert werden.

Daß übrigens die gesuchte Function, wie nachher mit Mehrerem gezeigt werden wird, auch von mehr als einer unabhängigen veränderlichen Größe abhängen kann, daß aber auch in diesem Falle die obigen Bemerkungen im Allgemeinen keine Aenderung erleiden, erhellet leicht. Nur mag noch bemerkt werden, daß bei zwei unabhängigen veränderlichen Größen, für $y = f(x, z)$, diese Function, wenn man die Aufgabe mit einer geometrischen Betrachtung in Verbindung bringt, nun nicht mehr einer krummen Linie, sondern einer krummen Fläche entspricht.

1. Durch die oft in Anwendung kommende Annahme, daß die gegebenen Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x, welchen die ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

von y entsprechen, in gleichen Abständen von einander liegen, oder, was dasselbe sagt, daß die in Rede stehenden Werthe von x eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, ist uns der einfachste Fall der Interpolation gegeben.

Zu der Formel, welche zu der Auflösung dieses Falls gewöhnlich gebraucht wird, gelangt man am einfachsten durch ein ganz elementares Verfahren auf folgende Art. Man lasse in der ihrer Form nach unbekannten Function fx die unabhängige veränderliche Größe x sich um die willkührliche Größe $\varkappa$ verändern, so erhellet augenblicklich die Richtigkeit der folgenden identischen Gleichung:

$$f(x+\varkappa) = fx + \varkappa \cdot \frac{f(x+\varkappa) - fx}{\varkappa},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{f(x+\varkappa) - fx}{\varkappa} = \varphi x$$

setzt, der Gleichung:

$$1.\quad f(x+\varkappa) = fx + \varkappa\varphi x.$$

In dieser Gleichung setze man $x + \alpha$ für x und zugleich $\varkappa - \alpha$ für $\varkappa$, so daß $x + \varkappa$ seinen Werth nicht ändert; so erhält man

$$f(x+\varkappa) = f(x+\alpha) + (\varkappa-\alpha)\varphi(x+\alpha),$$

und, wenn man hiervon die Gleichung (1.) abzieht:

$$0 = f(x+\alpha) - fx + (\varkappa-\alpha)\varphi(x+\alpha) - \varkappa\varphi x,$$

oder

$$0 = f(x+\alpha) - fx + (\varkappa-\alpha)\{\varphi(x+\alpha) - \varphi x\} - \alpha\varphi x,$$

oder in bekannter Bezeichnung, indem wir immer $\Delta x = \alpha$ setzen:

2. $0 = \Delta fx + (\varkappa-\alpha)\Delta\varphi x - \alpha\varphi x.$

In dieser Gleichung setze man wieder $x+\alpha$ für x, $\varkappa-\alpha$ für $\varkappa$; so wird

$$0 = \Delta f(x+\alpha) + (\varkappa-2\alpha)\Delta\varphi(x+\alpha) - \alpha\varphi(x+\alpha),$$

und, wenn man hiervon die Gleichung (2.) abzieht:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta f(x+\alpha) - \Delta fx \\ &\quad + (\varkappa-2\alpha)\Delta\varphi(x+\alpha) - (\varkappa-\alpha)\Delta\varphi x \\ &\quad - \alpha\{\varphi(x+\alpha) - \varphi x\} \\ &= \Delta f(x+\alpha) - \Delta fx \\ &\quad + (\varkappa-2\alpha)\{\Delta\varphi(x+\alpha) - \Delta\varphi x\} - \alpha\Delta\varphi x \\ &\quad - \alpha\{\varphi(x+\alpha) - \varphi x\}, \end{aligned}$$

d. i.

3. $0 = \Delta^2 fx + (\varkappa-2\alpha)\Delta^2\varphi x - 2\alpha\Delta\varphi x.$

Setzt man hierin wieder $x+\alpha$ für x, $\varkappa-\alpha$ für $\varkappa$; so wird

$$0 = \Delta^2 f(x+\alpha) + (\varkappa-3\alpha)\Delta^2\varphi(x+\alpha) - 2\alpha\Delta\varphi(x+\alpha),$$

und wenn man die Gleichung (3.) abzieht:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^2 f(x+\alpha) - \Delta^2 fx \\ &\quad + (\varkappa-3\alpha)\Delta^2\varphi(x+\alpha) - (\varkappa-2\alpha)\Delta^2\varphi x \\ &\quad - 2\alpha\{\Delta\varphi(x+\alpha) - \Delta\varphi x\} \\ &= \Delta^2 f(x+\alpha) - \Delta^2 fx \\ &\quad + (\varkappa-3\alpha)\{\Delta^2\varphi(x+\alpha) - \Delta^2\varphi x\} - \alpha\Delta^2\varphi x \\ &\quad - 2\alpha\{\Delta\varphi(x+\alpha) - \Delta\varphi x\}, \end{aligned}$$

d. i.

4. $0 = \Delta^3 fx + (\varkappa-3\alpha)\Delta^3\varphi x - 3\alpha\Delta^2\varphi x.$

Auf diese Gleichung dasselbe Verfahren angewandt, erhält man nach und nach:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^3 f(x+\alpha) + (\varkappa-4\alpha)\Delta^3\varphi(x+\alpha) - 3\alpha\Delta^2\varphi(x+\alpha) \\ 0 &= \Delta^3 f(x+\alpha) - \Delta^3 fx \\ &\quad + (\varkappa-4\alpha)\Delta^3\varphi(x+\alpha) - (\varkappa-3\alpha)\Delta^3\varphi x \\ &\quad - 3\alpha\{\Delta^2\varphi(x+\alpha) - \Delta^2\varphi x\} \\ &= \Delta^3 f(x+\alpha) - \Delta^3 fx \\ &\quad + (\varkappa-4\alpha)\{\Delta^3\varphi(x+\alpha) - \Delta^3\varphi x\} - \alpha\Delta^3\varphi x \\ &\quad - 3\alpha\{\Delta^2\varphi(x+\alpha) - \Delta^2\varphi x\}, \end{aligned}$$

d. i.

5. $0 = \Delta^4 fx + (\varkappa-4\alpha)\Delta^4\varphi x - 4\alpha\Delta^3\varphi x.$

Wie man so weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und man hat folglich aus diesen Gleichungen nach und nach:

$$f(x+z) = fx + z\varphi x,$$

$$\varphi x = \frac{\Delta fx}{\alpha} + \frac{z-\alpha}{\alpha}\Delta\varphi x,$$

$$\Delta\varphi x = \frac{\Delta^2 fx}{2\alpha} + \frac{z-2\alpha}{2\alpha}\Delta^2\varphi x,$$

$$\Delta^2\varphi x = \frac{\Delta^3 fx}{3\alpha} + \frac{z-3\alpha}{3\alpha}\Delta^3\varphi x,$$

. . . . . .

$$\Delta^{n-2}\varphi x = \frac{\Delta^{n-1} fx}{(n-1)\alpha} + \frac{z-(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\Delta^{n-1}\varphi x,$$

$$\Delta^{n-1}\varphi x = \frac{\Delta^n fx}{n\alpha} + \frac{z-n\alpha}{n\alpha}\Delta^n\varphi x;$$

folglich durch successive Substitution:

$$f(x+z) = fx + \frac{z}{\alpha}\Delta fx + \frac{z(z-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 fx + \frac{z(z-\alpha)(z-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3 fx + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z(z-\alpha)\ldots(z-(n-1)\alpha)}{2.3.4\ldots n\alpha^n}\Delta^n fx + \frac{z(z-\alpha)\ldots(z-n\alpha)}{2.3.4\ldots n\alpha^n}\Delta^n\varphi x.$$

Für $z = n\alpha$ wird

$$f(x+z) = fx + \frac{z}{\alpha}\Delta fx + \frac{z(z-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 fx + \frac{z(z-\alpha)(z-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3 fx + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z(z-\alpha)\ldots(z-(n-1)\alpha)}{2.3.4\ldots n\alpha^n}\Delta^n fx.$$

Das obige einfache Verfahren, durch welches wir zu dieser Formel gelangt sind, haben wir von Crelle (Journal der Math. B. VII. S. 277.), und dieser wieder dem Wesentlichen nach von Servois entlehnt.

Diese Formel wollen wir nun auf das Interpolations-Problem anwenden. Bezeichnet man die constante Differenz der gegebenen arithmetischen Reihe erster Ordnung

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

durch α, und setzt $x = x_1$, so ist für $z = (n-1)\alpha$:

$$f(x_1+z) = fx_1 + \frac{z}{\alpha}\Delta fx_1 + \frac{z(z-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2 fx_1 + \frac{z(z-\alpha)(z-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\Delta^3 fx_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z(z-\alpha)\ldots(z-(n-2)\alpha)}{2.3.4\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\Delta^{n-1} fx_1,$$

oder, weil nach bekannten Formeln des Differenzen-Calculs aus der gegebenen Reihe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

sogleich

$$\begin{aligned} fx_1 &= y_1 \\ \Delta fx_1 &= y_2 - y_1 \\ \Delta^2 fx_1 &= y_3 - 2y_2 + y_1 \\ \Delta^3 fx_1 &= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 \end{aligned}$$

. . . . . .

$$\Delta^{n-1} fx_1 = y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} - \ldots \mp \frac{n-1}{1} y_2 \pm y_1$$

folgt:

$$\begin{aligned} f(x_1 + z) = {} & y_1 \\ & + \frac{z}{a}\{y_2 - y_1\} \\ & + \frac{z(z-a)}{2a^2}\{y_3 - 2y_2 + y_1\} \\ & + \frac{z(z-a)(z-2a)}{2.3a^3}\{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\} \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \frac{z(z-a)..(z-(n-2)a)}{2.3.4..(n-1)a^{n-1}}\left\{y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} \ldots \pm y_1\right\} \end{aligned}$$

für $z = (n-1)a$. Da für

$$z = 0, a, 2a, 3a, \ldots, (n-1)a$$

offenbar

$$x_1 + z = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n ,$$

also

$$\begin{aligned} f(x_1 + z) &= fx_1, fx_2, fx_3, fx_4, \ldots . fx_n \\ &= y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n \end{aligned}$$

ist, so sieht man, daß aus dem Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_n$$

erhalten werden, wenn man in demselben respective

$$z = 0, a, 2a, 3a, \ldots . (n-1)a$$

setzt. Setzt man aber überhaupt $x_1 + z = x$, $z = x - x_1$; so wird

$$\begin{aligned} fx = {} & y_1 \\ & + \frac{x - x_1}{a}\{y_2 - y_1\} \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_1-a)}{2a^2}\{y_3 - 2y_2 + y_1\} \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_1-a)(x-x_1-2a)}{2.3a^3}\{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\} \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_1-a)..(x-x_1-(n-2)a)}{2.3.4..(n-1)a^{n-1}}\left\{y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y_{n-2} \ldots \pm y_1\right\} \end{aligned}$$

Für

$$x = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots (n-1)\alpha$$

ist

$$x - x_1 = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots (n-1)\alpha ,$$

$$x = x_1, x_1 + \alpha, x_1 + 2\alpha, x_1 + 3\alpha, \ldots x_1 + (n-1)\alpha ,$$

d. i.

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n ,$$

woraus nun, in Verbindung mit dem Vorhergehenden auf der Stelle folgt, daß die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung eine Function von x ist, deren Werthe für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

die gegebenen Größen

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

sind, und daß folglich durch diese Function wirklich den Bedingungen der Interpolations-Aufgabe in dem vorliegenden Falle genügt wird.

Für besondere Anwendungen bedarf die obige allgemeine Formel, wenn sich nach ihr mit Bequemlichkeit rechnen lassen soll, gewöhnlich auch einer besondern Einrichtung. Obgleich eigentlich Anwendungen hier nicht zu unserm Zweck gehören, so mag doch das folgende aus der Astronomie entlehnte Beispiel zur Erläuterung dienen. Kennt man nämlich die gerade Aufsteigung (Declination, Länge, Breite) des Monds von 12 zu 12 Stunden, so kann verlangt werden, die gerade Aufsteigung desselben für einen mittlern Zeitpunkt, den wir durch t bezeichnen wollen, zu finden. Der Einfachheit wegen wollen wir bloß bis zu den dritten Differenzen gehen, und die gesuchte der Zeit t entsprechende Rectascension selbst jetzt durch x bezeichnen. Man erhält also aus der allgemeinen Formel in diesem Falle, wenn wir der Kürze wegen, indem y_1, y_2, y_3, y_4 die gegebenen Rectascensionen des Monds bezeichnen,

$$y_2 - y_1 = \Delta_1,\ y_3 - 2y_2 + y_1 = \Delta_2,\ y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 = \Delta_3$$

setzen:

$$x = y_1 + \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{t(t-12)}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{t(t-12)(t-24)}{2.3.12^3}\Delta_3 ,$$

wo man nur zu bemerken hat, daß die Zeit t von dem Zeitpunkte an gerechnet wird, welchem die gegebene Rectascension y_1 entspricht. Ist Δ die Correction, welche an der bekannten Rectascension y_1 angebracht werden muß, um x zu erhalten, so ist $x = y_1 + \Delta$, $x - y_1 = \Delta$, also

$$\Delta = \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{t(t-12)}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{t(t-12)(t-24)}{2.3.12^3}\Delta_3 ,$$

oder, wenn man nach Potenzen von $\frac{t}{12}$ entwickelt:

$$\Delta = A\frac{t}{12} + B\left(\frac{t}{12}\right)^2 + C\left(\frac{t}{12}\right)^3 ,$$

wo

$$A = \Delta_1 - \tfrac{1}{2}\Delta_2 + \tfrac{1}{3}\Delta_3 ,$$
$$B = \tfrac{1}{2}\Delta_2 - \tfrac{1}{2}\Delta_3 ,$$
$$C = \tfrac{1}{6}\Delta_3$$

ist.

Liegt die Rectascension x, wie dies bei wirklichen Anwendungen gewöhnlich der Fall ist, zwischen y_2 und y_3, und rechnet man die Zeit von dem Zeitpunkte an, dem die Rectascension y_2 entspricht, so muß man in unserer obigen Formel $t + 12$ statt t setzen. Dies giebt

$$\Delta = \frac{t+12}{12}\Delta_1 + \frac{(t+12)\,t}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{(t+12)\,t\,(t-12)}{2.3.12^3}\Delta_3 .$$

Ist nun $x = y_2 + \delta$, so daß δ die an der Rectascension y_2 anzubringende Correction ist, um x zu finden; so ist $y_2 + \delta = y_1 + \Delta$, $y_2 - y_1 = \Delta - \delta$, d. i. $\Delta_1 = \Delta - \delta$, und folglich

$$\Delta = \Delta - \delta + \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{(t+12)\,t}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{(t+12)\,t\,(t-12)}{2.3.12^3}\Delta_3 ,$$

oder

$$\delta = \frac{t}{12}\Delta_1 + \frac{(t+12)\,t}{2.12^2}\Delta_2 + \frac{(t+12)\,t\,(t-12)}{2.3.12^3}\Delta_3 ,$$

oder, wenn man wieder nach Potenzen von $\frac{t}{12}$ entwickelt:

$$\delta = a\frac{t}{12} + b\left(\frac{t}{12}\right)^2 + c\left(\frac{t}{12}\right)^3 ,$$

wo

$$a = \Delta_1 + \tfrac{1}{2}\Delta_2 - \tfrac{1}{6}\Delta_3 ,$$
$$b = \tfrac{1}{2}\Delta_2 ,$$
$$c = \tfrac{1}{6}\Delta_3 .$$

Francoeur drückt in seiner Astronomie pratique. Paris. 1830. p. 100. die Formel für δ anders aus, jedoch, wie es uns scheint, ohne besondern Vortheil für die Rechnung. Aus den gegebenen Rectascensionen erhält man nämlich leicht folgende Differenzen:

$$\begin{array}{l|l|l|l} y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - 2y_2 + y_1 & y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 \\ y_2 & y_3 - y_2 & y_4 - 2y_3 + y_2 & \\ y_3 & y_4 - y_3 & & \\ y_4 & & & \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich

$$a = -\tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + y_3 - \tfrac{1}{6}y_4 ,$$
$$b = \tfrac{1}{2}y_1 - y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 ,$$

Bezeichnet man nun die zweite der drei ersten Differenzen durch Δ und den vierten Theil der Summe der beiden zweiten Differenzen durch φ; so findet man

$$\Delta - \varphi + \tfrac{1}{12}\Delta_3 = -\tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + y_3 - \tfrac{1}{6}y_4 ,$$
$$\varphi - \tfrac{1}{2}\Delta_3 = \tfrac{1}{4}y_1 - y_2 + \tfrac{1}{4}y_3 ,$$

und es ist folglich auch

$$a = \Delta - \varphi + \tfrac{1}{12}\Delta_3 ,$$
$$b = \varphi - \tfrac{1}{2}\Delta_3 ,$$
$$c = \tfrac{1}{6}\Delta_3 ;$$

welches die von Francoeur a. a. O. gegebenen Ausdrücke sind, die uns aber, wie schon erinnert, vor unsern obigen Formeln keine wesentlichen Vorzüge zu haben scheinen.

Um z. B. wie bei Francoeur a. a. O. die Rectascension des Monds den 13. Mai 1831 um $9^h\ 17'\ 18''$ zu finden, nimmt man aus der Conn. des Tems die Rectascensionen des Monds

y_1 für den 12. Mai Mitternacht,
y_2 für den 13. Mai Mittag,
y_3 für den 13. Mai Mitternacht,
y_4 für den 14. Mai Mittag,

und sucht die Differenzen; so hat man folgende Rechnung:

64° 41′ 4″			
72. 31. 8	+ 7° 50′ 4″		
80. 23. 54	+ 7. 52. 46	+ 2′ 42″	
88. 16. 43	+ 7. 52. 49	+ 0. 3	− 2′ 39″

$a = +\ 7^\circ\ 50'\ 4''$ $b = 1'\ 21''$ $c = -\ 26'',5$

$+\quad 1.\ 21$

$+\quad 26,5$

$7.\ 51.\ 51,5$

Denkt man sich nun die Zeit $t = 9^h\ 17'\ 18''$ in Secunden ausgedrückt, so muß man sich natürlich auch $\alpha = 12^h$ in Secunden ausgedrückt denken. In unserer Formel sind

$$\text{cd log. } a = 5{,}3645163$$
$$\text{cd log. } a^2 = 0{,}72903$$
$$\text{cd log. } a^3 = 6{,}09355 - 10$$

constante Größen, und können bei jeder Rechnung dieser Art gebraucht werden. Bemerkt man nun, daß alle folgende Zahlen Logarithmen oder dekadische Complemente sind, so erhält die Rechnung am besten folgende Form:

Const. . . .	5,3645163	0,72903	6,09355 — 10
t.	4,5242403	t^2. . . 9,04848	t^3. . . 13,57272
a.	4,4519629	b. . . 1,90849	c. . . 1,42325
	4,3407195	1,68600	1,08952

$$\delta = \begin{cases} + 6^\circ\,5'\,13'',89 & + 48'',53 & - 12'',29 \\ + 48,53 & & \\ - 12,29 & & \end{cases}$$

72. 31. 8,00

$78^\circ\,36'\,58'',13$ = AR ☾ 13. Mai 1831 um $9^h\,17'\,18''$

In Bezug auf die oben für $f(x+z)$ entwickelte allgemeine Reihe bemerken wir nur noch, daß dieselbe für jedes z, α und n gilt, aber nur dann in's Unendliche fortgesetzt, oder als eine sogenannte unendliche Reihe betrachtet werden kann, wenn die Größe

$$\frac{z(z-\alpha)\ldots(z-n\alpha)}{2.\ 3.\ 4\ldots n\alpha^n}\Delta^n\varphi x,$$

wo

$$\varphi x = \frac{f(x+z)-fx}{z}$$

ist, für $n = \infty$ verschwindet. Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand, die mit der Lehre von der Convergenz der Reihen genau zusammenhängen, gehören aber jetzt nicht hierher, indem es uns hier bloß auf die Entwickelung der obigen Interpolations-Formel ankam.

2. Daß das Interpolations-Problem im Allgemeinen eine unbestimmte Aufgabe ist, ist schon oben bemerkt worden. Nur durch Hinzufügung besonderer Bedingungen wird dieselbe bestimmt, und wir wollen uns daher jetzt einmal folgende Aufgabe vorlegen:

Man soll eine ganze algebraische Function $y = fx$ des $(n-1)$ten Grades von solcher Beschaffenheit finden, daß dieselbe, wenn man ihrer unabhängigen veränderlichen Größe x nach und nach die beliebigen, aber gegebenen Werthe $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ beilegt, respective die ebenfalls gegebenen Werthe $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$ liefert.

Wir nehmen jetzt nicht mehr, wie vorher, an, daß die Werthe $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ der besondern Bedingung, eine arithmetische Reihe erster Ordnung zu bilden, unterworfen sind; sondern diese Größen können ganz beliebige seyn, und die Aufgabe wird vielmehr dadurch zu einer bestimmten Aufgabe gemacht, wie wir nachher sehen werden, daß man annimmt, daß die gesuchte Function eine ganze algebraische Function vom $(n-1)$ten Grade, oder eine aus gerade so vielen Gliedern, als zusammenstimmende Werthe von x und y gegeben sind, bestehende ganze algebraische Function seyn soll. Daß $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ als sämmtlich unter einander ungleich zu betrachten sind, versteht sich von selbst. Bevor wir zu der Auflösung der Aufgabe selbst übergehen,

beweisen wir, um den Zusammenhang nicht durch Verweisung auf andere Artikel dieses Wörterbuchs zu unterbrechen, folgende Sätze.

3. Wenn eine ganze algebraische Function von x für $x=x_0$ verschwindet, so ist sie durch $x-x_0$ algebraisch ohne Rest theilbar.

Die gegebene Function sey

$$X = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + a_2 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2} x + a_{m-1} ,$$

so ist nach der Voraussetzung

$$0 = a_0 x_0^{m-1} + a_1 x_0^{m-2} + a_2 x_0^{m-3} + \ldots + a_{m-2} x_0 + a_{m-1} ,$$

und folglich, wenn man subtrahirt

$$X = a_0 (x^{m-1} - x_0^{m-1}) + a_1 (x^{m-2} - x_0^{m-2}) + \ldots + a_{m-2} (x - x_0) .$$

Weil nun, wie sehr leicht gezeigt werden kann, die Differenzen

$$x^{m-1} - x_0^{m-1},\ x^{m-2} - x_0^{m-2},\ x^{m-3} - x_0^{m-3},\ \ldots,\ x - x_0$$

sämmtlich durch $x-x_0$ algebraisch theilbar sind, so ist auch X durch $x-x_0$ algebraisch theilbar, und der Quotient ist, wie ebenfalls auf der Stelle erhellet, eine ganze algebraische Function des $(m-2)$ten Grades.

4. Wenn eine ganze algebraische Function von x verschwindet, wenn man für x irgend einen der sämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

setzt, so ist diese Function durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots (x-x_n)$$

algebraisch theilbar.

Die gegebene Function sey X, so ist, da X für $x=x_1$ verschwindet, nach (3.)

$$X = (x-x_1) X_1 ,$$

wo X_1 eine ganze algebraische Function von x ist. X verschwindet aber nach der Voraussetzung auch für $x=x_2$. Also verschwindet auch das Product $(x-x_1)X_1$ für $x=x_2$. Da aber nach der Voraussetzung x_1 und x_2 ungleich sind, so verschwindet der Factor $x-x_1$ nicht für $x=x_2$, und es muß folglich der andere Factor X_1 für $x=x_2$ verschwinden, so daß also nach (3.)

$$X_1 = (x-x_2) X_2$$

ist, wo wieder X_2 eine ganze algebraische Function bezeichnet. Daher ist nun

$$X = (x-x_1)(x-x_2) X_2 .$$

X verschwindet aber nach der Voraussetzung auch für $x=x_3$, und, weil x_1, x_2, x_3 unter einander ungleich sind, so verschwindet keiner der beiden Factoren $x-x_1$, $x-x_2$ für $x=x_3$; also muß X_2 für $x=x_3$ verschwinden, und folglich nach (3.)

$$X_2 = (x - x_3) X_3$$

seyn, wo wieder X_3 eine ganze algebraische Function von x ist. Also ist

$$X = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) X_3 ,$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und die Richtigkeit unseres Satzes wird hier schon in völliger Allgemeinheit erhellen.

5. Wenn zwei ganze algebraische Functionen ein und derselben unabhängigen veränderlichen Größe für mehrere Werthe dieser veränderlichen Größe, deren Anzahl größer ist als der Grad jeder der beiden Functionen, gleiche Werthe erhalten; so sind diese beiden Functionen identisch, d. h. für jeden Werth der unabhängigen veränderlichen Größe einander gleich.

Die beiden Functionen seyen φx, ψx, und erhalten für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

gleiche Werthe. n ist größer als der Grad jeder der beiden Functionen. Wäre nun nicht identisch, d. h. für jeden Werth von x, $\varphi x = \psi x$; so wäre

$$\varphi x - \psi x$$

eine ganze algebraische Function von x, die nicht identisch $=0$ ist, und der Grad dieser Function wäre offenbar nach dem Obigen kleiner als n. Nach der Voraussetzung erhalten aber φx und ψx für $x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ gleiche Werthe, d. h. die Function

$$\varphi x - \psi x$$

verschwindet für $x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$, und ist folglich durch

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) ,$$

d. h. durch eine ganze algebraische Function des nten Grades theilbar (4.), welches ungereimt ist, da der Grad der Function $\varphi x - \psi x$, wie wir wissen, kleiner als n ist. Daher ist unsere obige Annahme falsch, und folglich identisch $\varphi x = \psi x$, w. z. b. w.

6. Aus diesem Lehrsatze folgt unmittelbar, daß jede ganze Function y des $(n-1)$ten Grades von x vollständig bestimmt ist, wenn man die den Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x entsprechenden Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

kennt, weil alle ganze algebraische Functionen des $(n-1)$ten Grades, welche für die obigen Werthe von x die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

erhalten, da die Anzahl dieser Werthe größer als $n-1$ ist, nach (5.) mit der Function y identisch sind. Kann man also

nur eine ganze algebraische Function des $(n-1)$ten Grades von x finden, welche für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

erhält; so ist dadurch die gesuchte Function y überhaupt gefunden, und unsere Aufgabe also im Allgemeinen aufgelöst.

Um nun eine Function von der angegebenen Beschaffenheit zu finden, verfährt man sehr einfach auf folgende Art. Wir suchen zunächst eine Function, welche für

$$x = x_1, x_2, \ldots x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa+1}, \ldots x_n$$

verschwindet, und für $x = x_\varkappa$ den Werth $y_\varkappa$ erhält, immer, wie sich nach dem Obigen von selbst versteht, unter der Bedingung, daß diese Function eine ganze algebraische Function des $(n-1)$ten Grades seyn soll. Die gesuchte Function sey $u_\varkappa$, so ist nach (4.) diese Function durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n)$$

theilbar, also

$$u_\varkappa = K(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n).$$

Da $u_\varkappa$ vom $(n-1)$ten Grade, und das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n)$$

offenbar von demselben Grade ist, so kann K nur eine constante Größe seyn, die sich auch auf folgende Art sehr leicht bestimmen läßt. Nach der Annahme soll nämlich $u_\varkappa$ für $x = x_\varkappa$ den Werth $y_\varkappa$ erhalten. Daher ist

$$y_\varkappa = K(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots(x_\varkappa-x_n),$$

$$K = \frac{y_\varkappa}{(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots(x_\varkappa-x_n)},$$

und folglich

$$u_\varkappa = y_\varkappa \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots(x-x_n)}{(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots(x_\varkappa-x_n)},$$

wodurch also $u_\varkappa$ gefunden ist. Bezeichnen nun

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n$$

sämmtlich ganze algebraische Functionen des $(n-1)$ten Grades welche respective

für $x = x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ verschwinden, für $x = x_1$ aber $= y_1$;
für $x = x_1, x_3, x_4, \ldots x_n$ verschwinden, für $x = x_2$ aber $= y_2$;
für $x = x_1, x_2, x_4, \ldots x_n$ verschwinden, für $x = x_3$ aber $= y_3$;

. . . . . .

für $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ verschwinden, für $x = x_n$ aber $= y_n$

werden; so ist

$$u_1 = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots(x_1-x_n)},$$

$$u_2 = y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots(x_2-x_n)},$$

$$u_3 = y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots(x_3-x_n)},$$

$$u_4 = y_4 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)\ldots(x_4-x_n)},$$

u. s. f. u. s. f.

$$u_n = y_n \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Eine ganze algebraische Function des $(n-1)$ten Grades, welche den Bedingungen, für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

zu erhalten, sämmtlich genügt, ist offenbar

$$= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
y = {} & y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots(x_1-x_n)} \\
& + y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots(x_2-x_n)} \\
& + y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots(x_3-x_n)} \\
& + y_4 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)\ldots(x_4-x_n)} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + y_n \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots(x_n-x_{n-1})},
\end{aligned}$$

und also durch diese höchst allgemeine und merkwürdige, von Lagrange zuerst gefundene, Interpolationsformel unser Problem vollständig aufgelöst. Auch ist nach der vorhergehenden Theorie diese an sich, selbst empirisch, sehr leicht zu construirende Formel die einzige, durch welche das Problem zur Lösung gebracht wird.

M. s. über diese Formel auch einen Aufsatz von Dirksen in Crelles Journal Bd. I. S. 122. Cauchy Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. T. I. Paris 1821. p. 85. und p. 525.

7. Seyen jetzt $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei beliebige ganze algebraische Functionen von x und y, welche beide sowohl in Bezug auf x, als auch in Bezug auf y vom $(n-1)$ten Grade sind. Ferner seyen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

und

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

zwei Reihen bekannter Werthe von x und y. Erhalten nun die

beiden Functionen gleiche Werthe, wenn man für ihre veränderlichen Größen zwei beliebige Glieder dieser Reihen setzt, so ist identisch $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

$\varphi(x_1, y)$ und $\psi(x_1, y)$ sind nach der Voraussetzung zwei ganze algebraische Functionen des $(n-1)$ten Grades von y, welche gleiche Werthe erhalten, wenn man

$$y = y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

setzt. Daher ist nach (5.) identisch

$$\varphi(x_1, y) = \psi(x_1, y)$$

und ganz eben so ist identisch

$$\varphi(x_2, y) = \psi(x_2, y),$$
$$\varphi(x_3, y) = \psi(x_3, y),$$
$$\varphi(x_4, y) = \psi(x_4, y),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(x_n, y) = \psi(x_n, y).$$

Betrachtet man nun y als constant, so folgt hieraus, daß für jeden beliebigen constanten Werth von y die beiden ganzen algebraischen Functionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ in Bezug auf x als veränderliche Größe für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

gleiche Werthe erhalten, und also für jeden beliebigen constanten Werth von y in Bezug auf x identisch, d. h. für jeden beliebigen Werth von x, nach (5).

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y)$$

ist. Daher ist also für jeden beliebigen constanten Werth von y und für jeden beliebigen constanten Werth von x, d. h. in Bezug auf x und y als veränderliche Größen identisch,

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y),$$

wie behauptet wurde. Auch würde sich dieses Theorem auf ähnliche Art, wie das in (5.) bewiesene Theorem für Functionen einer veränderlichen Größe, leicht verallgemeinern lassen.

Unmittelbar ergiebt sich nun aber wieder hieraus, daß, wenn $\varphi(x, y)$ eine ganze algebraische Function bezeichnet, welche in Bezug auf jede der beiden veränderlichen Größen vom $(n-1)$ten Grade ist, diese Function jederzeit völlig bestimmt seyn wird, wenn man die besondern Werthe kennt, welche diese Function erhält, indem man für x und y zwei beliebige Glieder der beiden Reihen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

und

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

setzt.

Wir wollen jetzt also wieder annehmen, daß die Werthe einer ganzen algebraischen Function des $(n-1)$ten Grades zweier ver-

änderlicher Größen, welche diese Function erhält, indem man für ihre veränderlichen Größen irgend zwei Glieder der beiden obigen Reihen setzt, gegeben seyen, und wollen nun diese Function selbst zu bestimmen suchen, da wir durch die vorhergehende Theorie belehrt worden sind, daß diese Bestimmung nur auf eine Art möglich seyn kann, und folglich unsere Aufgabe eine bestimmte ist. Bezeichnen wir nun wieder die gesuchte Function, welche also eine ganz bestimmte Form hat, durch $\varphi(x, y)$; so ist, da dieselbe für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

respective die Werthe

$$\varphi(x_1, y), \varphi(x_2, y), \varphi(x_3, y), \varphi(x_4, y), \ldots \varphi(x_n, y)$$

erhält, nach (6.)

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)} \cdot \varphi(x_1, y) \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)} \cdot \varphi(x_2, y) \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n)} \cdot \varphi(x_3, y) \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})} \cdot \varphi(x_n, y)
\end{aligned}$$

Weil aber allgemein $\varphi(x_x, y)$ für

$$y = y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

respective die Werthe

$$\varphi(x_x, y_1), \varphi(x_x, y_2), \varphi(x_x, y_3), \varphi(x_x, y_4), \ldots \varphi(x_x, y_n)$$

erhält; so ist nach (6.)

$$\begin{aligned}
\varphi(x_x, y) = {} & \frac{(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)\ldots(y_1-y_n)} \cdot \varphi(x_x, y_1) \\
& + \frac{(y-y_1)(y-y_3)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_2-y_4)\ldots(y_2-y_n)} \cdot \varphi(x_x, y_2) \\
& + \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_3-y_4)\ldots(y_3-y_n)} \cdot \varphi(x_x, y_3) \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_1)(y_n-y_2)(y_n-y_3)\ldots(y_n-y_{n-1})} \cdot \varphi(x_x, y_n)
\end{aligned}$$

Da man hierdurch allgemein $\varphi(x_x, y)$ durch die gegebenen Größen

$$\varphi(x_x, y_1), \varphi(x_x, y_2), \varphi(x_x, y_3) \ldots \varphi(x_x, y_n)$$

ausdrücken kann; so lassen sich also überhaupt

$$\varphi(x_1, y), \varphi(x_2, y), \varphi(x_3, y), \ldots \varphi(x_n, y),$$

und folglich, wenn man nur die nöthigen, übrigens keiner Schwierigkeit unterworfenen Substitutionen gehörig vornimmt, auch die gesuchte Function $\varphi(x, y)$, jederzeit durch die gegebenen Größen ausdrücken.

Hat man z. B. bloß die beiden Reihen

$$x_1, x_2 \text{ und } y_1, y_2 ;$$

so ist zuerst:

$$\varphi(x, y) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \varphi(x_1, y) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \varphi(x_2, y),$$

und ferner:

$$\varphi(x_1, y) = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \cdot \varphi(x_1, y_1) + \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \cdot \varphi(x_1, y_2), \quad \varphi(x_2, y) = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \cdot \varphi(x_2, y_1) + \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \cdot \varphi(x_2, y_2).$$

Also ist

$$\varphi(x, y) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \cdot \varphi(x_1, y_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \cdot \varphi(x_2, y_1) + \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \cdot \varphi(x_1, y_2) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \cdot \varphi(x_2, y_2).$$

Für die beiden Reihen

$$x_1, x_2, x_3 \text{ und } y_1, y_2, y_3$$

hat man zuerst:

$$\varphi(x, y) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot \varphi(x_1, y) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot \varphi(x_2, y) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot \varphi(x_3, y)$$

und ferner:

$$\varphi(x_1, y) = \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \cdot \varphi(x_1, y_1) + \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \cdot \varphi(x_1, y_2) + \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \cdot \varphi(x_1, y_3)$$

$$\varphi(x_2, y) = \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \cdot \varphi(x_2, y_1) + \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \cdot \varphi(x_2, y_2) + \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \cdot \varphi(x_2, y_3)$$

$$\varphi(x_3, y) = \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \cdot \varphi(x_3, y_1) + \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \cdot \varphi(x_3, y_2) + \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \cdot \varphi(x_3, y_3)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \cdot \varphi(x_1, y_1) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \cdot \varphi(x_2, y_1) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \cdot \varphi(x_3, y_1) \\ & + \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \cdot \varphi(x_1, y_2) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \cdot \varphi(x_2, y_2) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \cdot \varphi(x_3, y_2) \\ & + \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \cdot \varphi(x_1, y_3) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \cdot \varphi(x_2, y_3) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \cdot \varphi(x_3, y_3)\end{aligned}$$

Man wird aus diesen Beispielen sehen, wie man sich in allen Fällen zu verhalten hat. Die Ausdehnung der obigen Betrachtungen auf Functionen mit mehr als zwei veränderlichen Größen würde keine Schwierigkeit haben.

8. Wir kehren jetzt wieder zu der wichtigen Formel in (6.) zurück, wollen aber der Kürze und bessern Uebersicht wegen im Folgenden immer annehmen, daß fünf zusammenstimmende Werthe der veränderlichen Größe und der Function gegeben sind. Auch sollen diese Werthe jetzt nicht mehr wie oben durch x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, und y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, sondern durch p, q, r, s, t und P, Q, R, S, T bezeichnet werden. Endlich soll auch der dem Werthe x der veränderlichen Größe entsprechende Werth der Function jetzt nicht mehr, wie oben, durch y, sondern durch X bezeichnet werden, so daß also nach (6.)

$$X = P\frac{(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)} + Q\frac{(x-p)(x-r)(x-s)(x-t)}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)} + R\frac{(x-p)(x-q)(x-s)(x-t)}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)} + S\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-t)}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)} + T\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

ist.

Die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen wird, wenn dieselben auch der Kürze wegen auf fünf gegebene zusammenstimmende Werthe der veränderlichen Größe und der Function eingeschränkt worden sind, doch mit völliger Deutlichkeit erhellen.

9. Zunächst wollen wir den vorigen Ausdruck von X auf eine andere Art entwickeln, indem wir dabei überhaupt den aus n gegebenen zusammenstimmenden Werthen der veränderlichen Größe und der Function hergeleiteten Werth von X durch X_n bezeichnen. Es ist nämlich offenbar

$$X_5 - X_4 = P\left\{\frac{(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)} - \frac{(x-q)(x-r)(x-s)}{(p-q)(p-r)(p-s)}\right\} + Q\left\{\frac{(x-p)(x-r)(x-s)(x-t)}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)} - \frac{(x-p)(x-r)(x-s)}{(q-p)(q-r)(q-s)}\right\} + R\left\{\frac{(x-p)(x-q)(x-s)(x-t)}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)} - \frac{(x-p)(x-q)(x-s)}{(r-p)(r-q)(r-s)}\right\} + S\left\{\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-t)}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)} - \frac{(x-p)(x-q)(x-r)}{(s-p)(s-q)(s-r)}\right\} + T\frac{(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}.$$

Aber

$$\frac{x-t}{p-t} - 1 = \frac{x-p}{p-t},$$

$$\frac{x-t}{q-t} - 1 = \frac{x-q}{q-t},$$

$$\frac{x-t}{r-t} - 1 = \frac{x-r}{r-t},$$

$$\frac{x-t}{s-t} - 1 = \frac{x-s}{s-t},$$

Also nach einer leichten Reduction:

$$X_5 - X_4 = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)} \\ +\dfrac{Q}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)} \\ +\dfrac{R}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)} \\ +\dfrac{S}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)} \\ +\dfrac{T}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)} \end{array}\right\}.$$

Ganz eben so ist

$$X_4 - X_3 = (x-p)(x-q)(x-r)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{(p-q)(p-r)(p-s)} \\ +\dfrac{Q}{(q-p)(q-r)(q-s)} \\ +\dfrac{R}{(r-p)(r-q)(r-s)} \\ +\dfrac{S}{(s-p)(s-q)(s-r)} \end{array}\right\}$$

$$X_3 - X_2 = (x-p)(x-q)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{(p-q)(p-r)} \\ +\dfrac{Q}{(q-p)(q-r)} \\ +\dfrac{R}{(r-p)(r-q)} \end{array}\right\}.$$

Endlich ist auch

$$X_2 = P\frac{x-q}{p-q} + Q\frac{x-p}{q-p},$$

und folglich, wenn man

$$X_1 = P$$

setzt:

$$X_2 - X_1 = (x-p)\left\{\frac{P}{p-q} + \frac{Q}{q-p}\right\}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, wenn man die in { } eingeschlossenen Größen nach der Reihe durch

$$[pqrst],\ [pqrs],\ [pqr],\ [pq]$$

bezeichnet und in der Folge der Kürze wegen Differenzgrößen nennt, sehr leicht:

$$\begin{aligned} X_5 = P &+ (x-p)[pq] + (x-p)(x-q)[pqr] \\ &+ (x-p)(x-q)(x-r)[pqrs] \\ &+ (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)[pqrst], \end{aligned}$$

eine Formel, welche zum Gebrauch offenbar bequemer ist, wie die Formel in (6.)

Wie eine ähnliche Formel überhaupt für X_n construirt werden könnte, bedarf keiner weitern Erläuterung.

10. Um die Bildung der Differenzgrößen recht deutlich zu übersehen, wollen wir zwei von denselben Dimensionen, in denen alle Elemente bis auf eines dieselben sind, von einander abziehen. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
[qrst] - [pqrs] &= \frac{Q}{(q-r)(q-s)(q-t)} - \frac{P}{(p-q)(p-r)(p-s)} \\
&+ \frac{R}{(r-q)(r-s)(r-t)} - \frac{Q}{(q-p)(q-r)(q-s)} \\
&+ \frac{S}{(s-q)(s-r)(s-t)} - \frac{R}{(r-p)(r-q)(r-s)} \\
&+ \frac{T}{(t-q)(t-r)(t-s)} - \frac{S}{(s-p)(s-q)(s-r)} \\
&= \frac{(t-p)P}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)} \\
&+ \frac{(t-p)Q}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)} \\
&+ \frac{(t-p)R}{(r-p)(r-q)(r-s)(r-t)} \\
&+ \frac{(t-p)S}{(s-p)(s-q)(s-r)(s-t)} \\
&+ \frac{(t-p)T}{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)} ;
\end{aligned}
$$

also

$$[qrst] - [pqrs] = (t-p)[pqrst] ,$$

und auf diese Weise allgemein für jede Anzahl von Elementen:

$$[qrs\ldots yz] - [pqrs\ldots y] = (z-p)[pqrs\ldots yz] .$$

Auch ist, wie aus der Gleichung

$$[pq] = \frac{P}{p-q} + \frac{Q}{q-p}$$

auf der Stelle folgt, immer:

$$[pq] = \frac{Q-P}{q-p} .$$

Die einfachste Bildung der Differenzgrößen ergiebt sich nun aus folgendem Schema:

p	P				
	[pq]				
q	Q	[pqr]			
	[qr]	[pqrs]			
r	R	[qrs]	[pqrst]		
	[rs]	[qrst]	[pqrstu]		
s	S	[rst]	[qrstu]		
	[st]	[rstu]			
t	T	[stu]			
	[tu]				
u	U				

Da nun nach dem Obigen

$$[pq] = \frac{Q-P}{q-p},$$

$$[pqr] = \frac{[qr]-[pq]}{r-p},$$

$$[pqrs] = \frac{[qrs]-[pqr]}{s-p},$$

$$[pqrst] = \frac{[qrst]-[pqrs]}{t-p},$$

$$[pqrstu] = \frac{[qrstu]-[pqrst]}{u-p}$$

ist; so entsteht offenbar jede folgende Vertikalreihe, wenn man ein Glied der vorhergehenden von dem darunterstehenden Gliede abzieht, und die Differenz durch die Differenz der beiden Glieder der ersten Vertikalreihe, auf welche die beiden durch die nächst höhere und nächst tiefere Differenzgröße in der vorhergehenden Verticalreihe gezogenen Diagonalen hinweisen, dividirt.

11. Interpolirt man auf die vorher beschriebene Weise, so nennt man dies aus einem leicht begreiflichen Grunde von oben herunter interpoliren. Man kann aber auch, wie man es nennt, aus der Mitte interpoliren. Dann muß man nur den Größen pqrst oder den entsprechenden **PQRST** eine andere Anordnung geben. Für die Anordnung

RQSPT

erhält man aus (9.) die Formel:

$$X_s = R + (x-r)[rq] + (x-r)(x-q)[rqs] + (x-r)(x-q)(x-s)[rqsp] + (x-r)(x-q)(x-s)(x-p)[rqspt].$$

Nun überzeugt man sich aber sehr leicht, daß

$$[rq] = [qr],$$
$$[rqs] = [qrs],$$
$$[rqsp] = [pqrs],$$
$$[rqspt] = [pqrst]$$

ist. Also ist

$$X_5 = R + (x-r)[qr] + (x-r)(x-q)[qrs] + (x-r)(x-q)(x-s)[pqrs] + (x-r)(x-q)(x-s)(x-p)[pqrst] .$$

Die Differenzgrößen

$$[qr], [qrs], [pqrs], [pqrst]$$

erhält man, wenn man in dem Schema in (10.) zwischen R und [qr] eine Horizontallinie mitten durch zieht, und die wechselsweise über und unter dieser Horizontallinie liegenden Differenzgrößen nimmt.

Für die Anordnung

RSQTP

erhält man aus (9.) die Formel

$$X_5 = R + (x-r)[rs] + (x-r)(x-s)[rsq] + (x-r)(x-s)(x-q)[rsqt] + (x-r)(x-s)(x-q)(x-t)[rsqtp]$$

oder

$$X_5 = R + (x-r)[rs] + (x-r)(x-s)[qrs] + (x-r)(x-s)(x-q)[qrst] + (x-r)(x-s)(x-q)(x-t)[pqrst] ,$$

wo nun die Differenzgrößen

$$[rs], [qrs], [qrst], [pqrst]$$

in dem Schema in (10.) wieder wechselsweise unter und über einer Horizontallinie liegen, die man zwischen R und [r s] mitten durch ziehen kann.

12. Man kann die drei in (9.) und (11.) bewiesenen Formeln auch auf folgende Art schreiben.

Für die Anordnung P Q R S T hat man

$$\text{I. } X_5 = P + (x-p)\Big\{[pq] + (x-q)\Big\{[pqr] + (x-r)\big\{[pqrs] + (x-s)\{[pqrst]\}\big\}\Big\}\Big\} .$$

Für die Anordnung R Q S P T hat man

$$\text{II. } X_5 = R + (x-r)\Big\{[qr] + (x-q)\Big\{[qrs] + (x-s)\big\{[pqrs] + (x-p)\{[pqrst]\}\big\}\Big\}\Big\} .$$

Für die Anordnung R S Q T P hat man

$$\text{III. } X_5 = R + (x-r)\Big\{[rs] + (x-s)\Big\{[qrs] + (x-q)\big\{[qrst] + (x-t)\{[pqrst]\}\big\}\Big\}\Big\} .$$

Unter dieser Form scheinen diese Ausdrücke die bequemste Rech-

nung zu gewähren. Die Differenzgrößen werden, wenn man die Formeln so schreibt, successive durch die folgenden corrigirt.

Als eine Hauptregel beim Interpoliren hat man sich zu merken, daß man, wenn es angeht, die Größen p q r s t so wählt, daß die eine derselben dem x so nahe wie möglich liegt, und die andern auf beiden Seiten des x möglichst gleichförmig vertheilt sind. Dies vorausgesetzt, so wird man am besten die Formel (II) oder (III) gebrauchen, jenachdem x zwischen r und q oder zwischen r und s liegt.

13. Wir wollen die vorigen allgemeinen Formeln noch auf den häufig vorkommenden Fall anwenden, wenn p q r s t eine arithmetische Reihe bilden. In diesem Falle ist

$$q - p = r - q = s - r = t - s.$$

Setzt man nun $q - p = \delta$ und bezeichnet in diesem Falle die auf einander folgenden Vertikalreihen in dem Schema in (10.) nach der Ordnung durch

$$P, Q, R, S, T, U, \ldots;$$
$$P', Q', R', S', T', U', \ldots;$$
$$P'', Q'', R'', S'', T'', U'', \ldots;$$
$$P''', Q''', R''', S''', T''', U''', \ldots;$$
u. s. w. u. s. w.

so ergiebt sich aus der in (10.) angegebenen Bildungsweise der Differenzgrößen auf der Stelle, daß allgemein

$$P^{(n)} = \frac{Q^{(n-1)} - P^{(n-1)}}{n\delta}, \quad Q^{(n)} = \frac{R^{(n-1)} - Q^{(n-1)}}{n\delta}, \quad R^{(n)} = \frac{S^{(n-1)} - R^{(n-1)}}{n\delta}, \ldots\ldots,$$

und folglich

$$P' = \frac{Q-P}{\delta}; \quad P'' = \frac{R-2Q+P}{1.2\delta^2}; \quad P''' = \frac{S-3R+3Q-P}{1.2.3\delta^3}; \ldots.$$

$$Q' = \frac{R-Q}{\delta}; \quad Q'' = \frac{S-2R+Q}{1.2\delta^2}; \quad Q''' = \frac{T-3S+3R-Q}{1.2.3\delta^3}; \ldots.$$

$$R' = \frac{S-R}{\delta}; \quad R'' = \frac{T-2S+R}{1.2\delta^2}; \quad R''' = \frac{U-3T+3S-R}{1.2.3\delta^3}; \ldots.$$

$$S' = \frac{T-S}{\delta}; \quad S'' = \frac{U-2T+S}{1.2\delta^2}; \quad S''' = \frac{V-3U+3T-S}{1.2.3\delta^3}; \ldots.$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

Hieraus sieht man, daß im vorliegenden Falle nach einer aus der Differenzenrechnung bekannten Bezeichnung

$$[pq] = \frac{\Delta P}{\delta},$$

$$[pqr] = \frac{\Delta^2 P}{1.2.\delta^2},$$

$$[pqrs] = \frac{\Delta^3 P}{1.2.3.\delta^3},$$

$$[pqrst] = \frac{\Delta^4 P}{1.2.3.4\delta^4}$$

ist, und folglich, wenn man

$$x - p = t_1 ,$$
$$x - q = x - p - (q-p) = t_1 - \delta ,$$
$$x - r = x - p - (r-p) = t_1 - 2\delta ,$$
$$x - s = x - p - (s-p) = t_1 - 3\delta$$

setzt, die in (9.) entwickelte Formel in folgende übergeht:

$$X_5 = P + \frac{t_1}{\delta}\Delta P + \frac{t_1(t_1-\delta)}{1.2\delta^2}\Delta^2 P + \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1-2\delta)}{1.2.3\delta^3}\Delta^3 P + \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1-2\delta)(t_1-3\delta)}{1.2.3.4\delta^4}\Delta^4 P .$$

Setzt man $\frac{t_1}{\delta} = t'$, so wird

$$\text{I*. } X_5 = P + t'\Delta P + \frac{t'(t'-1)}{1.2}\Delta^2 P + \frac{t'(t'-1)(t'-2)}{1.2.3}\Delta^3 P + \frac{t'(t'-1)(t'-2)(t'-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 P .$$

Die beiden in (11.) bewiesenen Formeln lassen sich eben so leicht für den in Rede stehenden Fall einrichten. Es ist nämlich

$$[qr] = \frac{\Delta Q}{\delta} ,$$
$$[qrs] = \frac{\Delta^2 Q}{1.2\delta^2} ,$$
$$[pqrs] = \frac{\Delta^3 P}{1.2.3\delta^3} ,$$
$$[pqrst] = \frac{\Delta^4 P}{1.2.3.4\delta^4} ;$$

und folglich, wenn man

$$x - r = -t_1 ,$$
$$x - q = x - r + (r-q) = -t_1 + \delta ,$$
$$x - s = x - r - (s-r) = -t_1 - \delta ,$$
$$x - p = x - r + (r-p) = -t_1 + 2\delta$$

setzt:

$$X_5 = R - \frac{t_1}{\delta}\Delta Q + \frac{t_1(t_1-\delta)}{1.2\delta^2}\Delta^2 Q - \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1+\delta)}{1.2.3\delta^3}\Delta^3 P + \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1+\delta)(t_1-2\delta)}{1.2.3.4\delta^4}\Delta^4 P ,$$

oder, für $\frac{t_1}{\delta} = t'$:

$$\text{II*. } X_5 = R - t'\Delta Q + \frac{t'(t'-1)}{1.2}\Delta^2 Q - \frac{t'(t'-1)(t'+1)}{1.2.3}\Delta^3 P + \frac{t'(t'-1)(t'+1)(t'-2)}{1.2.3.4}\Delta^4 P .$$

Ferner ist

$$[rs] = \frac{\Delta R}{\delta},$$

$$[qrs] = \frac{\Delta^2 Q}{1.2\delta^2};$$

$$[qrst] = \frac{\Delta^3 Q}{1.2.3\delta^3},$$

$$[pqrst] = \frac{\Delta^4 P}{1.2.3.4\delta^4};$$

folglich, wenn man

$$x - r = t_1,$$
$$x - s = x - r - (s-r) = t_1 - \delta,$$
$$x - q = x - r + (r-q) = t_1 + \delta,$$
$$x - t = x - r - (t-r) = t_1 - 2\delta$$

setzt:

$$X_5 = R + \frac{t_1}{\delta}\Delta R + \frac{t_1(t_1-\delta)}{1.2\delta^2}\Delta^2 Q + \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1+\delta)}{1.2.3\,\delta^3}\Delta^3 Q + \frac{t_1(t_1-\delta)(t_1+\delta)(t_1-2\delta)}{1.2.3.4\delta^4}\Delta^4 P,$$

oder, für $\frac{t_1}{\delta} = t'$:

$$\text{III*.}\quad X_5 = R + t'\Delta R + \frac{t'(t'-1)}{1.2}\Delta^2 Q + \frac{t'(t'-1)(t'+1)}{1.2.3}\Delta^3 Q + \frac{t'(t'-1)(t'+1)(t'-2)}{1.2.3.4.}\Delta^4 P.$$

Bildet man sich das Schema

$$\begin{array}{lll} P & & \\ & \Delta P & \\ Q & & \Delta^2 P \\ & \Delta Q & \\ R & & \Delta^2 Q \\ & \Delta R & \\ S & & \Delta^2 R \\ & \Delta S & \\ T & & \end{array}$$

so liegen in der Formel (II*)

$$R,\ \Delta Q,\ \Delta^2 Q,\ \Delta^3 P,\ \Delta^4 P$$

abwechselnd unter und über der Horizontallinie, welche man zwischen R und ΔQ mitten durch ziehen kann. Eben so liegen in der Formel (III*)

$$R,\ \Delta R,\ \Delta^2 Q,\ \Delta^3 Q,\ \Delta^4 P$$

abwechselnd über und unter einer Horizontallinie, welche man zwischen R und ΔR mitten durch ziehen kann. Die Formel (II*)

entspricht dem Falle, wenn x zwischen r und q, die Formel (III*) dem Falle, wenn x zwischen r und s liegt. Man kann die Formeln (I*), (II*), (III*) auch auf folgende Art schreiben:

$$\text{I}^{**}.\quad X_s =$$

$$P+t'\left\{\Delta P+\frac{t'-1}{2}\left\{\Delta^2 P+\frac{t'-2}{3}\left\{\Delta^3 P+\frac{t'-3}{4}\Delta^4 P\right\}\right\}\right\},$$

$$\text{II}^{**}.\quad X_s =$$

$$R-t'\left\{\Delta Q-\frac{t'-1}{2}\left\{\Delta^2 Q-\frac{t'+1}{3}\left\{\Delta^3 P-\frac{t'-2}{4}\Delta^4 P\right\}\right\}\right\},$$

$$\text{III}^{**}.\quad X_s =$$

$$R+t'\left\{\Delta R+\frac{t'-1}{2}\left\{\Delta^2 Q+\frac{t'+1}{3}\left\{\Delta^3 Q+\frac{t'-2}{4}\Delta^4 P\right\}\right\}\right\}.$$

Die vorhergehenden Betrachtungen würden sich leicht verallgemeinern lassen. Wer mehr Ausführlichkeit über diesen wichtigen Gegenstand verlangt, den verweisen wir auf eine schöne Abhandlung von Encke im astronomischen Jahrbuche für 1830. S. 265., deren Inhalt jedoch Encke, nach seiner eignen Angabe, vorzüglich aus den Vorlesungen entlehnt hat, welche er im Jahre 1812 bei Gauß zu hören das Glück hatte.

14. Außer den bisher angeführten Schriften s. m. noch:

La Grange, recherches sur la manière de former les tables des planètes d'après les seules observations. Mém. de Paris 1772. I. p. 513.

Winsheim, de interpolatione simplici meditationes. Comm. Petrop. T. XIII. p. 312.

Eytelweins Grundlehren der höhern Analysis. Berlin 1824. Thl. II. Kap. 24.

L. Olivier, über Interpolationsformeln, und über deren Anwendung auf die Auflösung der Gleichungen von beliebigen Graden. Crelles Journal II. S. 197.

Clausen, über Interpolation. Ebend. T. V. S. 305.

Lacroix, Traité du calcul diff. et du calcul int. T. III. p. 21. p. 326. p. 360.

Prasse, Institutiones Analyticae. Lips. 1813. p. 81. p. 205.

Laplace Théorie analytique des probabilités. Trois. éd. Paris. 1820. p. 13. p. 52.

Elimination. Zur Vervollständigung des gleichnamigen Artikels im zweiten Theile dieses Wörterbuchs mögen die folgenden Bemerkungen dienen.

I. Gleichungen des ersten Grades.

1. Es seyen überhaupt n Gleichungen des ersten Grades mit n unbekannten Größen gegeben, die wir im Allgemeinen durch

$$\begin{aligned}
(1)_1 x_1 + (2)_1 x_2 + (3)_1 x_3 + \cdots + (n)_1 x_n &= [1]_1\\
(1)_2 x_1 + (2)_2 x_2 + (3)_2 x_3 + \cdots + (n)_2 x_n &= [1]_2\\
(1)_3 x_1 + (2)_3 x_2 + (3)_3 x_3 + \cdots + (n)_3 x_n &= [1]_3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(1)_n x_1 + (2)_n x_2 + (3)_n x_3 + \cdots + (n)_n x_n &= [1]_n\,,
\end{aligned}$$

wo die Bedeutung der einzelnen Symbole leicht erhellen wird, bezeichnen wollen.

Soll nun aus diesen Gleichungen z. B. x_1 bestimmt werden, so seyen einmal $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ gewisse Functionen der Coefficienten der unbekannten Größen, die Coefficienten von x_1 ausgenommen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(1)_1 p_1 x_1 + (2)_1 p_1 x_2 + (3)_1 p_1 x_3 + \cdots + (n)_1 p_1 x_n &= [1]_1 p_1\\
(1)_2 p_2 x_1 + (2)_2 p_2 x_2 + (3)_2 p_2 x_3 + \cdots + (n)_2 p_2 x_n &= [1]_2 p_2\\
(1)_3 p_3 x_1 + (2)_3 p_3 x_2 + (3)_3 p_3 x_3 + \cdots + (n)_3 p_3 x_n &= [1]_3 p_3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(1)_n p_n x_1 + (2)_n p_n x_2 + (3)_n p_n x_3 + \cdots + (n)_n p_n x_n &= [1]_n p_n\,.
\end{aligned}$$

Wären nun die Functionen $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ so beschaffen, daß

$$\begin{aligned}
(2)_1 p_1 + (2)_2 p_2 + (2)_3 p_3 + \cdots + (2)_n p_n &= 0\\
(3)_1 p_1 + (3)_2 p_2 + (3)_3 p_3 + \cdots + (3)_n p_n &= 0\\
(4)_1 p_1 + (4)_2 p_2 + (4)_3 p_3 + \cdots + (4)_n p_n &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(n)_1 p_1 + (n)_2 p_2 + (n)_3 p_3 + \cdots + (n)_n p_n &= 0
\end{aligned}$$

wäre, so würde sich aus den obigen Gleichungen auf der Stelle

$$x_1 = \frac{[1]_1 p_1 + [1]_2 p_2 + [1]_3 p_3 + \cdots + [1]_n p_n}{(1)_1 p_1 + (1)_2 p_2 + (1)_3 p_3 + \cdots + (1)_n p_n}$$

ergeben, also die gesuchte Größe x_1 gefunden seyn.

Aus diesen einfachen Betrachtungen ergiebt sich, daß unsere Aufgabe aufgelöst seyn würde, wenn sich eine Function

$$(1)_1 p_1 + (1)_2 p_2 + (1)_3 p_3 + \cdots + (1)_n p_n$$

von solcher Beschaffenheit angeben ließe, daß dieselbe $= 0$ wird, wenn man statt der ersten Coefficienten irgend eine andere Coefficientenreihe:

$$(2)_1, (2)_2, (2)_3, \ldots . (2)_n$$
$$(3)_1, (3)_2, (3)_3, \ldots . (3)_n$$
$$(4)_1, (4)_2, (4)_3, \ldots . (4)_n$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$(n)_1, (n)_2, (n)_3, \ldots . (n)_n$$

setzt. Diese Function wäre der Nenner des gesuchten Werths von x_1; und aus demselben würde man den Zähler erhalten, wenn man statt

$$(1)_1, (1)_2, (1)_3, \ldots . (1)_n$$

überall nur respective

$$[1]_1, [1]_2, [1]_3, \ldots . [1]_n$$

setzte, oder, was dasselbe ist, bei allen ersten Coefficienten die Parenthesen () mit den Klammern [] vertauschte, eine für das Folgende sehr wichtige Bemerkung, weil durch dieselbe die Auflösung bedeutend abgekürzt wird, indem es, wie man jetzt sieht, bloß auf die Entwickelung des Nenners ankommt. Auch ist klar, daß diese Bemerkungen nicht auf die unbekannte Größe x_1 eingeschränkt sind, sondern für alle übrigen gelten, weil man eine jede als die erste betrachten kann, weshalb es uns also verstattet ist, der Kürze wegen alles Folgende auf die unbekannte Größe x_1 zu beziehen. Alles kommt demnach auf die Entwickelung einer Function von der angegebenen Beschaffenheit an.

2. Diese Entwickelung im Allgemeinen und mit Leichtigkeit auszuführen, sind vorzüglich zwei Regeln bekannt geworden, deren eine von Cramer (Introduction à l'analyse des courbes algébriques. Genève 1750. p. 657.), die andere von Bezout (Théorie générale des équations algébriques. Paris. 1779. p. 171.) herrührt. Beide Regeln sind durch Induction gefunden, von keinem der Erfinder aber allgemein bewiesen worden. Indem wir hier die Induction, welche zu den Regeln geführt hat, übergehen, wenden wir uns sogleich zu der Cramerschen Regel selbst, und zu ihrem Beweise.

Zuerst entwickele man nach einer sehr bekannten Regel der combinatorischen Analysis sämmtliche Permutationen der Elemente

$$(1), (2), (3), \ldots . (n)$$

und füge sodann den einzelnen Elementen jeder Complexion unten zur Rechten die Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots n$$

in natürlicher Folge bei.

Nun nennt es Cramer eine Variation, wenn in einer Complexion bloß in Bezug auf

$$(1), (2), (3), \ldots . (n),$$

nicht in Bezug auf die unten zur Rechten beigefügten Indices, die hier völlig unberücksichtigt bleiben, ein höheres Element vor einem niedrigern vorausgeht, und giebt wegen der Vorzeichen der einzelnen Complexionen die Regel, daß jede Complexion das Zeichen + oder — 1 erhält, jenachdem bei ihr die Anzahl der Variationen der Elemente gerade oder ungerade ist.

Es wird nöthig seyn, diese Regel, bevor wir weitere Schritte vorwärts thun, durch die vollständige Entwickelung eines Beispiels zu erläutern. Für $n = 4$ hat man:

Permutationen:	Anzahl der Variationen:
(1) (2) (3) (4)	0
(1) (2) (4) (3)	1
(1) (3) (2) (4)	1
(1) (3) (4) (2)	2
(1) (4) (2) (3)	2
(1) (4) (3) (2)	3
(2) (1) (3) (4)	1
(2) (1) (4) (3)	2
(2) (3) (1) (4)	2
(2) (3) (4) (1)	3
(2) (4) (1) (3)	3
(2) (4) (3) (1)	4
(3) (1) (2) (4)	2
(3) (1) (4) (2)	3
(3) (2) (1) (4)	3
(3) (2) (4) (1)	4
(3) (4) (1) (2)	4
(3) (4) (2) (1)	5
(4) (1) (2) (3)	3
(4) (1) (3) (2)	4
(4) (2) (1) (3)	4
(4) (2) (3) (1)	5
(4) (3) (1) (2)	5
(4) (3) (2) (1)	6

Daher ist die gesuchte Function:

$$+ (1)_1 (2)_2 (3)_3 (4)_4$$
$$- (1)_1 (2)_2 (4)_3 (3)_4$$
$$- (1)_1 (3)_2 (2)_3 (4)_4$$
$$+ (1)_1 (3)_2 (4)_3 (2)_4$$
$$+ (1)_1 (4)_2 (2)_3 (3)_4$$
$$- (1)_1 (4)_2 (3)_3 (2)_4$$

$$
\begin{array}{l}
- (2)_1 (1)_2 (3)_3 (4)_4 \\
+ (2)_1 (1)_2 (4)_3 (3)_4 \\
+ (2)_1 (3)_2 (1)_3 (4)_4 \\
- (2)_1 (3)_2 (4)_3 (1)_4 \\
- (2)_1 (4)_2 (1)_3 (3)_4 \\
+ (2)_1 (4)_2 (3)_3 (1)_4 \\
+ (3)_1 (1)_2 (2)_3 (4)_4 \\
- (3)_1 (1)_2 (4)_3 (2)_4 \\
- (3)_1 (2)_2 (1)_3 (4)_4 \\
+ (3)_1 (2)_2 (4)_3 (1)_4 \\
+ (3)_1 (4)_2 (1)_3 (2)_4 \\
- (3)_1 (4)_2 (2)_3 (1)_4 \\
- (4)_1 (1)_2 (2)_3 (3)_4 \\
+ (4)_1 (1)_2 (3)_3 (2)_4 \\
+ (4)_1 (2)_2 (1)_3 (3)_4 \\
- (4)_1 (2)_2 (3)_3 (1)_4 \\
- (4)_1 (3)_2 (1)_3 (2)_4 \\
+ (4)_1 (3)_2 (2)_3 (1)_4
\end{array}
$$

3. Der Beweis dieser Regel kommt vorzüglich auf folgenden Lehrsatz zurück:

Zwei Complexionen wie

$$\ldots\ldots (\varkappa)_\alpha \ldots\ldots (1)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots \quad (A)$$

und

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (\varkappa)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots \quad (B),$$

in denen bloß (1) und ($\varkappa$) mit einander vertauscht sind, sonst alle übrigen Elemente völlig gleiche Stellen einnehmen, erhalten nach der Cramerschen Regel jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen.

Jede der beiden Complexionen (A), (B) wird durch ($\varkappa$) und (1), wenn man diese Elemente selbst nicht mit rechnet, in drei aus völlig gleichen Elementen in gleicher Stellung bestehende Abtheilungen getheilt, die wir der Kürze wegen von der linken nach der rechten Hand hin durch I, II, III bezeichnen wollen.

Alle Elemente, die beiden versetzten ausgenommen, sollen in jeder der beiden Complexionen nach Cramers Regel γ Variationen geben.

In (A) und (B) gebe ferner ($\varkappa$) in Bezug auf die Elemente, welche die Abtheilung III bilden, λ Variationen.

In der Complexion (A) geben die Elemente in I und II in Bezug auf (1) offenbar $\alpha + \beta - 2$, und, wenn man das Element ($\varkappa$) mit nimmt, da sich dies natürlich auch mit (1) vergleichen läßt, $\alpha + \beta - 1$ Variationen.

In (A) gebe ($\varkappa$) in Bezug auf die Elemente in II λ' Variationen, so geben offenbar in (B) die Elemente in demselben In-

tervall in Bezug auf (x) eine Anzahl von Variationen, welche $= \beta - 1 - \lambda'$ ist.

Die Elemente in dem Intervall I mögen in Bezug auf (x) in (A) und (B) λ'' Variationen geben. In Bezug auf (1) sind endlich in (B) in diesem Intervall offenbar $\alpha - 1$ Variationen.

Bezeichnen wir nun die Anzahl der Variationen in (A) und (B) respective durch Δ und Δ', so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\Delta = \gamma + \lambda + \lambda' + \lambda'' + \alpha + \beta - 1,$$
$$\Delta' = \gamma + \lambda + \beta - 1 - \lambda' + \lambda'' + \alpha - 1;$$

d. i.

$$\Delta' = \gamma + \lambda + \lambda' + \lambda'' + \alpha + \beta - 1 - (2\lambda' + 1);$$

oder

$$\Delta' = \Delta - (2\lambda' + 1), \quad \Delta - \Delta' = 2\lambda' + 1,$$

so daß also Δ' gerade oder ungerade ist, jenachdem Δ ungerade oder gerade ist, und folglich die beiden Complexionen nach der Cramerschen Regel jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie behauptet wurde.

4. Ist nun

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (x)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots,$$

oder

$$\ldots\ldots (x)_\alpha \ldots\ldots (1)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

irgend ein Glied der nach der Cramerschen Regel gebildeten Function, so kommen in derselben, da man nach dieser Regel die Permutationen von

$$(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ \ldots\ (n)$$

bildet, offenbar respective auch die Glieder

$$\ldots\ldots (x)_\alpha \ldots\ldots (1)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots,$$

oder

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (x)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

vor, und je zwei zusammengehörende dieser Glieder (das erste und dritte oder das zweite und vierte) erhalten bei der Bestimmung der Vorzeichen nach dieser Regel entgegengesetzte Vorzeichen (3.). Setzt man nun in der gebildeten Function überall (x) für (1), so werden die sich entsprechenden Glieder (das erste und dritte oder zweite und vierte) gleich

$$\ldots\ldots (x)_\alpha \ldots\ldots (x)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots,$$

und heben sich also, da sie nach dem Vorhergehenden entgegengesetzte Vorzeichen haben, gegenseitig auf. Hieraus sieht man also, daß die nach der Cramerschen Regel gebildete Function sich auf Null reducirt, wenn man in derselben überall (x), d. i., da (x) jedes der Symbole

$$(2),\ (3),\ (4),\ \ldots\ (n)$$

seyn kann, überhaupt eins dieser Symbole für (1) setzt, und daß daher diese Function die oben verlangte Eigenschaft hat, also der gesuchte Nenner von x_1 ist, aus dem man denn nach dem Obigen auch unmittelbar den Zähler erhält.

5. Will man $x_\varkappa$ bilden, so muß man in den gegebenen Gleichungen die Glieder mit $x_\varkappa$ als die ersten, die mit x_1 als die $\varkappa$ten betrachten. Ist nun

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (\varkappa)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

eine beliebige Complexion in dem Nenner von $x_\varkappa$, so hat dieselbe, weil (1) das $\varkappa$te, ($\varkappa$) das 1ste Element ist, offenbar einerlei Zeichen mit

$$\ldots\ldots (\varkappa)_\alpha \ldots\ldots (1)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

in dem Nenner von x_1, weil jetzt ($\varkappa$) das $\varkappa$te, (1) das 1ste Element ist. Letztere Complexion hat aber nach (3.) entgegengesetztes Zeichen mit

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (\varkappa)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

in dem Nenner von x_1, so daß also auch

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (\varkappa)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

in dem Nenner von $x_\varkappa$ entgegengesetztes Zeichen hat mit

$$\ldots\ldots (1)_\alpha \ldots\ldots (\varkappa)_{\alpha+\beta} \ldots\ldots$$

in dem Nenner von x_1, und folglich überhaupt der Nenner von $x_\varkappa$ offenbar ganz aus denselben Complexionen besteht wie der Nenner von x_1, aber mit demselben entgegengesetztes Vorzeichen hat. Da man aber die Vorzeichen des Zählers und Nenners eines Bruchs, ohne dessen Werth zu ändern, jederzeit mit den entgegengesetzten vertauschen kann, so erhält man offenbar auch den richtigen Werth von $x_\varkappa$, wenn man ihm denselben Nenner wie x_1 giebt, und dann, wie gewöhnlich, [1] für ($\varkappa$) setzt. Man erhält also die Werthe aller unbekannten Größen, wenn man den Nenner von x_1 wie gewöhnlich entwickelt, diesen Nenner als den gemeinschaftlichen Nenner der Werthe aller unbekannten Größen betrachtet, und dann die Zähler bildet, indem man in dem erhaltenen Nenner nach und nach [1] für (1), (2), (3), (4), ... (n) setzt.

Für die drei Gleichungen

$$(1)_1 x_1 + (2)_1 x_2 + (3)_1 x_3 = [1]_1$$
$$(1)_2 x_1 + (2)_2 x_2 + (3)_2 x_3 = [1]_2$$
$$(1)_3 x_1 + (2)_2 x_3 + (3)_3 x_3 = [1]_3$$

erhält man z. B.

Permutationen:	Anzahl der Variationen:
(1) (2) (3)	0
(1) (3) (2)	1
(2) (1) (3)	1
(2) (3) (1)	2
(3) (1) (2)	2
(3) (2) (1)	3

so daß also der gemeinschaftliche Nenner von x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} &(1)_1\,(2)_2\,(3)_3 \\ -\,&(1)_1\,(3)_2\,(2)_3 \\ -\,&(2)_1\,(1)_2\,(3)_3 \\ +\,&(2)_1\,(3)_2\,(1)_3 \\ +\,&(3)_1\,(1)_2\,(2)_3 \\ -\,&(3)_1\,(2)_2\,(1)_3\,. \end{aligned}$$

Die Zähler sind:

$[1]_1\,(2)_2\,(3)_3$	$(1)_1\,[1]_2\,(3)_3$	$(1)_1\,(2)_2\,[1]_3$
$-\,[1]_1\,(3)_2\,(2)_3$	$-\,(1)_1\,(3)_2\,[1]_3$	$-\,(1)_1\,[1]_2\,(2)_3$
$-\,(2)_1\,[1]_2\,(3)_3$	$-\,[1]_1\,(1)_2\,(3)_3$	$-\,(2)_1\,(1)_2\,[1]_3$
$+\,(2)_1\,(3)_2\,[1]_3$	$+\,[1]_1\,(3)_2\,(1)_3$	$+\,(2)_1\,[1]_2\,(1)_3$
$+\,(3)_1\,[1]_2\,(2)_3$	$+\,(3)_1\,(1)_2\,[1]_3$	$+\,[1]_1\,(1)_2\,(2)_3$
$-\,(3)_1\,(2)_2\,[1]_3$	$-\,(3)_1\,[1]_2\,(1)_3$	$-\,[1]_1\,(2)_2\,(1)_3$.

Man sieht hieraus, wie leicht diese merkwürdige Regel in der Anwendung ist.

6. Cramers so eben vollständig bewiesene Regel ist völlig independent. Die von Bezout gegebene Regel ist recurrirend. Für $n = 2$ ist nämlich eine Function von der angegebenen Beschaffenheit offenbar

$$(1)_1\,(2)_2 - (2)_1\,(1)_2\,.$$

Hieraus findet man nun eine solche Function für $n = 3$ nach Bezouts Regel, wenn man, auf die untergeschriebenen Stellenzahlen keine Rücksicht nehmend, das neu hinzukommende Element (3) in den vorhergehenden Complexionen gegen die in denselben enthaltenen Elemente alle möglichen Stellen einnehmen läßt, das Zeichen bei der letzten Stelle ungeändert läßt, bei jeder andern in das entgegengesetzte verwandelt, und dann die Stellenzahlen in natürlicher Folge hinzufügt, so daß also für $n = 3$ die gesuchte Function:

$$\begin{aligned} &(1)_1\,(2)_2\,(3)_3 \\ -\,&(1)_1\,(3)_2\,(2)_3 \\ +\,&(3)_1\,(1)_2\,(2)_3 \\ -\,&(2)_1\,(1)_2\,(3)_3 \\ +\,&(2)_1\,(3)_2\,(1)_3 \\ -\,&(3)_1\,(2)_2\,(1)_3 \end{aligned}$$

und folglich ferner für $n = 4$:

$$
\begin{array}{r}
(1)_1\,(2)_2\,(3)_3\,(4)_4 \\
-\,(1)_1\,(2)_2\,(4)_3\,(3)_4 \\
+\,(1)_1\,(4)_2\,(2)_3\,(3)_4 \\
-\,(4)_1\,(1)_2\,(2)_3\,(3)_4 \\
-\,(1)_1\,(3)_2\,(2)_3\,(4)_4 \\
+\,(1)_1\,(3)_2\,(4)_3\,(2)_4 \\
-\,(1)_1\,(4)_2\,(3)_3\,(2)_4 \\
+\,(4)_1\,(1)_2\,(3)_3\,(2)_4 \\
+\,(3)_1\,(1)_2\,(2)_3\,(4)_4 \\
-\,(3)_1\,(1)_2\,(4)_3\,(2)_4 \\
+\,(3)_1\,(4)_2\,(1)_3\,(2)_4 \\
-\,(4)_1\,(3)_2\,(1)_3\,(2)_4 \\
-\,(2)_1\,(1)_2\,(3)_3\,(4)_4 \\
+\,(2)_1\,(1)_2\,(4)_3\,(3)_4 \\
-\,(2)_1\,(4)_2\,(1)_3\,(3)_4 \\
+\,(4)_1\,(2)_2\,(1)_3\,(3)_4 \\
+\,(2)_1\,(3)_2\,(1)_3\,(4)_4 \\
-\,(2)_1\,(3)_2\,(4)_3\,(1)_4 \\
+\,(2)_1\,(4)_2\,(3)_3\,(1)_4 \\
-\,(4)_1\,(2)_2\,(3)_3\,(1)_4 \\
-\,(3)_1\,(2)_2\,(1)_3\,(4)_4 \\
+\,(3)_1\,(2)_2\,(4)_3\,(1)_4 \\
-\,(3)_1\,(4)_2\,(2)_3\,(1)_4 \\
+\,(4)_1\,(3)_2\,(2)_3\,(1)_4
\end{array}
$$

Daß man durch Anwendung dieser Regel auch Permutationen erhält ist klar, und es ist folglich bei derselben weiter nichts zu beweisen, als die Richtigkeit der Vorschrift wegen der Vorzeichen.

Man nehme an, daß diese Regel für n Elemente gilt, und denke sich irgend eine Complexion mit n Elementen, für welche die Anzahl der Variationen $= x$ ist, und die also nach der bewiesenen Cramerschen Regel das Vorzeichen $\pm$ hat, jenachdem x gerade oder ungerade ist. Tritt nun ein neues Element hinzu, so ergeben sich aus der in Rede stehenden Complexion mit n Elementen nach Bezouts Regel $n + 1$ neue Complexionen mit $n + 1$ Elementen, und unter diesen erhält die

1ste Complexion das Zeichen $\pm$,
2te Complexion das Zeichen $\mp$,
3te Complexion das Zeichen $\pm$,
4te Complexion das Zeichen $\mp$,
u. s. w. u. s. w.

so daß also unter diesen Complexionen das Vorzeichen der aten

Complexion $\mp$ oder $\pm$, jenachdem α gerade oder ungerade ist. Die αte Complexion mit $n+1$ Elementen hat aber offenbar $\alpha-1$ Variationen mehr, als die gegebene Complexion mit n Elementen, da das hinzukommende Element höher ist als alle in letzterer enthaltenen Elemente, d. i., die Anzahl dieser Variationen ist $=x+\alpha-1$. Es können nun überhaupt folgende Fälle eintreten, in denen die Zeichen nach dem Vorhergehenden bestimmt sind:

x gerade, Zeichen $+$; α gerade, Zeichen $-$;
x ungerade, Zeichen $-$; α ungerade, Zeichen $-$;

oder

x gerade, Zeichen $+$; α ungerade, Zeichen $+$;
x ungerade, Zeichen $-$; α gerade, Zeichen $+$.

Im ersten Falle ist $x+\alpha-1$, d. i. die Anzahl der Variationen der Complexion mit $n+1$ Elementen, ungerade, und das Zeichen der Complexion $-$, wie es die Cramersche Regel erfordert; im zweiten Falle ist $x+\alpha-1$ gerade, und das Zeichen der Complexion mit $n+1$ Elementen $+$, wie es ebenfalls die Cramersche Regel, deren Richtigkeit schon bewiesen worden ist, erfordert. Bezouts Regel gilt also für $n+1$, wenn sie für n gilt, woraus leicht ihre allgemeine Gültigkeit folgt.

Zur Literatur dieses Gegenstandes gehört eine Abhandlung von G. A. Rothe in Hindenburgs Samml. comb. anal. Abhandlungen II. Leipzig 1800. Scherk mathem. Abhandlungen. Berlin 1825. S. 31. Bezout in den Mémoires de l'acad. des sc. 1774, so wie Laplace und Vandermonde in denselben Memoiren für 1772. Auch s. m. Hindenburgs Vorrede zu Rüdigeri specimen analyticum de lineis secundi ordinis. Lips. 1784. Der oben von mir gegebene Beweis dürfte sich durch seine Einfachheit und Strenge empfehlen.

II. Gleichungen höherer Grade.

7. Die Aufgabe, welche wir hier zuerst aufzulösen haben, ist folgende. Es sind zwei Gleichungen gegeben, welche in Bezug auf eine gewisse unbekannte Größe x beide vom nten Grade sind, indem wir bemerken, daß die beiden gegebenen Gleichungen, wenn sie nicht von demselben Grade wären, sich leicht auf einerlei Grad bringen lassen würden, wenn man die des niedrigern Grades mit einer schicklichen Potenz multiplicirte. Die Coefficienten dieser beiden Gleichungen, welche wir im Allgemeinen durch

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$
$$B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} x + B_n = 0$$

bezeichnen wollen, können sowohl bestimmte Größen, als auch ganze rationale Functionen anderer unbekannten Größen in beliebiger Anzahl seyn. Aus diesen beiden Gleichungen soll man nun x

eliminiren, d. h. eine Gleichung zwischen den Coefficienten finden, welche x nicht mehr enthält, und zugleich x selbst als eine entwickelte Function der Coefficienten darstellen. Sind die Coefficienten bestimmte Größen, so ist die aus der Elimination von x sich ergebende Gleichung zwischen denselben eine Bedingungsgleichung, welcher die Coefficienten genügen müssen, wenn es möglich seyn soll, den beiden gegebenen Gleichungen durch einen Werth von x zu genügen. Sind dagegen die Coefficienten ganze rationale Functionen anderer unbekannten Größen, so ist die in Rede stehende Gleichung eine x nicht mehr enthaltende Gleichung zwischen diesen unbekannten Größen, welche nun so bestimmt werden müssen, daß der gefundenen Gleichung zwischen denselben genügt wird, welches bekanntlich nach der Anzahl der überhaupt gegebenen Gleichungen auf eine bestimmte oder eine unbestimmte Aufgabe führen kann. Dem Eliminationsverfahren, welches wir hier etwas näher erläutern wollen, liegt im Allgemeinen die Idee zum Grunde, daß man aus den beiden gegebenen Gleichungen zwei neue Gleichungen abzuleiten sucht, welche in Bezug auf x vom $(n-1)$ten Grade sind, aus diesen wieder zwei neue Gleichungen vom $(n-2)$ten Grade, u. s. f., bis man endlich auf diese Weise zwei Gleichungen erhält, die in Bezug auf x beide vom ersten Grade sind. Aus jeder dieser beiden Gleichungen leitet man leicht einen Ausdruck von x durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen ab, und die Gleichsetzung dieser beiden ein und derselben Größe entsprechenden Ausdrücke führt auf die gesuchte Gleichung zwischen den Coefficienten der gegebenen Gleichungen. Man sieht also, daß es bloß auf eine allgemeine Methode ankommt, aus den beiden gegebenen Gleichungen zwei neue Gleichungen abzuleiten, welche in Bezug auf x vom $(n-1)$ten Grade sind. Dazu gelangt man aber sehr leicht durch das folgende einfache Verfahren. Zuerst multiplicire man die erste Gleichung mit $-B_0$, die zweite mit A_0, und addire die so erhaltenen Gleichungen zu einander; so ergiebt sich, indem man der Kürze wegen

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = C_1$$

$$A_0 B_2 - A_2 B_0 = C_2$$

$$A_0 B_3 - A_3 B_0 = C_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_0 B_{n-1} - A_{n-1} B_0 = C_{n-1}$$

$$A_0 B_n - A_n B_0 = C_n$$

setzt, auf der Stelle die Gleichung des $(n-1)$ten Grades:

$$C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \cdots + C_{n-1} x + C_n = 0 .$$

Multiplicirt man ferner die erste Gleichung mit B_n, die zweite mit $-A_n$, und addirt wieder; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A_1 B_n - A_n B_1 = C_{n+1}$$
$$A_2 B_n - A_n B_2 = C_{n+2}$$
$$A_3 B_n - A_n B_3 = C_{n+3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n-2} B_n - A_n B_{n-2} = C_{2n-2}$$
$$A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} = C_{2n-1}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$C_n x^n + C_{n+1} x^{n-1} + C_{n+2} x^{n-2} + \ldots + C_{2n-2} x^2 + C_{2n-1} x = 0,$$

welche zwar vom nten Grade ist, durch Division mit x aber sogleich auf den (n—1)ten Grad gebracht wird, so daß man also jetzt, wie verlangt wurde, die beiden Gleichungen

$$C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-1} x + C_n = 0,$$
$$C_n x^{n-1} + C_{n+1} x^{n-2} + C_{n+2} x^{n-3} + \ldots + C_{2n-2} x + C_{2n-1} = 0$$

hat, welche beide in Bezug auf x bloß vom (n—1)ten Grade sind. Daß hierdurch unsere Aufgabe im Allgemeinen als aufgelöst zu betrachten ist, ist schon oben gezeigt worden. Dieses allgemeine Verfahren wollen wir zunächst auf einige specielle Fälle anwenden.

Erster Grad.

Die gegebenen Gleichungen seyen:

$$A_0 x + A_1 = 0,$$
$$B_0 x + B_1 = 0.$$

Man erhält augenblicklich:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} = -\frac{B_1}{B_0},$$

und durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von x:

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = 0.$$

Zweiter Grad.

Die gegebenen Gleichungen seyen:

$$A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0,$$
$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = 0.$$

Für

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = C_1, \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = C_3;$$
$$A_0 B_2 - A_2 B_0 = C_2$$

ergeben sich aus den obigen allgemeinen Formeln die Gleichungen:

$$C_1 x + C_2 = 0,$$
$$C_2 x + C_3 = 0;$$

und aus diesen beiden Gleichungen des ersten Grades nach dem Vorhergehenden:

$$x = -\frac{C_2}{C_1} = -\frac{C_3}{C_2},$$

$$C_2^2 - C_1 C_3 = 0,$$

oder nach gehöriger Substitution

$$x = -\frac{A_0B_2 - A_2B_0}{A_0B_1 - A_1B_0} = -\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_0B_2 - A_2B_0},$$

$$(A_0B_2 - A_2B_0)^2 - (A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_2 - A_2B_1) = 0.$$

Dritter Grad.

Die gegebenen Gleichungen sind:

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$$
$$B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x + B_3 = 0.$$

Man setze

$$A_0B_1 - A_1B_0 = C_1,\ A_1B_3 - A_3B_1 = C_4;$$
$$A_0B_2 - A_2B_0 = C_2,\ A_2B_3 - A_3B_2 = C_5;$$
$$A_0B_3 - A_3B_0 = C_3;$$

so ist nach dem Obigen die Aufgabe auf die beiden folgenden Gleichungen des zweiten Grades zurückgeführt:

$$C_1x^2 + C_2x + C_3 = 0,$$
$$C_3x^2 + C_4x + C_5 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach dem Vorhergehenden:

$$x = -\frac{C_1C_5 - C_3^2}{C_1C_4 - C_2C_3} = -\frac{C_2C_5 - C_3C_4}{C_1C_5 - C_3^2},$$

$$(C_3^2 - C_1C_5)^2 - (C_1C_4 - C_2C_3)(C_2C_5 - C_3C_4) = 0,$$

oder, wenn man die linke Seite der letzten Gleichung entwickelt und nach Potenzen von C_3 ordnet:

$$C_3^4 - (C_2C_4 + 2C_1C_5)C_3^2 + (C_1C_4^2 + C_2^2C_5)C_3 + C_1C_5(C_1C_5 - C_2C_4) = 0.$$

Folglich nach gehöriger Substitution:

$$x = -\frac{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_3 - A_3B_0)^2}{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_3 - A_3B_1) - (A_0B_2 - A_2B_0)(A_0B_3 - A_3B_0)}$$
$$= -\frac{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_3 - A_3B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)}{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_3 - A_3B_0)^2}.$$

Da ferner, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$C_1C_5 - C_2C_4 = (A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) - (A_0B_2 - A_2B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)$$
$$= -(A_0B_3 - A_3B_0)(A_1B_2 - A_2B_1)$$

ist; so erhält man nach dem Obigen:

$$(A_0B_3 - A_3B_0)^3$$
$$-\{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1B_3 - A_3B_1) + 2(A_0B_1 - A_1B_0)(A_2B_3 - A_3B_2)\}(A_0B_3 - A_3B_0)$$
$$+ (A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)^2 + (A_2B_3 - A_3B_2)(A_0B_2 - A_2B_0)^2$$
$$- (A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_2 - A_2B_1)(A_2B_3 - A_3B_2) = 0.$$

Vierter Grad.

Die gegebenen Gleichungen sind:

$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$
$$B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4 = 0.$$

Man setze:

$$A_0B_1 - A_1B_0 = C_1,\ A_1B_4 - A_4B_1 = C_5;$$
$$A_0B_2 - A_2B_0 = C_2,\ A_2B_4 - A_4B_2 = C_6;$$
$$A_0B_3 - A_3B_0 = C_3,\ A_3B_4 - A_4B_3 = C_7;$$
$$A_0B_4 - A_4B_0 = C_4;$$

so hat man die beiden Gleichungen des dritten Grades:

$$C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 = 0,$$
$$C_4x^3 + C_5x^2 + C_6x + C_7 = 0,$$

welche man nun wieder nach dem Vorhergehenden auflösen kann. Die Ausdrücke fallen zwar etwas complicirt aus; ihre Entwickelung hat aber nicht die mindeste Schwierigkeit. Die x nicht mehr enthaltende Gleichung muß man auf ähnliche Art wie vorher entwickeln, und ihre linke Seite nach Potenzen von C_4 ordnen, wobei sich zeigen wird, daß diese Gleichung in Bezug auf C_4 vom sechsten Grade ist. Bemerkt man aber dann, daß

$$C_1C_6 - C_2C_5 = -(A_0B_4 - A_4B_0)(A_1B_2 - A_2B_1)$$
$$C_1C_7 - C_3C_5 = -(A_0B_4 - A_4B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)$$
$$C_2C_7 - C_3C_6 = -(A_0B_4 - A_4B_0)(A_2B_3 - A_3B_2)$$

ist, so wird sich finden, daß die in Rede stehende Gleichung durch

$$C_4^2 = (A_0B_4 - A_4B_0)^2$$

dividirt, und folglich auf den vierten Grad gebracht werden kann, eine Bemerkung, die sehr wichtig ist, um die Gleichung unter ihrer einfachsten Gestalt darzustellen. Die Resultate selbst hier mitzutheilen, möchte der Raum nicht verstatten.

Hat man nun überhaupt m Gleichungen mit m unbekannten Größen, so kann man nach dem gezeigten allgemeinen Verfahren, wenn wir die gegebenen Gleichungen durch (1), (2), (3), (4), ... (m) bezeichnen, eine der unbekannten Größen aus (1) und (2), (2) und (3), (3) und (4), u. s. f., (m — 1) und (m) eliminiren, wodurch man offenbar m — 1 nur noch m — 1 unbekannte Größen enthaltende Gleichungen erhält, aus denen man dann eben so m — 2 nur noch m — 2 unbekannte Größen enthaltende Gleichungen erhält, u. s. f., bis man endlich auf eine Gleichung mit einer unbekannten Größe kommt, die man nun aus dieser Gleichung bestimmt, und den gefundenen Werth nach und nach in die Ausdrücke der übrigen unbekannten Größen einführt, wodurch auch diese bestimmt werden.

Die vorhergehende Eliminationsmethode, welche vor andern wesentliche Vorzüge zu haben scheint, rührt von Euler her (In-

troductio in Anal. inf. T. II. Cap. XIX.), und ist von Gergonne in einer Abhandlung in den Annales de Math. T. XX. 1830. p. 41, welcher wir bei obiger Darstellung dem Wesentlichen nach gefolgt sind, mit mehreren guten eignen Bemerkungen bereichert worden.

8. Daß sich jede Elimination einer unbekannten Größe aus zwei Gleichungen höherer Grade auf das in I. vollständig aufgelöste Eliminationsproblem für Gleichungen des ersten Grades zurückführen läßt, ist schon im zweiten Theile dieses Wörterbuchs im Artikel Elimination (24.) an einem Beispiele gezeigt worden. Wir wollen aber, da diese Methode uns ebenfalls besonders wichtig zu seyn scheint, dieselbe hier noch an einem Beispiele für zwei Gleichungen des dritten Grades und an zwei andern Fällen erläutern. Die beiden gegebenen Gleichungen seyen

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0.$$

Setzen wir den Werth von x, welcher diesen beiden Gleichungen genügen muß, $= \alpha$; so ist für jedes x:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x - \alpha)(x^2 + px + q),$$
$$x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = (x - \alpha)(x^2 + p'x + q').$$

Also ist, wenn man $x - \alpha$ eliminirt, für jedes x:

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^2 + p'x + q')$$
$$= (x^3 + P'x^2 + Q'x + R')(x^2 + px + q),$$

d. i., wenn man die Producte entwickelt:

$$\begin{array}{l} x^5 + P \left.\begin{array}{l} \\ + p' \end{array}\right\} x^4 + Q \left.\begin{array}{l} \\ + Pp' \\ + q' \end{array}\right\} x^3 + R \left.\begin{array}{l} \\ + Qp' \\ + Pq' \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} \\ + Rp' \\ + Qq' \end{array}\right\} x + Rq' \\ = x^5 + P' \left.\begin{array}{l} \\ + p \end{array}\right\} x^4 + Q' \left.\begin{array}{l} \\ + P'p \\ + q \end{array}\right\} x^3 + R' \left.\begin{array}{l} \\ + Q'p \\ + P'q \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} \\ + R'p \\ + Q'q \end{array}\right\} x + R'q. \end{array}$$

Da nun diese Gleichung unabhängig von jedem besondern Werthe von x Statt finden muß; so ist

$$P + p' = P' + p$$
$$Q + Pp' + q' = Q' + P'p + q$$
$$R + Qp' + Pq' = R' + Q'p + P'q$$
$$Rp' + Qq' = R'p + Q'q$$
$$Rq' = R'q$$

oder

$$p - p' = P - P'$$
$$P'p - Pp' + q - q' = Q - Q'$$
$$Q'p - Qp' + P'q - Pq' = R - R'$$
$$R'p - Rp' + Q'q - Qq' = 0$$
$$R'q - Rq' = 0.$$

Dies sind fünf Gleichungen des ersten Grades mit den vier unbekannten Größen p, p′, q, q′. Aus den vier ersten dieser Gleichungen kann man also q, q′ nach den allgemeinen Regeln in I. finden, und erhält dann, wenn man die gefundenen Ausdrücke für q und q′ in die fünfte Gleichung setzt, die gesuchte, x nicht mehr enthaltende, Gleichung.

Wären

$$x^2 + Px + Q = 0,$$
$$x^2 + P'x + Q' = 0$$

die beiden gegebenen Gleichungen, so wäre auf ähnliche Art wie vorher:

$$x^2 + Px + Q = (x-\alpha)(x+p),$$
$$x^2 + P'x + Q' = (x-\alpha)(x+p');$$

folglich für jedes x:

$$(x^2 + Px + Q)(x+p') = (x^2 + P'x + Q')(x+p),$$

d. i.

$$x^3 + \left.\begin{matrix}P\\ p'\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}Q\\ Pp'\end{matrix}\right\} x + Qp' = x^3 + \left.\begin{matrix}P'\\ p\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}Q'\\ P'p\end{matrix}\right\} x + Q'p;$$

folglich

$$P + p' = P' + p \text{ oder } p - p' = P - P',$$
$$Q + Pp' = Q' + P'p \qquad P'p - Pp' = Q - Q',$$
$$Qp' = Q'p \qquad Q'p - Qp' = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben:

$$p = \frac{P(P-P') - (Q-Q')}{P-P'},$$

$$p' = \frac{P'(P-P') - (Q-Q')}{P-P'},$$

und durch Einführung dieser Werthe in die dritte Gleichung kommt die Gleichung:

$$(P-P')(PQ'-P'Q) + (Q-Q')^2 = 0,$$

welche nun x nicht mehr enthält.

Sind die beiden gegebenen Gleichungen von verschiedenen Graden, z. B.

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0;$$

so ist

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x-\alpha)(x^2 + px + q),$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x-\alpha)(x^3 + p'x^2 + q'x + r');$$

folglich

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^3 + p'x^2 + q'x + r')$$
$$= (x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S')(x^2 + px + q),$$

woraus auf ähnliche Art wie vorher die Gleichungen

$$\begin{aligned} p - p' &= P - P', \\ P'p - Pp' + q - q' &= Q - Q', \\ Q'p - Qp' + P'q - Pq' - r' &= R - R', \\ R'p - Rp' + Q'q - Qq' - Pr' &= -S', \\ S'p + R'q - Rq' - Qr' &= 0, \\ S'q - Rr' &= 0 \end{aligned}$$

sich ergeben, nämlich sechs Gleichungen des ersten Grades mit fünf unbekannten Größen. Bestimmt man q, r' aus den fünf ersten Gleichungen, und setzt die gefundenen Werthe in die sechste Gleichung, so erhält man die gesuchte Final-Gleichung, welche x nicht mehr enthält.

Diese Eliminationsmethode, deren Allgemeinheit man leicht übersehen wird, mag die vorzüglich bei französischen Schriftstellern über die Algebra häufig sich findende sogenannte Methode des gemeinschaftlichen Theilers ersetzen, da die letztere sich uns keineswegs durch ihre Einfachheit und Leichtigkeit in der Anwendung zu empfehlen scheint, wie z. B. auch Gergonne a. a. O. (p. 45) urtheilt, indem er sich zugleich gewissermaaßen darüber lustig macht, daß es in Frankreich eine Zeit gegeben habe, ou cette méthode d'élimination était tellement en faveur, que les examens aux écoles des services publics ne roulaient, pour ainsi dire, que sur elle; on était admis ou rejeté suivant qu'on la possedait bien ou mal. Eine recht gute und ausführliche Auseinandersetzung derselben s. m. in Francoeur cours complet de Mathématiques pures. T. II. Paris. 1828. p. 63., so wie auch in den bekannten Elementar-Werken über die Algebra von Lacroix. Wer größere Ausführlichkeit über die verschiedenen Eliminationsmethoden, auch allgemeine Darstellungen, verlangt, findet volle Befriedigung in Meier Hirsch Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Theil I. Berlin 1809. S. 103—146. Neue Eliminirungs-Methode von Grüson in den Abhandlungen der mathematischen Klasse der Berliner Akademie für 1816. 17. Berlin. 1819. S. 1—10. Auch s. m. den mit der Theorie der Elimination zusammenhängenden Aufsatz des den mathematischen Wissenschaften zu früh entrissenen Abel: Recherche de la quantité, qui satisfait à la fois à deux équations algebriques données. Annales de Mathém. T. XVII. p. 204.

9. Der Beweis eines wichtigen Lehrsatzes mag diesen ergänzenden Artikel beschließen. Man habe nämlich zwischen den zwei unbekannten Größen x, y die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L &= 0, \\ A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + \ldots + M'x + N' &= 0, \end{aligned}$$

wo die Coefficienten der Potenzen von x sämmtlich rationale

ganze Functionen von y sind. Die erste Gleichung sey vom nten, die zweite vom mten Grade. Dann sind A, B, C, ... K, L Functionen von y vom Grade 0, 1, 2, ..., n—1, n, so wie A', B', C', ...M', N' Functionen von y vom Grade 0, 1, 2, ..., m—1, m, wie sogleich erhellen wird. Wenigstens übersteigen diese Functionen von y keinen der genannten Grade. Da also A und A' constante Größen sind, so kann man sich die gegebenen Gleichungen auch auf die Form

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \ldots + Sx + T = 0,$$
$$x^m + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} + \ldots + V'x + W' = 0$$

gebracht denken, wo nun P, Q, ..., S, T ganze rationale Functionen von y vom Grade 1, 2, 3, ... n—1, n, dagegen P', Q', ..., V', W' ganze rationale Functionen von y vom Grade 1, 2, 3, ... m—1, m sind. Man denke sich jetzt die beiden gegebenen Gleichungen nach x aufgelöst, und bezeichne die Wurzeln der erstern, welche sämmtlich Functionen von y und an der Zahl n sind, durch

$$p, q, \ldots s, t, u,$$

die Wurzeln der andern, welche ebenfalls Functionen von y und an der Zahl m sind, durch

$$p', q', v', \ldots w', r'.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} U = {} & (p-p')(p-q')\ldots(p-v')(p-w')(p-r') \\ & \times (q-p')(q-q')\ldots(q-v')(q-w')(q-r') \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times (s-p')(s-q')\ldots(s-v')(s-w')(s-r') \\ & \times (t-p')(t-q')\ldots(t-v')(t-w')(t-r') \\ & \times (u-p')(u-q')\ldots(u-v')(u-w')(u-r'), \end{aligned}$$

so ist klar, daß, wenn die beiden gegebenen Gleichungen, wie erfordert wird, zusammen existiren sollen,

$$U = 0$$

seyn muß, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, keine der Wurzeln

$$p, q, \ldots s, t, u$$

einer unter den Wurzeln

$$p', q', \ldots v', w', r'$$

gleich seyn könnte, welches doch nothwendig erfordert wird, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zugleich Statt finden sollen. Die Gleichung

$$U = 0$$

ist also die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muß, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zusammen existiren sollen, d. h. eben die Gleichung, welche aus der Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen hervorgeht, und es kommt uns nun hier vorzüglich darauf an, den Grad, bis zu welchem diese Gleichung steigen kann, zu beurtheilen, wozu wir, wie es uns

scheint, am leichtesten durch folgendes, zuerst von Cauchy in seinen Exercices de Mathématiques. Livraison 40 et 41. Paris 1828. p. 128. angewandte, Raisonnement gelangen, wobei wir nur bemerken, daß, um jetzt den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, nachher in (10.) besonders bewiesen werden soll, daß U jederzeit eine ganze rationale Function von y ist. Nach dem Obigen sind

$$P, Q, .. S, T; P', Q', .. V', W'$$

respective Functionen von y vom Grade

$$1, 2, .. n-1, n; 1, 2, ... m-1, m .$$

Daher bleiben

$$\frac{P}{y}, \frac{Q}{y^2}, .. \frac{S}{y^{n-1}}, \frac{T}{y^n}; \frac{P'}{y}, \frac{Q'}{y^2}, .. \frac{V'}{y^{m-1}}, \frac{W'}{y^m}$$

im Allgemeinen endlich für unendlich große Werthe von y. Dasselbe läßt sich also auch von den Werthen von z sagen, durch welche den beiden Gleichungen

$$z^n + \frac{P}{y} z^{n-1} + \frac{Q}{y^2} z^{n-2} + .. + \frac{S}{y^{n-1}} z + \frac{T}{y^n} = 0 ,$$

$$z^m + \frac{P'}{y} z^{m-1} + \frac{Q'}{y^2} z^{m-2} + .. + \frac{V'}{y^{m-1}} z + \frac{W'}{y^m} = 0$$

genügt wird. Da aber diese Gleichungen sich leicht auf die Form

$$(zy)^n + P(zy)^{n-1} + Q(zy)^{n-2} + .. + S(zy) + T = 0 ,$$

$$(zy)^m + P'(zy)^{m-1} + Q'(zy)^{m-2} + .. + V'(zy) + W' = 0$$

bringen lassen, so erhellet aus Vergleichung dieser Gleichungen mit den Gleichungen

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + ... + Sx + T = 0 ,$$

$$x^m + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} + ... + V'x + W' = 0$$

auf der Stelle, daß die Werthe von z, durch welche den beiden obigen Gleichungen genügt wird,

$$\frac{p}{y}, \frac{q}{y}, .. \frac{s}{y}, \frac{t}{y}, \frac{u}{y}; \frac{p'}{y}, \frac{q'}{y}, .. \frac{v'}{y}, \frac{w'}{y}, \frac{r'}{y}$$

sind, so daß also auch diese Brüche für unendlich große y nicht unendlich werden. Daher wird auch das Product

$$\left(\frac{p}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{p}{y} - \frac{q'}{y}\right) .. \left(\frac{p}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{p}{y} - \frac{w'}{y}\right)\left(\frac{p}{y} - \frac{r'}{y}\right)$$

$$\times \left(\frac{q}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{q}{y} - \frac{q'}{y}\right) .. \left(\frac{q}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{q}{y} - \frac{w'}{y}\right)\left(\frac{q}{y} - \frac{r'}{y}\right)$$

. . . . . .

$$\times \left(\frac{s}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{s}{y} - \frac{q'}{y}\right) .. \left(\frac{s}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{s}{y} - \frac{w'}{y}\right)\left(\frac{s}{y} - \frac{r'}{y}\right)$$

$$\times \left(\frac{t}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{t}{y} - \frac{q'}{y}\right) .. \left(\frac{t}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{t}{y} - \frac{w'}{y}\right)\left(\frac{t}{y} - \frac{r'}{y}\right)$$

$$\times \left(\frac{u}{y} - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{u}{y} - \frac{q'}{y}\right) .. \left(\frac{u}{y} - \frac{v'}{y}\right)\left(\frac{u}{y} - \frac{w'}{y}\right)\left(\frac{u}{y} - \frac{r'}{y}\right) ,$$

welches offenbar $= \frac{U}{y^{mn}}$ ist, für unendlich große y nicht unendlich, woraus man also auf der Stelle schließt, daß der Grad von U oder der aus der Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen hervorgehenden Gleichung

$$U = 0$$

das Product mn nicht übersteigen kann, welches ein für die Theorie der Elimination sehr wichtiges Theorem ist, da die verschiedenen Eliminationsmethoden, wenn nicht besondere Vorsicht angewendet wird, häufig auf diesen Grad übersteigende Final-Gleichungen führen.

Auch Bezout hat diesen wichtigen Lehrsatz, der auch in der höhern Geometrie bei Bestimmung der Anzahl der Durchschnittspunkte zweier Curven verschiedener Grade von besonderer Wichtigkeit ist, in seiner Théorie générale des équations bewiesen, und Lacroix einen diesem ähnlichen Beweis im Traité du calcul diff. et du calcul int. T. III. p. 186. mitgetheilt. Einfacher und auf mehr elementarem Wege hat Poisson den Satz im Journal de l'école polytechnique. II. bewiesen, und dieser Beweis ist nachher in verschiedene Elementarwerke, z. B. das Complement d'Algèbre von Lacroix §. 9., Meier Hirsch a. a. O. §. 78., Francoeur a. a. O. T. II. §. 561. übergegangen. Auch s. m. Démonstration sur le nombre des points d'intersection de deux lignes courbes par L. Euler in den Mém. de Berlin. 1748.

10. Es liegt uns nun noch der Beweis ob, daß das im Vorhergehenden durch U bezeichnete Product jederzeit eine ganze rationale Function von y ist. Um dies beweisen zu können, müssen wir von einigen allgemeinen Betrachtungen über die symmetrischen Functionen ausgehen, und bedienen uns dabei eines von Gauß bei einer andern Gelegenheit (Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. §. 4.) gebrauchten sehr einfachen Raisonnements. Seyen nämlich a, b, c, d, ... gewisse unbestimmte Größen, an der Zahl n. Die Summe dieser Größen oder ihrer Unionen setze man $= \lambda'$, die Summe ihrer Binionen $= \lambda''$, die Summe ihrer Ternionen $= \lambda'''$, u. s. f. alle diese Verbindungen ohne Wiederholungen gedacht; so läßt sich beweisen, daß jede rationale ganze symmetrische Function (s. diesen Artikel) von a, b, c, d, ... als eine ganze Function von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... dargestellt werden kann. Jede rationale ganze symmetrische Function ϱ von a, b, c, d, ... besteht nämlich aus einer gewissen Anzahl von Gliedern von der Form

$$Ma^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots,$$

wo α, β, γ, δ, ... positive ganze Zahlen sind, und M einen

von a, b, c, d, ... nicht abhängenden Coefficienten bezeichnet. Die Größen a, b, c, d, ... wollen wir immer in dieser Ordnung auf einander folgen lassen, und von den zwei beliebigen Gliedern

$$Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots. \text{ und } M'a^{\alpha'}b^{\beta'}c^{\gamma'}d^{\delta'}\ldots..$$

der symmetrischen Function ϱ soll das erste höher als das zweite genannt werden, wenn $\alpha > \alpha'$, oder $\alpha = \alpha'$, $\beta > \beta'$, oder $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma > \gamma'$, oder $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta > \delta'$, u. s. f. überhaupt von den Differenzen

$$\alpha - \alpha',\ \beta - \beta',\ \gamma - \gamma',\ \delta - \delta',\ \ldots..$$

die erste, welche nicht verschwindet, positiv ist. Da alle Glieder derselben Ordnung, wie sich von selbst versteht, durch Addition ihrer Coefficienten sich in ein Glied vereinigen lassen, so kann man annehmen, daß alle Glieder der symmetrischen Function ϱ zu verschiedenen Ordnungen gehören.

Zuerst ist nun zu bemerken, daß, wenn $Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots.$ das höchste Glied der Function ϱ ist, α nicht kleiner als β seyn kann. Wäre nämlich $\beta > \alpha$, so wäre das Glied $M'a^{\beta}b^{\alpha}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots.$, welches die Function ϱ als eine symmetrische Function von a, b, c, d, ... nothwendig auch enthalten muß, da $\beta - \alpha$ positiv und nicht $= 0$ ist, höher als $Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots..$, dieses Glied also nicht das höchste, wie doch angenommen wurde. Ganz auf ähnliche Art zeigt man, daß unter der obigen Voraussetzung β nicht kleiner als γ, γ nicht kleiner als δ, δ nicht kleiner als ε seyn kann, u. s. w. Wäre nämlich z. B. $\delta > \gamma$, so wäre das Glied $M'a^{\alpha}b^{\beta}c^{\delta}d^{\gamma}\ldots.$, welches die symmetrische Function ϱ nothwendig auch enthalten muß, da $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$, $\delta > \gamma$ ist, höher als das Glied $Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots.$, welches doch das höchste seyn sollte. Ist also $Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots.$ das höchste Glied in ϱ, so ist keine der Differenzen

$$\alpha - \beta,\ \beta - \gamma,\ \gamma - \delta,\ \delta - \varepsilon,\ \ldots.$$

negativ.

Ferner ist klar, daß, wenn aus mehrern ganzen Functionen von a, b, c, d, ... ein Product gebildet wird, das höchste Glied dieses Products das Product der höchsten Glieder der einzelnen Factoren ist. Die höchsten Glieder von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... sind aber nach der obigen Erklärung offenbar a, ab, abc, abcd, und das höchste Glied des Products

$$p = M\lambda'^{\alpha-\beta}\lambda''^{\beta-\gamma}\lambda'''^{\gamma-\delta}\lambda^{\text{IV}\,\delta-\varepsilon}\ldots..,$$

wo nach dem Vorhergehenden kein Exponent negativ ist, ist also

$$Ma^{\alpha-\beta}(ab)^{\beta-\gamma}(abc)^{\gamma-\delta}(abcd)^{\delta-\varepsilon}\ldots = Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots.,$$

wobei man nur nicht zu vergessen hat, daß die Reihe der Differenzen

$$\alpha - \beta,\ \beta - \gamma,\ \gamma - \delta,\ \delta - \varepsilon,\ \ldots.$$

so weit fortgesetzt werden muß, bis diese Differenzen von selbst verschwinden. Da also die höchsten Glieder von ϱ und dem Producte p identisch sind, so ist, wenn man $\varrho - p = \varrho'$ setzt, das höchste Glied von ϱ' offenbar von einer niedrigern Ordnung, als das höchste Glied der Function ϱ. Zugleich aber ist klar, daß p, und folglich auch ϱ', ganze rationale symmetrische Functionen von a, b, c, d, ... sind. So wie man nun $\varrho - p = \varrho'$ oder $\varrho = p + \varrho'$ gefunden hat, so findet man nach und nach:

$$\varrho = p + \varrho', \quad \varrho' = p' + \varrho'', \quad \varrho'' = p'' + \varrho''', \quad \varrho''' = p''' + \varrho^{IV}, \ldots,$$

und die höchsten Glieder in den symmetrischen Functionen ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ϱ^{IV}, ... gehören einer desto niedrigern Ordnung an, je weiter man sich in dieser Reihe vom Anfange entfernt, d. h. das höchste Glied in ϱ' ist von einer niedrigern Ordnung als das höchste Glied in ϱ, das höchste Glied in ϱ'' von einer niedrigern Ordnung als das höchste Glied in ϱ', das höchste Glied in ϱ''' von einer niedrigern Ordnung als das höchste Glied in ϱ'', u. s. w. p, p', p'', p''', ... sind sämmtlich ganze rationale Functionen von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... von einer ganz ähnlichen Form wie oben p. Da nun die Abnahme der Ordnungen der höchsten Glieder in ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ϱ^{IV}, ... offenbar nicht ins Unendliche fortgehen kann; so ist klar, daß man

$$\varrho = p + p' + p'' + p''' + \ldots.$$

setzen, d. h. jede ganze rationale symmetrische Function von a, b, c, d, ... als eine ganze rationale Function von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... darstellen kann.

Ist nun

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + M = 0$$

eine Gleichung des nten Grades, deren n Wurzeln a, b, c, d.... sind, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} &x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + M \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots, \\ &= x^n - \lambda' x^{n-1} + \lambda'' x^{n-2} - \lambda''' x^{n-3} + \ldots, \end{aligned}$$

und folglich die Reihe der Coefficienten A, B, C, .. L, M mit der Reihe $-\lambda'$, λ'', $-\lambda'''$, λ^{IV}, ..., oder die Reihe $-A$, B, $-C$, D, ... mit der Reihe λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... identisch. Da sich nun jede ganze rationale symmetrische Function von a, b, c, d, ... als eine ganze rationale Function von λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... darstellen läßt, so läßt sich also auch jede ganze rationale symmetrische Function von a, b, c, d, ... als eine ganze rationale Function von A, B, C, D, .. L, M darstellen, woraus sich das folgende überaus wichtige Theorem ergiebt:

Jede ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung kann immer als eine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung dargestellt werden.

Mit Hülfe dieses Satzes kann nun auf folgende Art bewiesen werden, daß das oben durch U bezeichnete Product jederzeit eine ganze rationale Function von y ist. Nach (9.) sind p', q', ... v', w', r' die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} + \ldots + V'x + W' = 0,$$

und folglich der erste Theil dieser Gleichung

$$= (x-p')(x-q')\ldots(x-v')(x-w')(x-r'),$$

für jedes x. Also ist auch nach (9.)

$$\begin{aligned} U = {} & (p^m + P'p^{m-1} + Q'p^{m-2} + \ldots + V'p + W') \\ & \times (q^m + P'q^{m-1} + Q'q^{m-2} + \ldots + V'q + W') \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times (s^m + P's^{m-1} + Q's^{m-2} + \ldots + V's + W') \\ & \times (t^m + P't^{m-1} + Q't^{m-2} + \ldots + V't + W') \\ & \times (u^m + P'u^{m-1} + Q'u^{m-2} + \ldots + V'u + W'), \end{aligned}$$

Dieses Product ändert aber offenbar seinen Werth nicht, wenn man zwei beliebige der Größen p, q, ... s, t, u mit einander vertauscht, und wird also, wenn man es sich entwickelt denkt, bloß symmetrische Functionen dieser Größen enthalten. Da aber p, q, ... s, t, u die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \ldots + Sx + T = 0$$

sind, so können alle diese symmetrischen Functionen von p, q, ... s, t, u als ganze rationale Functionen der Coefficienten P, Q, ... S, T dargestellt werden, wie vorher bewiesen worden ist, und das Product U ist also offenbar eine ganze rationale Function von P, Q, ... S, T; P', Q', ... V', W'. Alle diese Coefficienten sind aber bekanntlich ganze rationale Functionen von y; also ist auch U eine ganze rationale Function von y, wie behauptet wurde.

Nach dieser nöthigen Ergänzung zu (9.), auf welche dort auch schon vorläufig hingewiesen wurde, ist nun das wichtige Theorem in (9.) in völliger Strenge und Allgemeinheit erwiesen.

Ellipse. Eine der schönsten Aufgaben über die Ellipse ist die Aufgabe von der Bestimmung der größten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt. Gauß hat im zwei und zwanzigsten Bande der monatlichen Correspondenz S. 113, eine sehr schöne und in vieler Rücksicht höchst instructive Auflösung dieser Aufgabe gegeben, und auch Pfaff, Mollweide, Schumacher haben sich mit derselben beschäftigt, a. a. O. S. 223, 227, 507. Mehrere merkwürdige Eigenschaften der Ellipse s. m. im Art. Elliptische Functionen XII. i. d. Z.

Elliptische Functionen. Die Theorie der elliptischen Functionen, welche in neuester Zeit mehrere der ausgezeichnetsten

Mathematiker so sehr beschäftigt hat, und diese ihr gewidmete Aufmerksamkeit ihrer großen Wichtigkeit wegen in der That auch mit dem vollsten Rechte verdient, steht mit der Integration der irrationalen algebraischen Functionen im genauesten Zusammenhange, weshalb wir zuerst über diese letztere, um völlig deutlich zu werden und eben diesen Zusammenhang nachzuweisen, einige allgemeine Betrachtungen voraus schicken müssen.

I. Integration von

$$X\partial x\sqrt{A+Bx+Cx^2} \text{ und } \frac{X\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

wenn X eine rationale Function von x ist.

1. Jede dieser beiden Functionen kann leicht auf die Form der andern gebracht werden. Will man nämlich z. B. die erste auf die Form der zweiten bringen, so erhält man auf der Stelle

$$X\partial x\sqrt{A+Bx+Cx^2} =$$

$$X\partial x\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}\cdot\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{(A+Bx+Cx^2)X\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

welches offenbar die verlangte Form ist.

Um nun die beiden gegebenen Formeln rational zu machen, sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist zuerst C positiv, so setze man

$$\frac{A}{C} = \alpha,\ \frac{B}{C} = \beta,\ C = \gamma^2.$$

Dann ist

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2} = \gamma\sqrt{\alpha+\beta x+x^2},$$

und folglich, wenn man

$$\sqrt{\alpha+\beta x+x^2} = z+x,\ \alpha+\beta x = 2xz+z^2,\ x = \frac{\alpha-z^2}{2z-\beta}$$

setzt:

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2} = \gamma(z+x) = \gamma\left(\frac{\alpha-\beta z+z^2}{2z-\beta}\right).$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$\partial x = -\frac{2(\alpha-\beta z+z^2)\partial z}{(2z-\beta)^2}.$$

Führt man nun die gefundenen rationalen Ausdrücke von

$$x,\ \sqrt{A+Bx+Cx^2},\ \partial x$$

in die eine oder die andere der beiden gegebenen Differentialformeln ein, so werden dieselben offenbar auf die Form $Z\partial z$, wo

Z eine rationale Function von z ist, gebracht, und lassen sich folglich, wie bekannt, immer integriren.

Ist ferner C negativ, so stelle man die Radicalgröße unter der diesem Falle entsprechenden Form $\sqrt{A + Bx - Cx^2}$ dar, und setze nun wieder

$$\frac{A}{C} = \alpha, \quad \frac{B}{C} = \beta, \quad C = \gamma^2;$$

also

$$\sqrt{A+Bx-Cx^2} = \gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}.$$

Ferner setze man

$$x^2 - \beta x - \alpha = (x-a)(x-b), \quad \alpha + \beta x - x^2 = (x-a)(b-x),$$

wo die Factoren $x-a$, $x-b$ durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \beta x - \alpha = 0$$

gefunden werden, und mache

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (x-a)z;$$

so ist

$$x = \frac{az^2+b}{z^2+1}, \quad \sqrt{A+Bx-Cx^2} = \frac{\gamma(b-a)z}{z^2+1}, \quad \partial x = \frac{2(a-b)z\partial z}{(z^2+1)^2},$$

und durch Substitution dieser rationalen Ausdrücke wird jede der gegebenen Differentialformeln wieder auf die Form $Z\partial z$ gebracht, wo Z eine rationale Function von z bezeichnet. Zu bemerken ist hierbei noch, daß man immer annehmen kann, daß die Factoren $x-a$ und $x-b$ beide reell sind. Wären nämlich diese Factoren imaginär, so wäre, da dieselben durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \beta x - \alpha = 0$$

gefunden werden,

$$x = \tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{\alpha + \tfrac{1}{4}\beta^2}$$

eine imaginäre Größe, folglich $\alpha + \frac{1}{4}\beta^2$ negativ, also nothwendig α negativ und dem absoluten Werthe nach größer als $\frac{1}{4}\beta^2$. In diesem Falle ist aber, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann, $\alpha + \beta x - x^2$ für jedes x eine negative Größe. Da α negativ ist, so wollen wir diese Größe zweckmäßiger für den folgenden Beweis unter der Form $-\alpha + \beta x - x^2$ darstellen, und zuerst annehmen, daß β positiv sey. Ist nun x negativ, so ist diese Größe offenbar immer negativ. Ist aber x positiv, so folgt aus dem Obigen

$$\alpha > \tfrac{1}{4}\beta^2, \quad \alpha + x^2 > \tfrac{1}{4}\beta^2 + x^2;$$

aber

$$(x - \tfrac{1}{2}\beta)^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}\beta^2 - \beta x;$$

und daher die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stets positiv, d. i.

$$\tfrac{1}{2}\beta^2 + x^2 > \beta x ;$$

also um so mehr

$$\alpha + x^2 > \beta x ,$$

oder $-\alpha + \beta x - x^2$ auch für jedes positive x eine negative Größe. Der Beweis für den Fall, wenn β negativ ist, ist von dem vorhergehenden nicht wesentlich verschieden. Man sieht also, daß in dem Falle imaginärer Factoren $\alpha + \beta x - x^2$, und folglich auch

$$\gamma^2(\alpha + \beta x - x^2) = A + Bx - Cx^2$$

für jedes x negativ, d. i.

$$\gamma\overline{A + Bx - Cx^2} ,$$

so wie also offenbar auch

$$\int \frac{X\partial x}{\gamma\overline{A + Bx - Cx^2}}$$

oder

$$\int X\partial x\,\gamma\overline{A + Bx - Cx^2}$$

für jedes x imaginär ist. In diesem Falle wird man daher, wenn wir bloß bei dem ersten der beiden vorhergehenden Integrale stehen bleiben,

$$\int \frac{X\partial x}{\gamma\overline{A+Bx-Cx^2}} = \int \frac{X\partial x}{\gamma-1 \cdot \gamma\overline{-A-Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\gamma-1}\int \frac{X\partial x}{\gamma\overline{-A-Bx+Cx^2}}$$

setzen, welches wieder auf den oben zuerst betrachteten Fall führt.

Man sieht also, daß die gegebenen Differentialformeln in allen Fällen integrirt werden können. Anwendungen der allgemeinen Regeln auf specielle Fälle würden leicht seyn, gehören aber nicht zu unserm Zweck, da es uns hier bloß auf die Rechtfertigung der so eben ausgesprochenen allgemeinen Bemerkung ankam.

II. Allgemeine Bemerkungen über $\int \frac{P\partial x}{R}$.

2. Auf vorstehendes Integral, in welchem P immer eine rationale Function von x bezeichnen, und

$$R = \gamma\overline{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$$

seyn soll, lassen sich sehr viele andere Integrale irrationaler algebraischer Functionen zurückführen, weshalb dasselbe der Gegenstand sehr ausgedehnter besonderer Untersuchungen von Euler, Lagrange und andern berühmten Mathematikern geworden ist. Um in dieser Beziehung nur ein Paar der einfachsten Fälle zu erwähnen, so übersieht man z. B. augenblicklich, daß das Integral

$$\int Q\partial x \frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A'+B'x+C'x^2}}$$

die Form des in Rede stehenden Integrals erhält, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs mit dem Zähler multiplicirt, vorausgesetzt, daß Q eine rationale Function von x ist. Setzt man ferner in dem Integral

$$\int \frac{P\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}},$$

wo P eine rationale Function von x bezeichnet, $x^2 = z$; so läßt sich P offenbar immer auf die Form

$$\frac{M'+N'\sqrt{z}}{M''+N''\sqrt{z}} = \frac{(M'+N'\sqrt{z})(M''-N''\sqrt{z})}{M''^2-N''^2 z} = M+N\sqrt{z},$$

wo M und N rationale Functionen von z sind, bringen, und unser Integral erhält also durch die in Rede stehende Substitution offenbar die Form

$$\int \frac{M\partial z}{2\sqrt{z}\cdot\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}} + \int \frac{N\partial z}{2\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}},$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{M\partial z}{\sqrt{\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{N\partial z}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}},$$

welches zwei Integrale von der Form unsers allgemeinen Integrals sind.

Jedes Integral $\int X\partial x$, wo X eine rationale Function von x und R ist, läßt sich ebenfalls immer auf das Integral $\int \frac{P\partial x}{R}$ zurückführen. Da nämlich X eine rationale Function von x und R ist, so hat X offenbar die Form

$$X = \frac{A+BR}{C+DR},$$

wo A, B, C, D rationale Functionen von x sind. Nun ist, wenn man Zähler und Nenner dieses Bruchs mit C — DR multiplicirt,

$$X = \frac{AC-BDR^2}{C^2-D^2R^2} - \frac{(AD-BC)R}{C^2-D^2R^2}$$
$$= \frac{AC-BDR^2}{C^2-D^2R^2} - \frac{(AD-BC)R^2}{C^2-D^2R^2}\cdot\frac{1}{R} = N - \frac{P}{R},$$

wo N und P rationale Functionen von x sind. Folglich ist

$$\int X\partial x = \int N\partial x - \int \frac{P\partial x}{R},$$

und daher dieses Integral, weil N rational ist, $\int N\partial x$ sich also immer finden läßt, wieder auf $\int \frac{P\partial x}{R}$ zurückgeführt.

Hat man das Integral

$$\int P\partial x(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}},$$

so setze man $x = k + \frac{1}{y}$. Dann wird

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)y^3$$
$$= (\alpha + \beta k + \gamma k^2 + \delta k^3)y^3 + (\beta + 2\gamma k + 3\delta k^2)y^2$$
$$+ (\gamma + 3\delta k)y + \delta .$$

Nimmt man nun für k eine reelle Wurzel der Gleichung

$$\alpha + \beta k + \gamma k^2 + \delta k^3 = 0 ,$$

so wird

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = \frac{\alpha' + \beta' y + \gamma' y^2}{y^3} ,$$

und man kann also, wenn P eine rationale Function von x bezeichnet, unser Integral offenbar immer auf die Form

$$\int P\partial x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\pm\frac{1}{3}}.$$

bringen. Setzt man nun

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = z^3 ,$$

so ist

$$x = -\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3}}{2\gamma} ,$$

und nach gehöriger Substitution erhält man ein Integral von der Form

$$\int \frac{Q\partial z}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3}} ,$$

wo wieder Q eine rationale Function von z ist. Man kann auch

$$\sqrt[3]{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = \sqrt[3]{\alpha} + xz ,$$

oder

$$\sqrt[3]{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = x\sqrt[3]{\delta} + z$$

setzen, wodurch man, wenn man auf beiden Seiten auf die dritte Potenz erhebt, Gleichungen erhält, welche in Bezug auf x vom zweiten Grade sind, und aus denen sich also x durch z bestimmen läßt. Nach gehöriger Substitution erhält man Integrale von der allgemeinen Form $\int \frac{P\partial x}{R}$.

Der Raum gebietet uns, diesen speciellen Bemerkungen ein Ziel zu setzen. Dieselben sollten bloß dazu dienen, um auf die große Wichtigkeit des Integrals $\int \frac{P\partial x}{R}$ hinzuweisen, und wir gehen nun zu einigen Transformationen dieses Integrals über, welche uns von selbst zu den elliptischen Functionen, dem eigent-

lichen Gegenstande dieses Artikels, führen und zeigen werden, daß sich das in Rede stehende Integral immer auf elliptische Functionen bringen läßt, wodurch dann von selbst die große Wichtigkeit der letztern für die ganze Integralrechnung nachgewiesen ist.

III. Erste Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$.

3. Zuerst wollen wir zeigen, daß sich dieses Integral immer so umformen läßt, daß der Nenner unter dem Wurzelzeichen keine ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe enthält. Zu dem Ende setze man

$$x = \frac{p + qy}{1 + y},$$

wo p und q zwei noch zu bestimmende Größen bezeichnen, und zerlege

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

in die beiden reellen Factoren des zweiten Grades

$$f + 2gx + hx^2, \; f' + 2g'x + h'x^2,$$

welches bekanntlich immer möglich ist. Nach gehöriger Substitution des oben für x gesetzten Ausdrucks in das Product

$$(f + 2gx + hx^2)(f' + 2g'x + h'x^2)$$

erhält man für dasselbe einen Ausdruck von der Form

$$\frac{R'}{(1 + y)^4},$$

wo R' eine ganze rationale Function des vierten Grades von y ist, und findet nach gehöriger Entwickelung, daß in derselben die Coefficienten von y und y^3 verschwinden, wenn man p und q aus den Gleichungen

$$f + g(p + q) + hpq = 0,$$
$$f' + g'(p + q) + h'pq = 0$$

bestimmt. Für $p + q$ und pq ergeben sich aus diesen beiden Gleichungen rationale Werthe, welche wir durch m und n bezeichnen wollen, so daß also

$$p + q = m, \; pq = n$$

ist. Erhebt man beide Theile der ersten Gleichung auf's Quadrat und zieht $4pq = 4n$ ab, so erhält man

$$(p - q)^2 = m^2 - 4n,$$

und hat folglich zur Bestimmung von p und q die Gleichungen

$$p + q = m, \; p - q = \sqrt{m^2 - 4n},$$

aus denen sich

$$p = \tfrac{1}{2}(m + \sqrt{m^2 - 4n}), \; q = \tfrac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 - 4n})$$

ergiebt und zugleich erhellet, daß p und q nur dann reelle Größen sind, wenn $m^2 - 4n$ positiv ist. Merkwürdig ist es aber, daß die Rechnung, wie wir nun zeigen wollen, immer so angeordnet werden kann, daß man für p und q reelle Werthe erhält. Wir unterscheiden bei dem Beweise dieser Behauptung zwei Fälle.

Hat zuerst

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

imaginäre Factoren des ersten Grades, so sind dieselben immer in gerader Anzahl vorhanden, und diese Größe kann folglich nur entweder zwei oder vier imaginäre Factoren haben. Man kann also in diesem Falle immer voraussetzen, daß die Factoren des ersten Grades von $f + 2gx + hx^2$ beide imaginär sind. Durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \frac{2g}{h}x + \frac{f}{h} = 0$$

erhält man

$$x = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - fh}}{h},$$

so daß also, weil beide Factoren von $f + 2gx + hx^2$, folglich auch von

$$x^2 + \frac{2g}{h}x + \frac{f}{h}$$

imaginär sind, $g^2 - fh$ negativ, oder $fh - g^2$ positiv ist. Aus der Gleichung

$$f + g(p + q) + hpq = 0$$

folgt aber

$$(p + q)^2 = \left(\frac{f + hpq}{g}\right)^2;$$

also

$$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = \left(\frac{f + hpq}{g}\right)^2 - 4pq$$

$$= \left(\frac{f + hpq}{g} - \frac{2g}{h}\right)^2 + \frac{4(fh - g^2)}{h^2},$$

so daß folglich, weil nach dem Obigen $fh - g^2$ positiv ist, auch

$$(p-q)^2 = m^2 - 4n$$

positiv ist, also p und q reell sind.

Sind ferner alle Factoren des ersten Grades von

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

reell, so seyen a, b, c, d die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon}x + \frac{\gamma}{\varepsilon}x^2 + \frac{\delta}{\varepsilon}x^3 + x^4 = 0,$$

welche also auch sämmtlich reell sind. Unter dieser Voraussetzung kann man offenbar

$$\frac{f}{h} + \frac{2g}{h}x + x^2 = (x-a)(x-b),$$

$$\frac{f'}{h'} + \frac{2g'}{h'}x + x^2 = (x-c)(x-d)$$

setzen, woraus

$$f = abh,\ g = -\tfrac{1}{2}(a+b)h;$$
$$f' = cdh',\ g' = -\tfrac{1}{2}(c+d)h';$$

also nach dem Obigen

$$abh - \tfrac{1}{2}(a+b)h(p+q) + hpq = ,$$
$$cdh' - \tfrac{1}{2}(c+d)h'(p+q) + h'pq = 0,$$

oder

$$ab - \tfrac{1}{2}(a+b)(p+q) + pq = 0,$$
$$cd - \tfrac{1}{2}(c+d)(p+q) + pq = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

$$p + q = \frac{ab - cd}{a+b-c-d},\quad pq = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{a+b-c-d},$$

und nach leichter Rechnung

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

Da man offenbar die vier reellen Wurzeln a, b, c, d in jeder beliebigen Ordnung nehmen kann, so wollen wir voraussetzen, daß sie in der Reihe a, b, c, d nach ihrer Größe absteigend geordnet sind. Dann sind die Differenzen $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$ positiv, und es ist folglich auch der Zähler von $\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$, so wie sein Nenner, positiv, also $p-q$ reell. Eben so wird $p-q$ offenbar auch reell, wenn man a die größte, b die kleinste Wurzel bezeichnen läßt, weil dann zwar $b-c$, $b-d$ negativ sind, das Product $(b-c)(b-d)$ aber doch positiv ist.

Man kann also durch Substitution von

$$x = \frac{p+qy}{1+y}$$

die Function

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

in die Function

$$\frac{R'}{(1+y)^4}$$

jederzeit so transformiren, daß R' eine reelle ganze Function des vierten Grades von y ist, welche keine ungeraden Potenzen von y enthält.

Drei specielle Fälle verdienen jedoch noch eine besondere Betrachtung. Sind nämlich zuerst die Wurzeln c, d den Wurzeln a, b respective gleich, so wird sowohl $p + q$, als auch $p - q = 0$.

In diesem Falle ist aber

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 = \varepsilon(x-a)^2(x-b)^2 ,$$

folglich

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int \frac{P\partial x}{(x-a)(x-b)} ,$$

welches das Integral einer rationalen Function ist.

Ist ferner eine der Wurzeln a, b einer der Wurzeln c, d gleich, so wird $p - q = 0$. In diesem Falle läßt sich das Integral leicht auf das in I. betrachtete Integral zurückführen. Verbindet man nämlich die beiden gleichen Wurzeln mit einander, so kann man

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 = \varepsilon(x-a)^2(x^2 + fx + g) ,$$

folglich

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \int \frac{P\partial x}{(x-a)\sqrt{\varepsilon(x^2 + fx + g)}} ,$$

oder, wenn man

$$\frac{P}{x-a} = P', \quad \varepsilon(x^2 + fx + g) = A + Bx + Cx^2$$

setzt,

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \int \frac{P'\partial x}{\sqrt{A + Bx + Cx^2}}$$

setzen, welches die in I. betrachtete Form ist, da P' eine rationale Function von x bezeichnet.

Ist endlich $a + b = c + d$, so werden $p + q$ und $p - q$ beide unendlich. In diesem Falle ist nach dem Obigen

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} .$$

Setzt man also

$$x = y - \frac{g}{h} = y - \frac{g'}{h'} ,$$

so verschwinden in den Factoren

$$f + 2gx + hx^2 , \quad f' + 2g'x + h'x^2$$

die Glieder, welche die erste Potenz von y enthalten. Diese Factoren werden also durch die in Rede stehende Substitution auf die Form

$$m + ny^2 , \quad m' + n'y^2$$

gebracht, und aus ihrem Producte, d. i. aus

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

verschwinden folglich ebenfalls die ungeraden Potenzen von y, so daß also auch in diesem Falle in dem Integral $\int \frac{P\partial x}{R}$ aus dem Nenner die ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe weggeschafft werden können.

Abstrahiren wir nun von diesen speciellen Fällen, so erhellet aus dem Obigen, daß $\int \frac{P\partial x}{R}$, wenn wir das obige

$$R' = \alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4$$

setzen, durch die Substitution von

$$x = \frac{p + qy}{1 + y}$$

im Allgemeinen auf die Form

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \int \frac{(1+y)^2 P'\partial x}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}}$$

gebracht werden kann, wo P' das bezeichnet, was aus P durch die in Rede stehende Substitution wird.

Weil

$$\partial x = \frac{(1+y)q\partial y - (p+qy)\partial y}{(1+y)^2} = \frac{(q-p)\partial y}{(1+y)^2}$$

ist; so wird

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \int \frac{(q-p)P'\partial y}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}} = \int \frac{Q\partial y}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}},$$

wo Q eine rationale Function von y ist.

IV. Zweite Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$.

4. Nachdem wir im Vorhergehenden gezeigt haben, daß sich dieses Integral jederzeit so transformiren läßt, daß R keine ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe enthält, sind wir berechtigt, im Folgenden immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

zu setzen. Es ist aber auch verstattet, anzunehmen, daß P keine ungeraden Potenzen von x enthält, wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Welche Form auch die rationale Function P haben mag, so kann man doch immer

$$P = \frac{M + Nx}{M' + N'x}$$

setzen, wo M, N, M', N' gerade Functionen von x, d. i. Functionen von x^2 sind. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $M' - N'x$, so wird

$$P = \frac{(M+Nx)(M'-N'x)}{M'^2 - N'^2x^2} = \frac{MM' - NN'x^2 + (M'N - MN')x}{M'^2 - N'^2x^2}$$
$$= \frac{MM' - NN'x^2}{M'^2 - N'^2x^2} - \frac{(MN' - M'N)x}{M'^2 - N'^2x^2} = K - Lx,$$

wo K und L offenbar gerade Functionen von x, d. i. Functionen von x^2 sind. Man hat also

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \int \frac{K\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}} - \int \frac{Lx\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}.$$

Macht man in dem zweiten Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $x^2 = y$, $2x\partial x = \partial y$, und bezeichnet das, was aus L wird, wenn man $x^2 = y$ setzt, wobei wohl zu bemerken ist, daß L eine Function von x^2 ist, durch L'; so wird

$$\int \frac{Lx\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{L'\partial y}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2}},$$

und läßt sich folglich nach I. finden, so daß wir es also bloß noch mit dem Integral

$$\int \frac{K\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}},$$

wo K eine gerade Function von x ist, zu thun haben. Daher sind wir berechtigt, im Folgenden immer vorauszusetzen, daß in $\int \frac{P\partial x}{R}$ sowohl P, als auch R, bloß gerade Potenzen von x enthält, namentlich immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

ist.

V. Dritte Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$.

5. Wir wollen zuerst annehmen, daß die rationale Function P, welche nach dem Vorigen bloß gerade Potenzen von x enthält, eine ganze Function von x sey, und setzen daher

$$P = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots + Kx^{2k}.$$

Setzen wir nun ferner der Kürze wegen

$$\int \frac{x^n\partial x}{R} = \Pi^{(n)};$$

so ist

$$\int \frac{P\partial x}{R} = A\Pi^{(0)} + B\Pi^{(2)} + C\Pi^{(4)} + \ldots + K\Pi^{(2k)}.$$

Differentiirt man jetzt die Größe Rx^{2n-3}, indem man immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

setzt; so erhält man

$$\partial . Rx^{2n-3} =$$

$$(2n-3)x^{2n-4}\partial x\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}+\frac{x^{2n-3}(\beta x+2\gamma x^3)\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{(2n-3)x^{2n-4}(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)\partial x+x^{2n-3}(\beta x+2\gamma x^3)\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{(2n-3)\alpha x^{2n-4}\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}+\frac{(2n-2)\beta x^{2n-2}\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}+\frac{(2n-1)\gamma x^{2n}\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}};$$

folglich

$$Rx^{2n-3}=(2n-3)\alpha\int\frac{x^{2n-4}\partial x}{R}+(2n-2)\beta\int\frac{x^{2n-2}\partial x}{R}+(2n-1)\gamma\int\frac{x^{2n}\partial x}{R},$$

oder in der obigen Bezeichnung

$$Rx^{2n-3}=(2n-3)\alpha\Pi^{(2n-4)}+(2n-2)\beta\Pi^{(2n-2)}+(2n-1)\gamma\Pi^{(2n)}.$$

Setzt man in dieser allgemeinen Relation $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$; so erhält man

$$Rx = \alpha\Pi^{(0)} + 2\beta\Pi^{(2)} + 3\gamma\Pi^{(4)},$$
$$Rx^3 = 3\alpha\Pi^{(2)} + 4\beta\Pi^{(4)} + 5\gamma\Pi^{(6)},$$
$$Rx^5 = 5\alpha\Pi^{(4)} + 6\beta\Pi^{(6)} + 7\gamma\Pi^{(8)},$$
$$Rx^7 = 7\alpha\Pi^{(6)} + 8\beta\Pi^{(8)} + 9\gamma\Pi^{(10)},$$
u. s. f. u. s. f.

und sieht hieraus, daß man

$$\Pi^{(0)}, \Pi^{(2)}, \Pi^{(4)}, \Pi^{(6)}, \ldots \Pi^{(2k)}$$

finden kann, wenn man $\Pi^{(0)}$ und $\Pi^{(2)}$ finden kann, so daß sich also, wenn P eine ganze gerade Function von x ist, die Entwickelung von $\int\frac{P\partial x}{R}$ auf die Entwickelung von

$$\Pi^{(0)}=\int\frac{\partial x}{R} \text{ und } \Pi^{(2)}=\int\frac{x^2\partial x}{R}$$

reducirt.

Ist ferner P überhaupt eine rationale Function von x^2, so sondere man zuerst die darin vielleicht enthaltene ganze Function ab, und zerlege die übrig bleibende Function, indem man $x^2 = y$ setzt, in einfache Brüche von der allgemeinen Form

$$\frac{N}{(y+a)^n} \text{ oder } \frac{N}{(x^2+a)^n},$$

wo N eine constante Größe ist. Dadurch reducirt sich die Entwickelung unsers Integrals theils auf den vorher betrachteten Fall, wenn P eine ganze Function von x^2 ist, theils auf die Entwickelung einer Reihe von Integralen von der Form

$$\int\frac{N\partial x}{(x^2+a)^n R}=N\int\frac{\partial x}{(x^2+a)^n R}.$$

Differentiirt man die Größe

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^{n-1}} = Z\ ;$$

so erhält man

$$\partial Z = \frac{(x^2+a)(R\partial x + x\partial R) - 2(n-1)Rx^2\partial x}{(x^2+a)^n}\ .$$

Aber

$$\partial R = \frac{(\beta x + 2\gamma x^3)\partial x}{R}\ .$$

Also

$$\partial Z = \frac{(x^2+a)(R^2+\beta x^2+2\gamma x^4) - 2(n-1)R^2x^2}{(x^2+a)^n}\cdot\frac{\partial x}{R}$$

$$= \frac{(x^2+a)(\alpha+2\beta x^2+3\gamma x^4) - 2(n-1)(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)x^2}{(x^2+a)^n}\cdot\frac{\partial x}{R}$$

$$= \frac{-(2n-5)\gamma x^6 - \{(2n-4)\beta - 3a\gamma\}x^4 - \{(2n-3)\alpha - 2a\beta\}x^2 + a\alpha}{(x^2+a)^n}\cdot\frac{\partial x}{R}\ .$$

Setzt man $x^2+a=z$, $x^2=z-a$, so kann man den in $\frac{\partial x}{R}$ multiplicirten Ausdruck offenbar auf die Form

$$\frac{Az^3+Bz^2+Cz+D}{z^n} = \frac{A}{z^{n-3}} + \frac{B}{z^{n-2}} + \frac{C}{z^{n-1}} + \frac{D}{z^n}$$

bringen. Thut man dies, führt zugleich $z = x^2+a$ wieder ein, und setzt der Kürze wegen

$$\alpha' = -\gamma,\ \beta' = -(\beta - 3a\gamma),\ \gamma' = -(3a^2\gamma - 2a\beta + \alpha)\ ,$$

$$\delta' = a^3\gamma - a^2\beta + a\alpha\ ;$$

so wird

$$\partial Z = \left\{\frac{(2n-5)\alpha'}{(x^2+a)^{n-3}} + \frac{(2n-4)\beta'}{(x^2+a)^{n-2}} + \frac{(2n-3)\gamma'}{(x^2+a)^{n-1}} + \frac{(2n-2)\delta'}{(x^2+a)^n}\right\}\frac{\partial x}{R}\ ,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$\int\frac{\partial x}{(x^2+a)^n R} = I^{(n)}$$

setzen:

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^{n-1}} = (2n-5)\alpha' I^{(n-3)} + (2n-4)\beta' I^{(n-2)} + (2n-3)\gamma' I^{(n-1)} + (2n-2)\delta' I^{(n)}\ .$$

Für $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ erhält man aus dieser allgemeinen Relation:

$$\frac{Rx}{x^2+a} = -a'\Gamma^{(-1)} + \gamma'\Gamma^{(1)} + 2\delta'\Gamma^{(2)},$$

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^2} = a'\Gamma^{(0)} + 2\beta'\Gamma^{(1)} + 3\gamma'\Gamma^{(2)} + 4\delta'\Gamma^{(3)},$$

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^3} = 3a'\Gamma^{(1)} + 4\beta'\Gamma^{(2)} + 5\gamma'\Gamma^{(3)} + 6\delta'\Gamma^{(4)},$$

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^4} = 5a'\Gamma^{(2)} + 6\beta'\Gamma^{(3)} + 7\gamma'\Gamma^{(4)} + 8\delta'\Gamma^{(5)},$$

u. s. f. u. s. f.

und sieht also, daß

$$\Gamma^{(-1)}, \Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \ldots.$$

gegeben sind, wenn

$$\Gamma^{(-1)} = \int (x^2+a)\frac{\partial x}{R}, \quad \Gamma^{(0)} = \int \frac{\partial x}{R}, \quad \Gamma^{(1)} = \int \frac{\partial x}{(x^2+a)R}$$

gegeben sind.

Da nun

$$\Gamma^{(-1)} = \int \frac{x^2 \partial x}{R} + a\int \frac{\partial x}{R} = \Pi^{(2)} + a\Gamma^{(0)}$$

ist; so übersieht man, indem man dies mit dem Vorhergehenden zusammennimmt, daß sich die allgemeine Entwickelung von $\int \frac{P\partial x}{R}$ auf die Entwickelung der drei folgenden Integrale reducirt:

$$\Pi^{(0)} = \Gamma^{(0)} = \int \frac{\partial x}{R}, \; \Pi^{(2)} = \int \frac{x^2 \partial x}{R}, \; \Gamma^{(1)} = \int \frac{\partial x}{(x^2+a)R},$$

und daß also durch die Entwickelung dieser drei Integrale zugleich die allgemeine Entwickelung von $\int \frac{P\partial x}{R}$ gegeben sein würde. Diese drei Integrale bilden daher eine besondere sehr wichtige Klasse transcendenter Größen und sind ganz der Aufmerksamkeit werth welche man ihnen vorzüglich in neuester Zeit gewidmet hat.

VI. Vierte Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$.

6. Wir beschäftigen uns zunächst bloß mit der Transformation von $\int \frac{\partial x}{R}$, wo immer

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

ist. Man denke sich zu dem Ende die Function $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ der wie eine quadratische zu behandelnden Gleichung

$$\gamma x^4 + \beta x^2 + \alpha = 0$$

in zwei Factoren des zweiten Grades zerlegt; so sind diese Factoren bekanntlich entweder beide reell oder beide imaginär. Der zweite Fall soll weiter unten einer besondern Untersuchung unter-

worfen, und mag daher für jetzt bei Seite gesetzt werden. Sind beide Factoren reell, so sind die verschiedenen Fälle, welche eintreten können, in den folgenden sechs Formeln dargestellt:

$$\pm n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)\,,$$
$$\pm n^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)\,,$$
$$\pm n^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)\,.$$

Hierüber sind aber folgende Bemerkungen zu machen. Zuerst erhellet, daß der Fall

$$-n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)$$

ganz auszuschließen ist, weil in demselben $\alpha+\beta x^2+\gamma x^4$ für jedes x negativ, also R für jedes x imaginär seyn würde, weshalb man in diesem Falle

$$\frac{\partial x}{R}=\frac{\partial x}{\sqrt{-1}.\sqrt{n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}$$

setzen müßte. Da ferner

$$-n^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)=(npq)^2\left(\frac{1}{p^2}-x^2\right)\left(x^2-\frac{1}{q^2}\right),$$
$$-n^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)=(nq)^2(1+p^2x^2)\left(x^2-\frac{1}{q^2}\right)$$

ist; so kann man sich die verschiedenen Fälle in folgenden fünf Formeln dargestellt denken:

$$n^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)\,,$$
$$n^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)\,,$$
$$n^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)\,,$$
$$n^2(p^2-x^2)(x^2-q^2)\,,$$
$$n^2(1+p^2x^2)(x^2-q^2)\,.$$

Im ersten Falle kann man offenbar $p>q$ setzen. Macht man nun

$$x=\frac{\tang\varphi}{p},\quad\frac{p^2-q^2}{p^2}=k^2;$$

so ist $k<1$ und

$$1+p^2x^2=1+\tang\varphi^2=\sec\varphi^2=\frac{1}{\cos\varphi^2}\,,$$
$$1+q^2x^2=\frac{p^2+q^2\tang\varphi^2}{p^2}=\frac{1-k^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2}\,,$$
$$(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)=\frac{1-k^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^4},\quad\partial x=\frac{\partial\varphi}{p\cos\varphi^2};$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R}=\frac{1}{np}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}\,.$$

Im zweiten Falle setze man wieder $p>q$. Macht man nun

$$px=\sin\varphi\,,\quad\frac{q}{p}=k\,,$$

so ist $k < 1$ und

$$1 - p^2 x^2 = 1 - \sin\varphi^2 = \cos\varphi^2 ,$$

$$1 - q^2 x^2 = 1 - k^2 \sin\varphi^2 , \partial x = \frac{\cos\varphi}{p} \partial\varphi ;$$

also

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{1}{np} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} .$$

Diese Formel gilt aber, weil px die Einheit nicht übersteigen darf, nur für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{p}$.

Von $x = \frac{1}{p}$ bis $x = \frac{1}{q}$ ist R imaginär, da für $x > \frac{1}{p}$, $x < \frac{1}{q}$ das Produkt $px > 1$, $qx < 1$, also $1 - p^2 x^2$ negativ, $1 - q^2 x^2$ positiv ist. Für $x = \frac{1}{q}$ bis $x = \infty$ ist aber R wieder reell, und wir wollen also auch in diesem Falle eine der obigen ähnliche Transformation suchen. Macht man nämlich, da qx nicht kleiner als die Einheit ist,

$$qx = \frac{1}{\sin\varphi} , \frac{q}{p} = k ;$$

so ist

$$1 - p^2 x^2 = -\frac{p^2 - q^2\sin\varphi^2}{q^2\sin\varphi^2} = -\frac{p^2(1-k^2\sin\varphi^2)}{q^2\sin\varphi^2} ,$$

$$1 - q^2 x^2 = -\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2} , \partial x = -\frac{\cos\varphi}{q\sin\varphi^2}\partial\varphi ;$$

folglich

$$R = \frac{np\cos\varphi}{q\sin\varphi^2}\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} ,$$

und demnach

$$\frac{\partial x}{R} = -\frac{1}{np} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} .$$

Um das Minuszeichen zu vermeiden, setze man nun

$$\cot\varphi = \sqrt{1-k^2} . \tang\psi ;$$

so ist

$$\sin\varphi^2 = \frac{1}{1+(1-k^2)\tang\psi^2} = \frac{\cos\psi^2}{1-k^2\sin\psi^2} ,$$

$$x^2 = \frac{1}{q^2\sin\varphi^2} = \frac{1-k^2\sin\psi^2}{q^2\cos\psi^2} .$$

Ferner ist

$$1 - k^2\sin\varphi^2 = \frac{1-k^2}{1-k^2\sin\psi^2} , -\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^2} = \sqrt{1-k^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\cos\psi^2} ,$$

$$-\partial\varphi = \frac{\sqrt{1-k^2} . \partial\psi}{1-k^2\sin\psi^2} ;$$

also, wenn man zugleich wieder φ für ψ setzt:

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{1}{np} \cdot \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}} .$$

Im dritten Falle darf, wenn R reell seyn soll, x nicht grösser als $\frac{1}{q}$ werden, und man kann folglich

$$x = \frac{1}{q} \cos \psi , \quad \frac{p^2}{p^2 + q^2} = k^2$$

setzen, wo wieder $k < 1$ ist. Man hat nun

$$1 + p^2 x^2 = \frac{q^2 + p^2 \cos \psi^2}{q^2} = \frac{(p^2 + q^2)(1 - k^2 \sin \psi^2)}{q^2} ,$$

$$1 - q^2 x^2 = 1 - \cos \psi^2 = \sin \psi^2 , \quad \partial x = - \frac{\sin \psi}{q} \partial \psi ;$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R} = - \frac{k}{np} \cdot \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \psi^2}} .$$

Um das negative Zeichen zu vermeiden, setze man

$$\cot \psi = \sqrt{1 - k^2} \cdot \tang \varphi ,$$

so ist wie vorher

$$\sin \psi^2 = \frac{\cos \varphi^2}{1 - k^2 \sin \varphi^2} , \quad \cos \psi^2 = \frac{(1 - k^2) \sin \varphi^2}{1 - k^2 \sin \varphi^2} ,$$

$$x^2 = \frac{(1 - k^2) \sin \varphi^2}{q^2 (1 - k^2 \sin \varphi^2)} = \frac{\sin \varphi^2}{q^2 + p^2 \cos \varphi^2} ,$$

$$1 - k^2 \sin \psi^2 = \frac{1 - k^2}{1 - k^2 \sin \varphi^2} , \quad - \frac{\partial \psi}{\sin \psi^2} = \sqrt{1 - k^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi^2} ,$$

$$- \partial \psi = \frac{\sqrt{1 - k^2} \cdot \partial \varphi}{1 - k^2 \sin \varphi^2} ;$$

also

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{k}{np} \cdot \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}} .$$

Im vierten Falle muß, wenn R reell seyn soll, x zwischen p und q enthalten seyn, und es ist offenbar verstattet, $p > q$ anzunehmen, da man das diesem Falle entsprechende Product auch so schreiben könnte:

$$n^2 (q^2 - x^2)(x^2 - p^2) .$$

Macht man nun

$$k^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2} , \quad x^2 = \frac{q^2}{1 - k^2 \sin \varphi^2} ,$$

so ist $k < 1$. Daß die Annahme für x^2 verstattet ist, kann leicht gezeigt werden. Zuerst ist nämlich klar, daß $x^2 > q^2$, $x > q$ ist. Es muß aber auch

$$\frac{q^2}{1-k^2\sin\varphi^2} < p^2 ,$$

d. i., wenn man mit dem Nenner auf beiden Seiten multiplicirt,

$$q^2 < p^2 - (p^2-q^2)\sin\varphi^2$$
$$< p^2\cos\varphi^2 + q^2\sin\varphi^2 ,$$
$$q^2\cos\varphi^2 < p^2\cos\varphi^2, \; q^2 < p^2, \; q < p$$

seyn. Da nun das Letzte nach der Annahme wirklich der Fall ist, so findet auch das Erste Statt, und x ist folglich, wie erfordert wird, zwischen p und q enthalten. Es ist nun

$$p^2-x^2 = \frac{(p^2-q^2)\cos\varphi^2}{1-k^2\sin\varphi^2}, \; x^2-q^2 = \frac{q^2k^2\sin\varphi^2}{1-k^2\sin\varphi^2} ;$$

$$x\partial x = \frac{q^2k^2\sin\varphi\cos\varphi\partial\varphi}{(1-k^2\sin\varphi^2)^2}, \; \partial x = \frac{qk^2\sin\varphi\cos\varphi\partial\varphi}{(1-k^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{1}{np}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} .$$

Im fünften Falle muß $x > q$ seyn. Man mache also

$$x = \frac{q}{\cos\varphi}, \; k^2 = \frac{1}{1+p^2q^2} ,$$

so ist wieder $k < 1$. Ferner ist

$$1+p^2x^2 = \frac{1+p^2q^2-\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} = \frac{1-k^2\sin\varphi^2}{k^2\cos\varphi^2} ,$$

$$x^2-q^2 = \frac{q^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2}, \; \partial x = \frac{q\sin\varphi}{\cos\varphi^2}\partial\varphi ;$$

folglich

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{k}{n}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} .$$

Aus dem Bisherigen sieht man, daß, wenn C eine constante Größe bezeichnet, $\frac{\partial x}{R}$ immer auf die Form

$$\frac{\partial x}{R} = \frac{C\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} ,$$

wo $k < 1$ ist, gebracht werden kann. Auch überzeugt man sich, wenn man die vorher behandelten fünf Fälle nochmals sämmtlich überblickt, auf der Stelle, daß für x^2 immer ein Ausdruck von der Form

$$x^2 = \frac{A+B\sin\varphi^2}{A'+B'\sin\varphi^2} ,$$

oder wenigstens ein Ausdruck, der jederzeit leicht auf diese Form gebracht werden kann, gesetzt wird.

Denkt man sich nun dieselben Substitutionen in den drei Integralen

$$\int \frac{\partial x}{R}, \int \frac{x^2 \partial x}{R}, \int \frac{\partial x}{(x^2+a)R}$$

gemacht, so erhellet sogleich, daß dieselben immer auf die allgemeine Form

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{C + D\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

gebracht werden können, und daß also die Entwickelung des allgemeinen Integrals $\int \frac{P\partial x}{R}$ lediglich auf die Entwickelung des vorhergehenden Integrals, welches man auch etwas einfacher unter der Form

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}},$$

oder, wenn man

$$\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \Delta(k, \varphi)$$

setzt, unter der Form

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)}$$

darstellen kann, zurückkommt. Ist dies auch streng genommen nicht mehr eine eigentliche Transformation von $\int \frac{P\partial x}{R}$, sondern vielmehr eine Reduction dieses Integrals auf ein einfacheres Integral, so sind wir doch in der Ueberschrift bei der ersten Benennung geblieben, und glauben nicht, daß nach dieser Bemerkung daraus eine Undeutlichkeit hervorgehen wird.

VI. Erklärung der elliptischen Functionen und Eintheilung derselben in drei Arten.

7. Die in der Formel

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

enthaltenen Transcendenten werden im Allgemeinen elliptische Functionen oder elliptische Transcendenten genannt. φ heißt die Amplitudo, k, welches bekanntlich immer kleiner als die Einheit ist, der Modulus. Setzt man $k = \sin\Theta$, so heißt Θ der Winkel des Modulus. Die Größe $\sqrt{1-k^2}$ soll im Folgenden immer $= k'$ gesetzt und das Complement des Modulus genannt werden, so daß also immer

$$k^2 + k'^2 = 1$$

ist. Was die Gränzen betrifft, zwischen denen das obige Integral zu nehmen ist, so soll dasselbe, wenn nicht ausdrücklich eine andere Bestimmung gegeben wird, jederzeit so bestimmt werden, daß es für $\varphi = 0$ verschwindet, oder wir wollen dasselbe immer

zwischen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ nehmen, weshalb man es eigentlich auch

$$\int_0^{\varphi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}}$$

schreiben müßte, welches aber der Kürze wegen, wenn nicht vielleicht die Gränzen andere als die oben stillschweigend vorausgesetzten sind, meistens nicht geschehen soll. Ferner wollen wir immer

$$\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \Delta(\varphi)$$

setzen, und nur, wenn es die Deutlichkeit fordert, wie schon vorher geschehen ist, die nicht so einfache Bezeichnung

$$\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \Delta(k, \varphi)$$

gebrauchen.

8. Die Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

kommt auf die Entwickelung dreier specieller Fälle zurück, welches sich, wie es uns scheint, am leichtesten auf folgende Art zeigen läßt. Setzen wir

$$\frac{A + B\sin\varphi^2}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)} = \frac{A'}{\Delta(\varphi)} + \frac{B'}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

und suchen die constanten Größen A', B' dieser Gleichung gemäß zu bestimmen, so erhalten wir

$$A + B\sin\varphi^2 = A'(1 + n\sin\varphi^2) + B'$$
$$= A' + B' + nA'\sin\varphi^2,$$
$$A' + B' = A, \quad nA' = B;$$
$$A' = \frac{B}{n}, \quad B' = A - A' = \frac{nA - B}{n},$$

wodurch also A' und B' bestimmt sind. Aus obiger Gleichung ist nun

$$\int \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = A' \int \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + B' \int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)},$$

so daß sich also das erste Integral jederzeit auf die beiden letzten, welche offenbar specielle Fälle des ersten sind, zurückführen läßt. Es scheint daher hiernach, daß man bloß die beiden in den Formeln

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} \text{ und } \int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

enthaltenen Transcendenten zu untersuchen brauche. Aus den Formeln

$$A' = \frac{B}{n}, \quad B' = \frac{nA - B}{n}$$

sieht man aber, daß die Bestimmung von A' und B' unmöglich wird, wenn $n = 0$ ist, und dieser Fall daher eine besondere

Betrachtung erfordert. Man kann aber A_1 und B_1 immer so bestimmen, daß der Gleichung

$$\int (A + B\sin\varphi^2)\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = A_1\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + B_1\int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi$$

oder

$$\frac{A + B\sin\varphi^2}{\Delta(\varphi)} = \frac{A_1}{\Delta(\varphi)} + B_1\Delta(\varphi)$$

genügt wird, weil aus derselben

$$\begin{aligned} A + B\sin\varphi^2 &= A_1 + B_1(1 - k^2\sin\varphi^2) \\ &= A_1 + B_1 - k^2 B_1\sin\varphi^2, \\ A_1 + B_1 &= A, \quad -k^2 B_1 = B, \end{aligned}$$

$$B_1 = -\frac{B}{k^2}, \quad A_1 = A - B_1 = \frac{B + k^2 A}{k^2}$$

folgt, mittelst welcher Ausdrücke die Bestimmung von A_1 und B_1 immer möglich ist. Dies führt also auf die neue transcendente Größe $\int\Delta(\varphi)\partial\varphi$, welche ebenfalls zu der Klasse der elliptischen Functionen gehört, da dieselbe aus der allgemeinen Formel hervorgeht, wenn man $n = 0$, $A = 1$, $B = -k^2$ setzt, und man wird also jedes elliptische Integral zu entwickeln im Stande seyn, wenn die allgemeine Entwickelung der drei Integrale

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi, \quad \int\frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

möglich ist. Alle drei sind specielle Fälle der elliptischen Functionen nach der obigen allgemeinen Definition derselben. Man nennt daher nach einer wohl von Legendre zuerst gemachten Unterscheidung:

1) die in der Formel $\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$ enthaltenen Transcendenten die elliptischen Functionen der ersten Art;

2) die in der Formel $\int\Delta(\varphi)\partial\varphi$ enthaltenen Transcendenten die elliptischen Functionen der zweiten Art, und

3) die in der Formel $\int\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$ enthaltenen Transcendenten die elliptischen Functionen der dritten Art.

Nach Legendre setzt man

$$F(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad E(\varphi) = \int\Delta(\varphi)\partial\varphi, \quad \Pi(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}.$$

Die Parenthesen, in welche das hinter den Functionszeichen F, E, Π, Δ stehende φ eingeschlossen ist, werden auch öfters der Kürze wegen weggelassen.

Zugleich bemerken wir, daß sich die elliptischen Functionen der drei Arten auch noch auf andere Weise ausdrücken lassen.

Setzen wir nämlich $\sin\varphi = x$, wo also $x = 0$ ist, wenn $\varphi = 0$ ist; so ist

$$\cos\varphi\,\partial\varphi = \sqrt{1-x^2}\,.\,\partial\varphi = \partial x,\quad \partial\varphi = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

folglich

$$F(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$E(\varphi) = \int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi = \int\frac{\partial x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int\frac{(1-k^2x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = F(\varphi) - k^2\int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\Pi(\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)} = \int\frac{\partial x}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \int\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wenn man $n = -\frac{1}{a^2}$ setzt. Abel in seiner wichtigen Abhandlung über die elliptischen Functionen (Crelles Journ. B. IV. S. 236.) nennt daher die Integrale

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \int\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

respective elliptische Functionen der ersten, zweiten und dritten Art, welches nicht ganz mit dem Vorhergehenden übereinstimmt.

9. Die elliptischen Functionen der zweiten Art stehen in unmittelbarem Zusammenhange mit der Rectification der Ellipse. Ist nämlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right) = 1$$

die Gleichung der Ellipse, so ist, wenn wir $x = a\sin\varphi$ setzen, offenbar $y = b\cos\varphi$; folglich, wenn s den durch die Coordinaten x, y bestimmten Bogen der Ellipse bezeichnet,

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial\varphi\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2},$$

oder, wenn wir $a = 1$, $k^2 = 1 - b^2$ setzen:

$$\partial s = \partial\varphi\sqrt{1-(1-b^2)\sin\varphi^2} = \partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}\ ;$$

also, wenn man das Integral nur zwischen den erforderlichen Gränzen nimmt,

$$s = \int\Delta(\varphi)\partial\varphi\ ,$$

welches im Allgemeinen eine elliptische Function der zweiten Art ist.

Die Rectification der Hyperbel kann auf elliptische Functionen der ersten und zweiten Art gebracht werden. Man setze näm-

lich die halbe große Axe $= k$, die halbe kleine Axe $= b$, die Excentricität $= 1$; so ist bekanntlich $k^2 = 1 - b^2$. Auch ist immer

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 .$$

Macht man nun $y = b \tang \varphi$, so wird

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 = 1 + b^2 \tang \varphi^2 = \frac{1 - (1 - b^2) \sin \varphi^2}{\cos \varphi^2} ,$$

$$x = \frac{k}{\cos \varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2} .$$

Also ist

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} , \quad s = \int \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} ,$$

wenn nur das Integral zwischen den erforderlichen Gränzen genommen wird. Aber

$$\begin{aligned}
\partial . \Delta(\varphi) \tang \varphi &= \frac{\Delta(\varphi) \partial \varphi}{\cos \varphi^2} - \frac{k^2 \sin \varphi^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi)} \\
&= \frac{\{(\Delta(\varphi))^2 - k^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2\} \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{(1 - k^2 \sin \varphi^2 - k^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2) \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{(1 - k^2 + k^2 \cos \varphi^2 - k^2 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2) \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{\{1 - k^2 - (1 - k^2) \cos \varphi^2 + (1 - k^2 \sin \varphi^2) \cos \varphi^2\} \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{\{b^2 - b^2 \cos \varphi^2 + (\Delta(\varphi))^2 \cos \varphi^2\} \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} \\
&= \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} - \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi)} + \Delta(\varphi) \partial \varphi ,
\end{aligned}$$

$$\Delta(\varphi) \tang \varphi = \int \frac{b^2 \partial \varphi}{\Delta(\varphi) \cos \varphi^2} - b^2 \int \frac{\partial \varphi}{\Delta(\varphi)} + \int \Delta(\varphi) \partial \varphi .$$

Folglich

$$s = \Delta(\varphi) \tang \varphi + b^2 \int \frac{\partial \varphi}{\Delta(\varphi)} - \int \Delta(\varphi) \partial \varphi ,$$

mittelst welcher Formel also s im Allgemeinen auf elliptische Functionen der ersten und der zweiten Art gebracht ist, wenn nur die Integrale zwischen den gehörigen Gränzen genommen werden.

10. Wir wollen jetzt einmal der Kürze wegen

$$\int_0^\alpha \frac{A + B \sin \varphi^2}{1 + n \sin \varphi^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}} = f(\alpha)$$

setzen; so erhellet aus der Natur dieser Functionen und der Theorie der bestimmten Integrale auf der Stelle die Richtigkeit der beiden folgenden Relationen:

$$f(\alpha) = -f(-\alpha), \quad f(\pi) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Auch ist, wenn i eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, offenbar

$$f(i\pi) = if(\pi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

und folglich

$$f(-i\pi) = -f(i\pi) = -if(\pi) = -2if\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Also ist für jedes positive oder negative i

$$f(i\pi) = if(\pi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Sey nun $\varphi = i\pi \pm \psi$, i eine beliebige positive ganze Zahl, ψ nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$; so ist $\partial\varphi = \pm\partial\psi$, $\sin\varphi^2 = \sin\psi^2$, und für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ ist respective $\psi = \mp i\pi$ und $\psi = \psi$. Also ist

$$f(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \pm\int_{\mp i\pi}^{\psi} \frac{A + B\sin\psi^2}{1 + n\sin\psi^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$f(\varphi) = \pm\int_{\mp i\pi}^{\psi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}.$$

Aber nach der Theorie der bestimmten Integrale

$$\int_{-i\pi}^{\psi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= \int_{-i\pi}^{0} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\psi} \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -\int_0^{-i\pi} \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\psi} \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -f(-i\pi) + f(\psi) = f(i\pi) + f(\psi),$$

und auf ganz ähnliche Art

$$\int_{i\pi}^{\psi} \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = -\int_{\psi}^{i\pi} \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -\int_0^{i\pi} \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\psi} \frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -f(i\pi) + f(\psi).$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$f(\varphi) = f(i\pi) \pm f(\psi),$$

oder, weil $f(i\pi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist:

$$f(\varphi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm f(\psi).$$

Wäre i negativ, so wäre

$$\varphi = i\pi \pm \psi = -(-i\pi \mp \psi),$$

wo nun $-i$ positiv ist. Aber immer $f(-\alpha) = -f(\alpha)$. Also

$$f(\varphi) = -f(-i\pi \mp \psi) = -\left\{-2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \mp f(\psi)\right\}$$
$$= 2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm f(\psi),$$

so daß folglich, wenn

$$\varphi = i\pi \pm \psi$$

ist, für jedes positive oder negative ganze i immer

$$f(\varphi) = 2if\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm f(\psi)$$

ist.

Hieraus folgt auch, jenachdem $i = 2n$ oder $= 2n-1$ ist:

$$f\left(i\frac{\pi}{2}\right) = f(n\pi) = nf(\pi) = 2nf\left(\frac{\pi}{2}\right) = if\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

oder

$$f\left(i\frac{\pi}{2}\right) = f(n\pi - \tfrac{1}{2}\pi) = 2nf\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2n-1)f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

d. i. immer

$$f\left(i\frac{\pi}{2}\right) = if\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Aus vorstehenden Gleichungen, die wir hier mit aller Strenge und Deutlichkeit zu beweisen gesucht haben, sieht man, daß man $f(\varphi)$ für jeden Werth von φ kennt, wenn man $f(\varphi)$ nur für alle die positiven Werthe von φ kennt, welche $\frac{1}{2}\pi$ nicht übersteigen. Die in der Formel

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A + B\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

enthaltenen transcendenten Größen nennt Legendre im Allgemeinen vollständige elliptische Functionen. Für die drei verschiedenen Arten der elliptischen Functionen bezeichnet er dieselben durch F', E', Π'. In unserer obigen Bezeichnung ist

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta(\varphi)\,\partial\varphi,$$
$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}.$$

VIII. Besondere Betrachtung des Falls, wenn in (6.) die beiden Factoren imaginär sind.

11. Bevor wir in der Untersuchung der Eigenschaften der elliptischen Functionen weiter fortschreiten, ist es nöthig, noch ein Mal zu (6.) zurückzukehren, und den dort einstweilen bei Seite gesetzten Fall, wenn die beiden Factoren, in welche wir uns die Größe $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ zerlegt dachten, imaginär sind, einer besondern Untersuchung zu unterwerfen. Zu dem Ende zeigen wir zuerst, daß in diesem Falle $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ immer auf die Form

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos\Theta + \mu^2 x^4$$

gebracht werden kann. Setzen wir nämlich

$$\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = \gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} x^2 + x^4\right)$$

und lösen die Gleichung

$$x^4 + \frac{\beta}{\gamma} x^2 + \frac{\alpha}{\gamma} = 0$$

wie eine quadratische auf, so erhalten wir

$$x^2 = -\frac{\beta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\gamma^2} - \frac{\alpha}{\gamma}},$$

und die beiden in Rede stehenden Factoren sind also imaginär, wenn $\frac{\alpha}{\gamma}$ positiv, und

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta^2}{4\gamma^2}, \quad 4\alpha\gamma > \beta^2$$

ist, wobei man zu bemerken hat, daß wegen der ersten Bedingung α und γ gleiche Vorzeichen haben, $\alpha\gamma$ also immer positiv ist. Wir können annehmen, daß α und γ beide positiv sind. Wären nämlich α und γ negativ, also die in Factoren zu zerlegende Größe, wenn wir jetzt $-\alpha$, $-\gamma$ für α, γ setzen,

$$-\alpha + \beta x^2 - \gamma x^4,$$

so ist leicht zu zeigen, daß diese Größe für jedes x negativ, die Quadratwurzel aus derselben also für jedes x imaginär ist. Ist zuerst β negativ, so ist dies klar. Ist aber β positiv, so kann auf folgende Art leicht gezeigt werden, daß für jedes x

$$\alpha + \gamma x^4 > \beta x^2$$

ist. Es ist nämlich

$$(\sqrt{\alpha} - x^2\sqrt{\gamma})^2 = \alpha + \gamma x^4 - 2x^2\sqrt{\alpha\gamma},$$

folglich immer

$$\alpha + \gamma x^4 > 2x^2\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$4\alpha\gamma > \beta^2, \quad 2\sqrt{\alpha\gamma} > \beta;$$

folglich

$$2x^2\sqrt{\alpha\gamma} > \beta x^2,$$

und demnach um so mehr

$$\alpha + \gamma x^4 > \beta x^2,$$

wie behauptet wurde. Es ist also

$$\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}$$

für jedes x imaginär, und man wird folglich auch für $\int \frac{P\partial x}{R}$ (s. 6.) keinen reellen Werth finden können, weshalb es also verstattet ist,

$$\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4} = \sqrt{-1}.\sqrt{\alpha - \beta x^2 + \gamma x^4},$$

folglich

$$\int \frac{P\partial x}{R} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{P\partial x}{\sqrt{\alpha - \beta x^2 + \gamma x^4}}$$

zu setzen, wodurch man wieder auf den Fall, wenn α und γ beide positiv sind, geführt wird, und daher immer die letztere Voraussetzung machen kann.

Unter der Voraussetzung also, daß α und γ beide positiv sind, sey

$$\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = \lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos\Theta + \mu^2 x^4,$$

so giebt die Vergleichung der einzelnen Glieder

$$\lambda^2 = \alpha,\ \mu^2 = \gamma,\ 2\lambda\mu\cos\Theta = \beta;$$

folglich

$$\lambda = \sqrt{\alpha},\ \mu = \sqrt{\gamma},\ \cos\Theta = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}},$$

und es ist, weil α und γ positiv sind, und $4\alpha\gamma > \beta^2$ ist, die Bestimmung von λ, μ, $\cos\Theta$ oder Θ in reellen Größen mittelst dieser Ausdrücke stets möglich, weshalb sich also, wenn die Factoren von $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ imaginär sind, diese Größe immer auf die Form

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos\Theta + \mu^2 x^4,$$

wofür wir von nun an

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4$$

setzen wollen, bringen läßt.

12. Beschäftigen wir uns nun (vergl. V.) mit dem Integral

$$Z = \int \frac{(f + gx^2)\partial x}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 . \cos\Theta + \beta^2 x^4}},$$

unter welcher Form offenbar die beiden Integrale

$$\int \frac{\partial x}{R},\ \int \frac{x^2\partial x}{R}$$

in V. enthalten sind. Man kann in dem Integral Z für x alle Werthe von 0 bis ∞ setzen. Da

$$\frac{f + gx^2}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}} = \frac{\frac{f}{\beta x^2} + \frac{g}{\beta}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2 x^4} + \frac{2\alpha\cos\Theta}{\beta x^2} + 1}}$$

ist; so ist für $x = \infty$ offenbar

$$z = \int \frac{g}{\beta} \partial x$$

und wir betrachten daher mit Legendre, um uns des Gliedes zu entledigen, welches unendlich werden kann, bloß das Integral

$$x = \int \left\{ \frac{(f + gx^2)\partial x}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}} - \frac{g}{\beta}\partial x \right\} .$$

Es kommt nun darauf an, dieses Integral so zu transformiren, daß die binomischen Factoren der Größe unter dem Wurzelzeichen reell werden, wozu man nach Legendre (Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 55. Exercices de calcul intégral. T. I. p. 54.) mittelst jeder der folgenden Substitutionen gelangt:

$$\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4} = 2xy\sqrt{\alpha\beta} ,$$

$$\alpha + \beta x^2 = 2xy\sqrt{\alpha\beta} ,$$

$$\beta x^2 + \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4} = 2\alpha y^2 ,$$

$$x = \frac{1 - y}{1 + y}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} .$$

Aus der dritten Gleichung folgt z. B.

$$x^2 = \frac{\alpha}{\beta}\left\{ y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2} \right\} ,$$

und es ist also

$$\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4} = 2\alpha y^2 - \beta x^2 - \alpha\cos\Theta$$
$$= \frac{\alpha(4y^4 + \sin\Theta^2)}{4y^2} ,$$

$$\partial x = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \left(y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(y + \frac{\sin\Theta^2}{4y^3} \right) \partial y$$

$$= \frac{(4y^4 + \sin\Theta^2)\sqrt{\alpha}}{4y^2\sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}\cdot\sqrt{\beta}} \partial y ,$$

$$f + gx^2 - \frac{g}{\beta}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}$$

$$= f + 2gx^2 - \frac{2\alpha g}{\beta} y^2 + \frac{\alpha g}{\beta}\cos\Theta$$

$$= f - \frac{\alpha g}{\beta}\cos\Theta - \frac{\alpha g \sin\Theta^2}{2\beta y^2} ;$$

folglich

$$X = \int \frac{\frac{\partial y}{\sqrt{\alpha\beta}} \left\{ f - \frac{ag}{\beta} \cos\Theta - \frac{ag \sin\Theta^2}{2\beta y^2} \right\}}{\sqrt{y^4 - y^2 \cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}} .$$

Aber die Größe unter dem Wurzelzeichen

$$= y^4 - y^2(\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2) - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$
$$= y^2(y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2) + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2(y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)$$
$$= (y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)(y^2 + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2) .$$

Folglich

$$X = \int \frac{\frac{\partial y}{\sqrt{\alpha\beta}} \left\{ f - \frac{ag}{\beta} \cos\Theta - \frac{ag \sin\Theta^2}{2\beta y^2} \right\}}{\sqrt{(y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)(y^2 + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2)}} ,$$

wo also die Factoren des Products unter dem Wurzelzeichen, wie verlangt wurde, beide wirklich reell sind.

Soll das Integral reell seyn, so ist $\cos\frac{1}{2}\Theta$ der kleinste Werth von y, oder y muß immer größer als $\cos\frac{1}{2}\Theta$ seyn. Daher kann man

$$y = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta}{\cos\varphi}$$

setzen. Dann ist

$$\partial y = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta \sin\varphi \, \partial\varphi}{\cos\varphi^2} ,$$

$$(y^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)(y^2 + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2) = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 \sin\varphi^2 (1 - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 \sin\varphi^2)}{\cos\varphi^4} ,$$

$$f - \frac{g\alpha}{\beta}\cos\Theta - \frac{g\alpha \sin\Theta^2}{2\beta y^2} = \frac{1}{\beta}\left(f\beta - g\alpha\cos\Theta - \frac{g\alpha \sin\Theta^2}{2y^2} \right)$$
$$= \frac{1}{\beta}(f\beta - g\alpha + 2g\alpha \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 - 2g\alpha \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 \cos\varphi^2)$$
$$= \frac{1}{\beta}(f\beta - g\alpha + 2g\alpha \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 \sin\varphi^2) .$$

Folglich, wenn wir $k = \sin\frac{1}{2}\Theta$ setzen, wo wieder $k < 1$ ist:

$$X = \int \frac{f\beta - g\alpha + 2g\alpha k^2 \sin\varphi^2}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}} ,$$

oder auch

$$X = \int \frac{f\beta + g\alpha - 2g\alpha(1 - k^2 \sin\varphi^2)}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}} ,$$
$$= \int \frac{f\beta + g\alpha - 2g\alpha(\Delta(\varphi))^2}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$
$$= \frac{f\beta + g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{2g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} \int \Delta(\varphi)\partial\varphi .$$

Aus dem Obigen folgt

$$\cos\varphi^2 = \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{y^2} = \frac{2\alpha\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\beta x^2 + \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit

$$-\beta x^2 - \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}$$

multiplicirt,

$$\cos\varphi^2 = \frac{2\alpha\cos\frac{1}{2}\Theta^2(-\beta x^2 - \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4})}{\alpha^2\sin\Theta^2},$$

d. i., weil

$$\sin\Theta^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

ist:

$$\cos\varphi^2 = \frac{-\beta x^2 - \alpha\cos\Theta + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2\cos\Theta + \beta^2 x^4}}{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2}.$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\alpha}{\beta}\left\{y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2}\right\} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\left\{\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\cos\varphi^2} - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2\cos\varphi^2}{4\cos\frac{1}{2}\Theta^2}\right\} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 - \cos\Theta\cos\varphi^2 - \sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos\varphi^4}{\cos\varphi^2} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta^2\sin\varphi^2 + \sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos\varphi^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} \\ &= \frac{\alpha\sin\varphi^2}{\beta\cos\varphi^2}(\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\varphi^2) \\ &= \frac{\alpha\sin\varphi^2}{\beta\cos\varphi^2}(1 - \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\sin\varphi^2); \end{aligned}$$

folglich

$$x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}.$$

Für $x = 0$ wird

$$\cos\varphi^2 = \frac{\alpha(1-\cos\Theta)}{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2} = \frac{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2}{2\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2} = 1,$$

d. i. $\varphi = 0$. Für $x = \infty$ ist auch

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2} = \infty,$$

und daher offenbar $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Nimmt man nun das Integral X zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = x$, so muß man $\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$ und $\int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi$ zwischen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ nehmen, weshalb also nach dem Obigen

$$X = \frac{f\beta + g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}}F(\varphi) - \frac{2g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}}E(\varphi).$$

ist. Nimmt man aber X zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, so ist

$$X = \frac{f\beta + g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2g\alpha}{\beta\sqrt{\alpha\beta}} E\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Man sieht also, daß sich X immer auf eine elliptische Function der ersten und der zweiten Art zurückführen läßt.

Noch bemerken wir, daß in dem Vorhergehenden immer angenommen werden kann, daß $\alpha\beta$ positiv, also $\sqrt{\alpha\beta}$ reell ist. Wäre nämlich $\alpha\beta$ negativ, so könnte man, für $180^\circ - \Theta = \Theta'$,

$$a^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4 = a^2 - 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta' + \beta^2 x^4$$

setzen, wo nun die in $\cos\Theta'$ multiplicirte Größe positiv ist, da $\alpha\beta$ nach der Voraussetzung negativ ist.

13. Nach (12.) ist

$$\frac{\partial x}{\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\alpha\beta}.\sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}}$$

und

$$x^2 + a = \frac{\alpha}{\beta}\left\{y^2 - \cos\Theta - \frac{\sin\Theta^2}{4y^2}\right\} + a$$

$$= \frac{\alpha\left\{4y^4 + 4\left(\frac{a\beta}{\alpha} - \cos\Theta\right)y^2 - \sin\Theta^2\right\}}{4\beta y^2};$$

also

$$\int \frac{\partial x}{(x^2 + a)\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}}$$

$$= \frac{4\beta}{\alpha\sqrt{\alpha\beta}} \int \frac{y^2\,\partial y}{\left\{4y^4 + 4\left(\frac{a\beta}{\alpha} - \cos\Theta\right)y^2 - \sin\Theta^2\right\}\sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \frac{1}{4}\sin\Theta^2}},$$

ein Integral von der in V. betrachteten Form, welches sich also wie dort gezeigt worden ist, wenn wir jetzt

$$R = \sqrt{y^4 - y^2\cos\Theta - \tfrac{1}{4}\sin\Theta^2}$$

setzen, auf Integrale von der Form

$$\int \frac{\partial y}{R}, \int \frac{y^2\,\partial y}{R}, \int \frac{\partial y}{(y^2 + a')R},$$

und folglich, da sich nach (12.) R^2 in reelle Factoren zerlegen läßt, nach VI. auf elliptische Functionen bringen läßt. Man kann folglich auch

$$\int \frac{\partial x}{(x^2 + a)\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\Theta + \beta^2 x^4}},$$

d. i.

$$\int \frac{\partial x}{(x^2 + a)R} \text{ für } R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4},$$

wenn die Factoren von R^2 imaginär sind, immer auf elliptische Functionen zurückführen, wie aus den obigen Andeutungen, mit denen wir uns hier begnügen müssen, völlig deutlich hervorgehen wird. Man hat hier überall (12.), und, um den Zusammenhang dieser Betrachtungen mit dem Vorhergehenden gehörig zu übersehen, auch (5.) und (6.) zu vergleichen.

IX. Vergleichung der elliptischen Functionen der ersten Art.

14. Wir nehmen bei der nun folgenden Untersuchung, welche uns zu mehreren sehr merkwürdigen Eigenschaften der elliptischen Functionen der ersten Art führen wird, unsern Auslauf von der Integration der in vieler Beziehung wichtigen Differentialgleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4}} + \frac{\partial y}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \epsilon y^4}} = 0,$$

für welche man aber, wie wir aus dem Vorhergehenden schon wissen, mit dem größten Gewinn für Einfachheit und Kürze der Behandlung die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}} + \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \psi^2}} = 0$$

setzen kann, und folgen dabei dem Wege, welchen Lagrange in der Théorie des fonctions analytiques. p. 113. vorgezeichnet hat. Obige Gleichung wird nämlich auf die Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin \psi^2}}$$

gebracht. Betrachtet man nun φ und ψ als Functionen einer neuen veränderlichen Größe t, so ist nach Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial t}},$$

und man kann also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sqrt{1 - k^2 \sin \psi^2};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 1 - k^2 \sin \varphi^2, \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 1 - k^2 \sin \psi^2$$

setzen. Differentiirt man nach t, so ergiebt sich

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -2 k^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2 k^2 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

d. i.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2\sin 2\varphi\,,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2\sin 2\psi\,;$$

also

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2(\sin 2\varphi + \sin 2\psi)\,,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}k^2(\sin 2\varphi - \sin 2\psi)\,,$$

d. i. nach einer sehr bekannten goniometrischen Zerlegung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -k^2\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)\,,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -k^2\cos(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)\,;$$

folglich, wenn wir

$$\varphi+\psi = p\,,\quad \varphi-\psi = q$$

setzen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k^2\sin p\cos q\,,\quad \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -k^2\cos p\sin q\,.$$

Multiplicirt man nun diese beiden Gleichungen respective mit $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$ und addirt; so erhält man

$$\frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\partial q}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$= -k^2\left\{\sin p\cos q\frac{\partial q}{\partial t} + \sin q\cos p\frac{\partial p}{\partial t}\right\};$$

also, wie augenblicklich erhellet,

$$\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t}\right\} = -k^2\,\partial(\sin p\sin q)\,,$$

und folglich, wenn man integrirt,

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = -k^2\sin p\sin q + a\,,$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Setzen wir nun, daß vermöge der gesuchten Gleichung zwischen φ und ψ die erste dieser beiden Größen $= \mu$ ist, wenn $\psi = 0$ ist, wo offenbar μ als eine willkührliche Constante zu betrachten ist, da die in Rede stehende Gleichung natürlich selbst eine willkührliche Constante implicirt, so hat man für den obigen Werth von ψ nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sqrt{1-k^2\sin\mu^2},\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = \mp 1,\ p = q = \mu;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{1-k^2\sin\mu^2} \mp 1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{1-k^2\sin\mu^2} \pm 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = \left\{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2} \mp 1\right\}\left\{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2} \pm 1\right\} = -k^2\sin\mu^2,$$

$$\sin p \sin q = \sin\mu^2;$$

folglich, wenn man diese Werthe in die obige Gleichung setzt, für $\psi = 0$:

$$-k^2\sin\mu^2 = -k^2\sin\mu^2 + a;$$

also die willkührliche Constante $a = 0$, und daher

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = -k^2\sin p\sin q.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen die ersten und zweiten Differentialquotienten von p, q durch p', q'; p'', q''; so ist also

$$p'q' = -k^2\sin p\sin q,\ p'' = -k^2\sin p\cos q,\ q'' = -k^2\cos p\sin q;$$

folglich

$$\frac{p''}{p'q'} = \cot q,\ \frac{q''}{p'q'} = \cot p;$$

oder

$$\frac{p''}{p'} = q'\cot q,\ \frac{q''}{q'} = p'\cot p.$$

Nach Principien der Differentialrechnung ist aber

$$\frac{\partial l p'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{p'\partial t} = \frac{p''}{p'},\ \frac{\partial l q'}{\partial t} = \frac{\partial q'}{q'\partial t} = \frac{q''}{q'};$$

$$\frac{\partial l\sin p}{\partial t} = \frac{\partial\sin p}{\sin p\partial t} = \frac{\cos p\,\partial p}{\sin p\,\partial t} = p'\cot p,$$

$$\frac{\partial l\sin q}{\partial t} = \frac{\partial\sin q}{\sin q\partial t} = \frac{\cos q\,\partial q}{\sin q\,\partial t} = q'\cot q;$$

folglich

$$\frac{\partial l p'}{\partial t} = \frac{\partial l\sin q}{\partial t},\ \frac{\partial l q'}{\partial t} = \frac{\partial l\sin p}{\partial t},$$

und daher, wenn man die willkührlichen Constanten $= l\alpha$ und $= l\beta$ setzt:

$$lp' = l\sin q + l\alpha,\ lq' = l\sin p + l\beta,$$

oder

$$p' = \alpha\sin q,\ q' = \beta\sin p.$$

Setzt man nun für p, q, p', q' ihre Werthe aus dem Obigen, so erhält man die Gleichungen

$$\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} - \sqrt{1-k^2\sin\psi^2} = \alpha\sin(\varphi-\psi),$$
$$\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} + \sqrt{1-k^2\sin\psi^2} = \beta\sin(\varphi+\psi),$$

deren jede ein Integral der gegebenen Differentialgleichung ist. Nehmen wir im Folgenden die Quadratwurzeln stets positiv, so ist, weil $\varphi = \mu$ für $\psi = 0$:

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}-1}{\sin\mu}, \quad \beta = \frac{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}+1}{\sin\mu}.$$

Sehr merkwürdig ist es, daß man das Integral unserer Differentialgleichung noch auf eine dritte Art ausdrücken kann, welche die Eigenthümlichkeit darbietet, daß φ und ψ nicht, wie in den beiden obigen Formen des Integrals, unter dem Wurzelzeichen vorkommen. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\frac{p'}{q'} = \frac{\alpha\sin q}{\beta\sin p},$$
$$\beta p'\sin p = \alpha q'\sin q.$$

Aber

$$\frac{\partial\cos p}{\partial t} = -\sin p\frac{\partial p}{\partial t} = -p'\sin p,$$
$$\frac{\partial\cos q}{\partial t} = -\sin q\frac{\partial q}{\partial t} = -q'\sin q.$$

Also

$$\beta\frac{\partial\cos p}{\partial t} = \alpha\frac{\partial\cos q}{\partial t},$$

und folglich, wenn man integrirt,

$$\beta\cos p = \alpha\cos q + \varepsilon,$$

wo ε eine neue willkührliche Constante bezeichnet. Für $\psi = 0$ ist aber $\varphi = \mu$ und also, wie wir auch schon vorher gesehen haben, $p = q = \mu$. Folglich

$$\beta\cos\mu = \alpha\cos\mu + \varepsilon,$$
$$\varepsilon = (\beta-\alpha)\cos\mu.$$

Aber nach dem Obigen

$$\beta - \alpha = \frac{2}{\sin\mu}.$$

Folglich

$$\varepsilon = \frac{2\cos\mu}{\sin\mu},$$

und daher, wenn man für α, β, p, q aus dem Obigen ihre Werthe setzt,

$$2\cos\mu =$$
$$\{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}+1\}\cos(\varphi+\psi) - \{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}-1\}\cos(\varphi-\psi)$$
$$= \cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi)+\{\cos(\varphi+\psi)-\cos(\varphi-\psi)\}\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}$$
$$= 2\cos\varphi\cos\psi - 2\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin\mu^2},$$

oder

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin\mu^2} = \cos\mu,$$

wo μ die willkührliche Constante bezeichnet, das Integral unserer Differentialgleichung.

15. Hiervon läßt sich nun die folgende wichtige Anwendung auf die elliptischen Functionen machen. Weil

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = 0$$

ist, so ist, wie man auch die Integrale bestimmen mag,

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = \text{Const}.$$

Bestimmen wir nun das zweite Integral auf der linken Seite so, daß es für $\psi = 0$ verschwindet, und setzen

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = f(\varphi);$$

so ist auch

$$f(\varphi) + \int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = \text{Const}.$$

Für $\psi = 0$ wird nach (14.) $\varphi = \mu$, und

$$\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}}$$

verschwindet für diesen Werth von ψ. Also ist

$$\text{Const.} = f(\mu),$$

und folglich

$$f(\varphi) + \int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = f(\mu),$$

wo $f(\mu)$ aus $f(\varphi)$ erhalten wird, wenn man in letzterer Function μ für φ setzt. Setzen wir nun, wenn c eine beliebige Constante bezeichnet, überhaupt

$$f(\varphi) = c + \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$

so ist auch

$$f(\mu) = c + \int_0^{\mu}\frac{\partial\mu}{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}};$$

folglich

$$c + \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = c + \int_0^{\mu}\frac{\partial\mu}{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}},$$

d. i.

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\psi} \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = \int_0^{\mu} \frac{\partial\mu}{\sqrt{1-k^2\sin\mu^2}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\psi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \int_0^{\mu} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$

d. i. in der im Obigen eingeführten Bezeichnung der elliptischen Functionen der ersten Art:

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu),$$

wo nun zwischen φ, ψ, μ die in (14.) bewiesene Gleichung Statt findet. Dies führt also auf folgenden überaus merkwürdigen Satz:

Wenn zwischen φ_1, φ_2, φ_3 die Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2} = \cos\varphi_3$$

Statt findet; so ist immer

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_3).$$

Da ferner nach der Theorie der bestimmten Integrale offenbar

$$F(-\varphi_2) = \int_0^{-\varphi_2} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = -\int_{-\varphi_2}^{0} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -\int_0^{\varphi_2} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = -F(\varphi_2)$$

ist (Bestimmtes Integral. 2. 5.); so ergiebt sich aus dem Obigen, wenn man $-\varphi_2$ für φ_2 setzt, folgender Satz:

Wenn zwischen φ_1, φ_2, φ_3 die Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2} = \cos\varphi_3$$

Statt findet; so ist immer

$$F(\varphi_1) - F(\varphi_2) = F(\varphi_3).$$

16. Macht man die Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_3 = \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{1-k^2\sin\varphi_3^2}$$

rational, so erhält man, wenn man, nachdem auf beiden Seiten quadrirt worden, das Glied

$$\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2 = 1 - \cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_2^2 + \cos\varphi_1^2\cos\varphi_2^2$$

setzt, leicht die Gleichung

$$1 = \cos\varphi_1^2 + \cos\varphi_2^2 + \cos\varphi_3^2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + k^2\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\sin\varphi_3^2.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber ferner leicht

$$1 - \cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_3^2 + \cos\varphi_1^2\cos\varphi_3^2$$
$$= \cos\varphi_2^2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \cos\varphi_1^2\cos\varphi_3^2$$
$$+ k^2\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\sin\varphi_3^2 ,$$

d. i.

$$\sin\varphi_1^2\sin\varphi_3^2 = (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cos\varphi_3)^2 + k^2\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\sin\varphi_3^2 ,$$

oder

$$\sin\varphi_1^2\sin\varphi_3^2(1 - k^2\sin\varphi_2^2) = (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cos\varphi_3)^2 ,$$
$$\sin\varphi_1\sin\varphi_3\sqrt{1 - k^2\sin\varphi_2^2} = \pm\cos\varphi_2 \mp \cos\varphi_1\cos\varphi_3 ,$$
$$\pm\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + \sin\varphi_1\sin\varphi_3\sqrt{1 - k^2\sin\varphi_2^2} = \pm\cos\varphi_2 ,$$

wo nun noch die Frage ist, welche Vorzeichen zu nehmen sind. Für $k = 0$ ist aber offenbar

$$F(\varphi_1) = \varphi_1 , \quad F(\varphi_2) = \varphi_2 , \quad F(\varphi_3) = \varphi_3 ;$$

also

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 .$$

Setzt man nun in der gefundenen Gleichung $k = 0$, so wird, da die Quadratwurzel nach der schon in (14.) gemachten Bemerkung stets positiv genommen werden soll,

$$\pm\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + \sin\varphi_1\sin\varphi_3 = \pm\cos\varphi_2 ,$$
$$\pm(\cos\varphi_1\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_1\sin\varphi_3) = \pm\cos\varphi_2 ,$$
$$\pm\cos(\varphi_1 \mp \varphi_3) = \pm\cos\varphi_2 ,$$

oder

$$\cos(\varphi_1 \mp \varphi_3) = \cos(-\varphi_2) .$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\varphi_1 - \varphi_3 = -\varphi_2 , \quad \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = \cos(-\varphi_2) ,$$

und man muß folglich die obern Zeichen nehmen, d. i.

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + \sin\varphi_1\sin\varphi_3\sqrt{1 - k^2\sin\varphi_2^2} = \cos\varphi_2$$

setzen. Ganz auf dieselbe Art, oder durch bloße Verwechslung von φ_1 und φ_2 erhält man

$$\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \sin\varphi_2\sin\varphi_3\sqrt{1 - k^2\sin\varphi_1^2} = \cos\varphi_1 ,$$

so daß also der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

jederzeit die drei folgenden Gleichungen entsprechen:

$$\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \sin\varphi_2\sin\varphi_3\Delta(\varphi_1) = \cos\varphi_1 ,$$
$$\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + \sin\varphi_1\sin\varphi_3\Delta(\varphi_2) = \cos\varphi_2 ,$$
$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_3) = \cos\varphi_3 .$$

Eliminirt man aus den beiden ersten Gleichungen $\cos\varphi_3$, so erhält man

$$\sin\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 2 - \cos\varphi_2^2}{\cos\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1) - \sin\varphi_1\cos\varphi_2\Delta(\varphi_2)} .$$

Multiplicirt man aber Zähler und Nenner dieses Bruchs mit

$$\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Delta(\varphi_2),$$

so wird der Nenner

$$= \cos\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2 (1 - k^2 \sin\varphi_1^2) - \sin\varphi_1^2 \cos\varphi_2^2 (1 - k^2 \sin\varphi_2^2)$$
$$= \cos\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2 - \sin\varphi_1^2 \cos\varphi_2^2$$
$$- (\cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_2^2) k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2$$
$$= (\cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_2^2)(1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2);$$

folglich

$$\sin\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Delta(\varphi_2)}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck von $\sin\varphi_3$ in die erste oder zweite Gleichung, so erhält man nach leichter Rechnung

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2};$$

also auch

$$\operatorname{tang}\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Delta(\varphi_2)}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)},$$

oder

$$\operatorname{tang}\varphi_3 = \frac{\operatorname{tang}\varphi_2 \Delta(\varphi_1) + \operatorname{tang}\varphi_1 \Delta(\varphi_2)}{1 - \operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}.$$

Alle diese Formeln dienen, φ_3 so zu bestimmen, daß der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

genügt wird, vorausgesetzt, daß φ_1 und φ_2 gegeben sind.

Aus der dritten Gleichung folgt

$$\Delta(\varphi_3) = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_3}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2},$$

und hieraus, wenn man den vorher gefundenen Ausdruck von $\cos\varphi_3$ einführt:

$$\Delta(\varphi_3) = \frac{\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) - k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2}.$$

Schafft man hier den Nenner weg, so kommt:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) - \Delta(\varphi_3)$$
$$= k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_3)),$$

d. i. nach der dritten Gleichung:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) = \Delta(\varphi_3) + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\Delta(\varphi_3)$, die aus der dritten Hauptgleichung sich ergebende Gleichung

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_3)$$

dagegen mit $-k^2 \cos\varphi_3$; so erhält man:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) = (\Delta(\varphi_3))^2 + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3),$$
$$-k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 = -k^2 \cos\varphi_3^2 - k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3);$$

folglich, wenn man addirt:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3$$
$$= (\Delta(\varphi_3))^2 - k^2\cos\varphi_3{}^2 = 1 - k^2(\sin\varphi_3{}^2 + \cos\varphi_3{}^2) = 1 - k^2,$$

d. i., wenn wir hier und im Folgenden immer

$$1 - k^2 = k'^2,\quad k^2 + k'^2 = 1$$

setzen:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 = k'^2,$$

eine sehr merkwürdige Relation.

Nimmt man φ_2 negativ, so erhält man aus dem Vorhergehenden unmittelbar die folgenden, der Gleichung

$$F(\varphi_1) - F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

entsprechenden Formeln:

$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2\Delta(\varphi_2) - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\operatorname{tang}\varphi_3 = \frac{\operatorname{tang}\varphi_1\Delta(\varphi_2) - \operatorname{tang}\varphi_2\Delta(\varphi_1)}{1 + \operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)},$$

$$\Delta(\varphi_3) = \frac{\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) + k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) = \Delta(\varphi_3) - k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,$$

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 = k'^2.$$

Die letzte Gleichung bleibt für

$$F(\varphi_1) \pm F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

ungeändert. Dieser letzten Gleichung mit doppelten Zeichen entsprechen also die folgenden Formeln, wo immer die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2\Delta(\varphi_2) \pm \cos\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\operatorname{tang}\varphi_3 = \frac{\operatorname{tang}\varphi_1\Delta(\varphi_2) \pm \operatorname{tang}\varphi_2\Delta(\varphi_1)}{1 \mp \operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)},$$

$$\Delta(\varphi_3) = \frac{\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) \mp k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2},$$

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) = \Delta(\varphi_3) \pm k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3.$$

Berechnet man zwei Hülfswinkel aus den Formeln

$$\operatorname{tang}\varphi'_1 = \operatorname{tang}\varphi_1\Delta(\varphi_2),\quad \operatorname{tang}\varphi'_2 = \operatorname{tang}\varphi_2\Delta(\varphi_3);$$

so wird

$$\operatorname{tang}\varphi_3 = \frac{\operatorname{tang}\varphi'_1 \pm \operatorname{tang}\varphi'_2}{1 \mp \operatorname{tang}\varphi'_1\operatorname{tang}\varphi'_2} = \operatorname{tang}(\varphi'_1 \pm \varphi'_2),$$

folglich $\varphi_3 = \varphi'_1 \pm \varphi'_2$, wodurch also φ_3 sich leicht berechnen läßt.

Setzt man $k = 0$, so geht die Gleichung

$$F(\varphi_1) \pm F(\varphi_2) = F(\varphi_3)$$

in die Gleichung

$$\varphi_1 \pm \varphi_2 = \varphi_3$$

und die obigen Formeln in die bekannten goniometrischen Ausdrücke für

$$\sin\varphi_3 = \sin(\varphi_1 \pm \varphi_2),\ \cos\varphi_3 = \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2),\ \operatorname{tang}\varphi_3 = \operatorname{tang}(\varphi_1 \pm \varphi_2)$$

über.

Eine große Anzahl hierher gehörender merkwürdiger Relationen s. m. in C. G. J. Jacobi Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiomonti. 1829. p. 32—34.

17. Setzen wir jetzt

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + F(\varphi_3) = F(\varphi_4)\ ;$$

so ist

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi_4) - F(\varphi_3)$$

und folglich, für

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\psi)\ ,$$

auch

$$F(\varphi_4) - F(\varphi_3) = F(\psi)\ .$$

Nach (16.) haben wir nun

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) &= \Delta(\psi) + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\psi\ ,\\
\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) &= \Delta(\psi) - k^2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \cos\psi\ ,\\
\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 &= \cos\psi + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\, \Delta(\psi)\ ,\\
\cos\varphi_3 \cos\varphi_4 &= \cos\psi - \sin\varphi_3 \sin\varphi_4\, \Delta(\psi)\ ;
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&\Delta(\varphi_1)\,\Delta(\varphi_2)\,\Delta(\varphi_3)\,\Delta(\varphi_4)\\
&= (\Delta(\psi))^2 + k^2(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 \sin\varphi_4)\cos\psi\,\Delta(\psi)\\
&\quad - k^4 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \cos\psi^2\\
&\quad \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4\\
&= \cos\psi^2 + (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 \sin\varphi_4)\cos\psi\,\Delta(\psi)\\
&\quad - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 (\Delta(\psi))^2\ ;
\end{aligned}$$

folglich, wenn man die zweite Gleichung mit k^2 multiplicirt und sie dann von der ersten subtrahirt, weil

$$(\Delta(\psi))^2 - k^2 \cos\psi^2 = 1 - k^2 = k'^2$$

ist:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\,\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) - k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4\\
&= k'^2 + k^2 k'^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4\ ,
\end{aligned}$$

eine sehr merkwürdige der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + F(\varphi_3) = F(\varphi_4)$$

entsprechende Bedingungsgleichung.

18. Soll $F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ seyn, so folgt aus den in (16.) bewiesenen Gleichungen für $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, da $\Delta(\varphi_3) = \sqrt{1-k^2} = k'$ ist, leicht:

$$\sin\varphi_2 \Delta(\varphi_1) = \cos\varphi_1 ,$$
$$\sin\varphi_1 \Delta(\varphi_2) = \cos\varphi_2 ,$$
$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - k' \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = 0 ,$$
$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) = k' ;$$

oder

$$\sin\varphi_2 = \frac{\cos\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{k'\sin\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)}, \quad \Delta(\varphi_2) = \frac{k'}{\Delta(\varphi_1)} ;$$
$$k' \operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = 1 .$$

Diese Gleichungen müssen also zwischen φ_1, φ_2 Statt finden, wenn der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

genügt werden soll. Zwei dieser Gleichung genügende elliptische Functionen $F(\varphi_1)$ und $F(\varphi_2)$ kann man Complemente von einander nennen.

19. Wir wollen jetzt φ_n so zu bestimmen suchen, daß, wenn φ_1 als gegeben betrachtet wird und n eine positive ganze Zahl bezeichnet, der Gleichung

$$F(\varphi_n) = nF(\varphi_1)$$

genügt wird.

Drei beliebige auf einander folgende Werthe von φ_n seyen φ_{n-1}, φ_n, φ_{n+1}, so ist

$$F(\varphi_{n-1}) = (n-1)F(\varphi_1), \quad F(\varphi_n) = nF(\varphi_1), \quad F(\varphi_{n+1}) = (n+1)F(\varphi_1);$$

also

$$F(\varphi_{n+1}) = F(\varphi_n) + F(\varphi_1)$$
$$F(\varphi_{n-1}) = F(\varphi_n) - F(\varphi_1) ;$$

folglich nach (16.)

$$\sin\varphi_{n\pm1} = \frac{\cos\varphi_1 \sin\varphi_n \Delta(\varphi_1) \pm \sin\varphi_1 \cos\varphi_n \Delta(\varphi_n)}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_n^2} ,$$

$$\cos\varphi_{n\pm1} = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_n \mp \sin\varphi_1 \sin\varphi_n \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_n)}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_n^2} ;$$

also

$$\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1} = \frac{2\cos\varphi_1 \sin\varphi_n \Delta(\varphi_1)}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_n^2} ,$$

$$\cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1} = \frac{2\cos\varphi_1 \cos\varphi_n}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_n^2} ;$$

$$\frac{\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1}} = \operatorname{tang}\varphi_n \Delta(\varphi_1) .$$

Aber allgemein

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(x-y)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)\cos \frac{1}{2}(x-y)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x+y) ;$$

also

$$\operatorname{tang} (\tfrac{1}{2}\varphi_{n+1} + \tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}) = \operatorname{tang} \varphi_n \Delta(\varphi_1) .$$

Für $n = 2$ ist

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1) = F(\varphi_1) + F(\varphi_1) ;$$

folglich nach (16.)

$$\sin \varphi_2 = \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \Delta(\varphi_1)}{1 - k^2 \sin \varphi_1^4} ,$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1 - 2 \sin \varphi_1^2 + k^2 \sin \varphi_1^4}{1 - k^2 \sin \varphi_1^4} .$$

Aber

$$\sin \varphi_2 = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi_2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi_2 , \quad 1 + \cos \varphi_2 = 2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi_2^2 ;$$

also

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi_2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \Delta(\varphi_1)}{1 - k^2 \sin \varphi_1^4} ,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\varphi_2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{\cos \varphi_1^2}{1 - k^2 \sin \varphi_1^4} ;$$

folglich, wenn man dividirt:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tang} \varphi_1 \Delta(\varphi_1) .$$

Aus dieser Formel und der obigen allgemeinen Relation erhält man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tang} \varphi_1 \Delta(\varphi_1) ,$$
$$\operatorname{tang} (\tfrac{1}{2}\varphi_3 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) = \operatorname{tang} \varphi_2 \Delta(\varphi_1) ,$$
$$\operatorname{tang} (\tfrac{1}{2}\varphi_4 + \tfrac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tang} \varphi_3 \Delta(\varphi_1) ,$$
$$\operatorname{tang} (\tfrac{1}{2}\varphi_5 + \tfrac{1}{2}\varphi_3) = \operatorname{tang} \varphi_4 \Delta(\varphi_1) ,$$
u. s. f. u. s. f.

durch welche Formeln φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, ... aus φ_1 leicht successive berechnet werden können.

Setzt man

$$2 \cos \varphi_1 \Delta(\varphi_1) = p , \quad 1 - k^2 \sin \varphi_1^4 = q , \quad k^2 \sin \varphi_1^4 = 1 - q = r ;$$

so erhält man aus den oben für $\sin \varphi_2$, $\cos \varphi_2$ und

$$\sin \varphi_{n+1} + \sin \varphi_{n-1} , \quad \cos \varphi_{n+1} + \cos \varphi_{n-1}$$

gefundenen Ausdrücken leicht nach und nach:

$$\sin\varphi_2 = \frac{p}{q}\sin\varphi_1 ,$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{p^2-q^2}{q^2-rp^2}\sin\varphi_1 ,$$

$$\sin\varphi_4 = \frac{(1+r)p^2-2q^2}{q^4-rp^4}pq\sin\varphi_1 ,$$

$$\sin\varphi_5 = \frac{q^6-3p^2q^4+(1+2r)p^4q^2-r^2p^6}{q^6-3rp^2q^4+r(r+2)p^4q^2-rp^6}\sin\varphi_1 ,$$

u. s. f. u. s. f.

$$\cos\varphi_2 = \frac{1-2\sin\varphi_1^2+r}{q} = \frac{s}{q} ,$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{2sq-q^2+p^2r}{q^2-rp^2}\cos\varphi_1 ,$$

$$\cos\varphi_4 = \frac{q^4-2q^3p^2\sin\varphi_1^2+rp^4}{q^4-rp^4} ,$$

$$\cos\varphi_5 = \left\{\frac{2sq(q^2-rp^2)(2sq-q^2+rp^2)}{q^6-3rp^2q^2+(r^2+2r)p^4q^2-rp^6}-1\right\}\cos\varphi_1$$

u. s. f. u. s. f.

Diese Ausdrücke, welche bald sehr complicirt ausfallen, enthalten zugleich die Auflösung des Problems der Division der elliptischen Functionen. Der Gleichung

$$F(\varphi_3) = 3F(\varphi_1), \quad F(\varphi_1) = \tfrac{1}{3}F(\varphi_3)$$

entspricht z. B. die Gleichung

$$\sin\varphi_3 = \frac{p^2-q^2}{q^2-rp^2}\sin\varphi_1 ,$$

in welcher man jetzt aber $\sin\varphi_3$ als die bekannte, $\sin\varphi_1$ als die unbekannte Größe betrachtet, und daher $\sin\varphi_3 = a$, $\sin\varphi_1 = x$ setzen kann. Führt man für p, q ihre Werthe aus dem Obigen wieder ein, so ergiebt sich

$$a = \frac{4(1-x^2)(1-k^2x^2)-(1-k^2x^4)^2}{(1-k^2x^4)^2-4k^2x^4(1-x^2)(1-k^2x^2)}x$$

$$= \frac{3x-4(1+k^2)x^3+6k^2x^5-k^4x^9}{1-6k^2x^4+4k^2(1+k^2)x^6-3k^4x^8} ,$$

eine Gleichung des neunten Grades, aus welcher x bestimmt werden muß. Wie man sich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat, unterliegt keinem Zweifel. Eine besondere Betrachtung verdient jedoch noch der Fall der Halbirung, welchem die Gleichungen

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1), \quad F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_2)$$

entsprechen. Setzt man nämlich in der allgemeinen Gleichung

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_3) = \cos\varphi_3$$

$\varphi_2 = \varphi_1$, und schreibt jetzt φ_2 für φ_3; so wird

$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1{}^2 - \sin\varphi_1{}^2\,\Delta(\varphi_2) = 1 - \sin\varphi_1{}^2\{1+\Delta(\varphi_2)\},$$

$$\sin\varphi_1{}^2 = \frac{1-\cos\varphi_2}{1+\Delta(\varphi_2)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi_2{}^2}{1+\Delta(\varphi_2)};$$

also

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_2}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta(\varphi_2)}},$$

oder, wenn man φ_1 statt φ_2, $\varphi_{\frac{1}{2}}$ statt φ_1 setzt:

$$\sin\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta(\varphi_1)}}.$$

Macht man $k\sin\varphi_1 = \sin\Theta$, so ist

$$\Delta(\varphi_1) = \sqrt{1-\sin\Theta^2} = \cos\Theta,\quad \frac{1+\Delta(\varphi_1)}{2} = \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2;$$

folglich

$$\sin\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_1}{\cos\frac{1}{2}\Theta}.$$

Wie man mittelst dieser Formeln successive $\varphi_{\frac{1}{2}}$, $\varphi_{\frac{1}{4}}$, $\varphi_{\frac{1}{8}}$, $\varphi_{\frac{1}{16}}$, ..., welche den Gleichungen

$$F(\varphi_{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_1)$$

$$F(\varphi_{\frac{1}{4}}) = \tfrac{1}{4}F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_{\frac{1}{2}})$$

$$F(\varphi_{\frac{1}{8}}) = \tfrac{1}{8}F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_{\frac{1}{4}})$$

$$F(\varphi_{\frac{1}{16}}) = \tfrac{1}{16}F(\varphi_1) = \tfrac{1}{2}F(\varphi_{\frac{1}{8}})$$

u. s. f. u. s. f.

entsprechen, berechnen kann, erhellet nun von selbst.

Soll man φ_n so bestimmen, daß

$$F(\varphi_n) = -nF(\varphi_1)$$

ist, so bestimme man φ_n zuerst so, daß

$$F(\varphi_n) = nF(\varphi_1)$$

ist, welches nach dem Obigen immer möglich ist. Da nun offenbar (s. auch 10.)

$$F(-\varphi_n) = -F(\varphi_n)$$

ist; so ist

$$F(-\varphi_n) = -nF(\varphi_1).$$

Soll man überhaupt, wenn m und n ganze Zahlen sind, ψ so bestimmen, daß

$$F(\psi) = \frac{m}{n}F(\varphi)$$

ist, so bestimme man, da

$$nF(\psi) = mF(\varphi)$$

ist, ω nach dem Obigen so, daß

$$nF(\psi) = F(\omega), \quad mF(\varphi) = F(\omega)$$

ist. Die erste Bestimmung giebt eine algebraische Gleichung zwischen $\sin\psi$, $\sin\omega$, die zweite eine algebraische Gleichung zwischen $\sin\varphi$, $\sin\omega$, wie aus dem Obigen erhellet. Folglich giebt die Elimination von $\sin\omega$ aus diesen beiden Gleichungen eine algebraische Gleichung zwischen $\sin\varphi$ und $\sin\psi$, mittelst welcher also sich $\sin\psi$ aus $\sin\varphi$ oder, wie verlangt wurde, ψ aus φ finden läßt.

20. Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich nun die folgende überaus wichtige Bemerkung, wobei wir der Kürze wegen eine Gleichung, die bloß durch algebraische Operationen von den Sinussen und Cosinussen, oder überhaupt von den trigonometrischen Linien der Winkel φ, ψ, ω ... abhängt, eine algebraische Gleichung zwischen φ, ψ, ω, ... nennen wollen. Hat man die Differentialgleichung

$$\frac{m\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \frac{n\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} + \frac{p\partial\omega}{\sqrt{1+k^2\sin\omega^2}} + \ldots = 0$$

mit einer endlichen Anzahl von Theilen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens; so ist deren Integral

$$mF(\varphi) + nF(\psi) + pF(\omega) + \ldots = \text{Const};$$

oder, wenn man, wie es nach dem Obigen verstattet ist,

$$mF(\varphi) = F(\varphi'), \; nF(\psi) = F(\psi'), \; pF(\omega) = F(\omega'), \; \ldots$$

setzt und bemerkt, daß φ', ψ', ω', ... nach dem Obigen respective aus φ, ψ, ω, ... durch algebraische Gleichungen gefunden werden,

$$F(\varphi') + F(\psi') + F(\omega') + \ldots = \text{Const};$$

oder, für

$$\text{Const} = F(\mu):$$

$$F(\varphi') + F(\psi') + F(\omega') + \ldots = F(\mu).$$

Dieser Gleichung läßt sich aber nach dem Obigen offenbar immer durch eine algebraische Gleichung zwischen μ, φ', ψ', ω', ..., also auch zwischen μ, φ, ψ, ω, ... genügen, und diese algebraische Gleichung, in welcher μ die willkührliche Constante ist, wird also das vollständige Integral unserer Differentialgleichung seyn, so daß sich also diese immer durch eine algebraische Gleichung integriren läßt. Dies gilt nun nach dem Obigen, wenn wir

$$R(x) = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$$

setzen, auch von der Differentialgleichung.

$$\frac{m\partial x}{R(x)} + \frac{n\partial y}{R(y)} + \frac{p\partial z}{R(z)} + \ldots = 0.$$

21. E. G. J. Jacobi hat eine sehr einfache und sinnreiche Construction erfunden, durch welche das oben analytisch aufgelöste schwierige Problem der Vervielfachung der elliptischen Functionen

geometrisch aufgelöst wird. Dieses Problem verlangt bekanntlich φ_n so zu bestimmen, daß

$$F(\varphi_n) = nF(\varphi_1)$$

ist, unter der Voraussetzung, daß n eine positive ganze Zahl und φ_1 gegeben ist. Jacobi's Construction, durch welche dieses Problem zur Lösung gebracht wird, ist aber folgende. Aus dem Mittelpunkte C (Fig. 1.) beschreibe man mit einem der Einheit gleichen Halbmesser einen Kreis, ziehe den willkührlichen Radius CA desselben, nehme von A an auf der Peripherie dieses Kreises den Bogen $AM_1 = 2\varphi_1$ und ebenfalls von A an nach derselben Seite hin $AM_1M_2 = 2\varphi_2$, wobei wir für jetzt φ_2 ebenfalls als gegeben ansehen wollen. Nun ziehe man die Sehnen AM_1, M_1M_2, halbire den von denselben eingeschlossenen Winkel AM_1M_2 durch die Linie M_1D, welche den Durchmesser AB in D schneidet, fälle von D auf AM_1 das Perpendikel DO, und beschreibe mit selbigem als Halbmesser aus D als Mittelpunkt einen zweiten Kreis, welcher also die Sehnen AM_1, M_1M_2 beide berühren wird. Zieht man jetzt durch M_2 eine den kleinern Kreis berührende, den größern in M_3 schneidende Linie M_2M_3, durch M_3 wieder eine den kleinern Kreis berührende, den größern in M_4 schneidende Linie M_3M_4, durch M_4 wieder eine den kleinern Kreis berührende, den größern in M_5 schneidende Linie M_4M_5, u. s. w.; so ist $AM_1M_2M_3 = 2\varphi_3$, $AM_1M_2M_3M_4 = 2\varphi_4$, $AM_1M_2M_3M_4M_5 = 2\varphi_5$ u. s. w., und hierdurch also $2\varphi_3$, $2\varphi_4$, $2\varphi_5$, ... durch eine höchst einfache geometrische Verzeichnung gefunden. Daß man diese Construction beliebig weit fortsetzen kann und daß dieselbe auch die Amplituden φ_3, φ_4, φ_5 .... selbst giebt, ist klar.

Wir haben vorher φ_2 als bekannt angesehen, und sind dazu berechtigt, weil sich φ_2 nach (19.) mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tang}\varphi_1 \Delta(\varphi_1)$$

immer leicht berechnen läßt. Indeß kann die Lage und Größe des kleinen Kreises in Fig. 1., d. i. der Mittelpunkt D und der Halbmesser DO auch immer leicht auf folgende Art unmittelbar aus φ_1 bestimmt werden. k wird, wie sich von selbst versteht, immer als gegeben angesehen. Setzen wir nämlich $CD = e$, $DO = \varrho$; so ist $AD = 1 + e$, und, weil $AM_1 = 2\varphi_1$, $BM_1 = \pi - 2\varphi_1$ ist, der Winkel DAO des rechtwinkligen Dreiecks ADO offenbar $= \frac{1}{2}\pi - \varphi_1$. Ferner ist augenscheinlich $AM_1 = 2\sin\varphi_1$, also

$$\begin{aligned} OM_1 &= 2\sin\varphi_1 - (1+e)\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi_1) \\ &= 2\sin\varphi_1 - (1+e)\sin\varphi_1 = (1-e)\sin\varphi_1, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} OM_1D = \frac{DO}{OM_1} = \frac{\varrho}{(1-e)\sin\varphi_1} = \frac{(1+e)\cos\varphi_1}{(1-e)\sin\varphi_1} = \frac{1+e}{1-e}\cot\varphi_1.$$

Ferner ist der Bogen $AM_1M_2 = 2\varphi_2$, also der Winkel

$AM_1M_2 = \frac{1}{2}(2\pi - 2\varphi_2) = \pi - \varphi_2$, $AM_1D = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi_2 = OM'D$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1+e}{1-e}\cot\varphi_1 = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi_2) = \cot\tfrac{1}{2}\varphi_2 ,$$

$$(1+e)\cot\varphi_1 = (1-e)\cot\tfrac{1}{2}\varphi_2$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tang}\varphi_1 .$$

Aber

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tang}\varphi_1\,\Delta(\varphi_1) .$$

Also

$$\frac{1-e}{1+e} = \Delta(\varphi_1), \quad e = \frac{1-\Delta(\varphi_1)}{1+\Delta(\varphi_1)} ,$$

und folglich

$$\varrho = (1+e)\cos\varphi_1 = \frac{2\cos\varphi_1}{1+\Delta(\varphi_1)} .$$

Durch e und ϱ ist aber Lage und Größe des kleinen Kreises in unserer Construction vollständig bestimmt.

Um nun die Richtigkeit der Construction allgemein und in völliger Strenge zu beweisen, wollen wir annehmen, daß überhaupt M_2 und M_3 die Endpunkte der Bogen $2\varphi_{n-1}$ und $2\varphi_n$ seyen. Ferner wollen wir setzen, daß von dem Punkte A bis zu dem Punkte M_2 die ganze Peripherie des mit dem der Einheit gleichen Halbmesser beschriebenen Kreises i Mal durchlaufen worden ist, so ist klar, daß der Bogen

$$AM_3M_2 = 2(i+1)\pi - 2\varphi_{n-1}$$

ist, indem man hierbei nur zu bedenken hat, daß man, um von A bis M_1 zu gelangen, indem man das letzte Mal in A anlangte, nach der Voraussetzung i ganze Peripherien durchlaufen hatte, und nun noch den Bogen AM_1M_2 durchlaufen mußte, um bis zu M_2 zu gelangen, so daß also der Bogen $2\varphi_{n-1}$ und der Bogen AM_3M_2 zusammen offenbar $i+1$ ganze Peripherien ausmachen. Ganz eben so ist

$$AM_4M_3 = 2(i+1)\pi - 2\varphi_n .$$

Zieht man nun AM_2, AM_3, DM_2, DM_3, so ist im Dreieck ADM_2

$$AD = 1 + e ;$$

$$AM_2 = 2\sin\{(i+1)\pi - \varphi_{n-1}\} = -2\sin\varphi_{n-1}\cos(i+1)\pi$$
$$= 2\sin\varphi_{n-1}\cos i\pi ;$$

$$2\varphi_{n-1} + 2DAM_2 = 2i\pi + \pi = (2i+1)\pi ,$$

$$DAM_2 = (2i+1)\frac{\pi}{2} - \varphi_{n-1} ,$$

$$\cos DAM_2 = \sin\varphi_{n-1}\sin(2i+1)\frac{\pi}{2} = \sin\varphi_{n-1}\sin\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sin\varphi_{n-1}\cos i\pi .$$

Folglich ist nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie

$$\begin{aligned} DM_n^2 &= AD^2 + AM_n^2 - 2AD.AM_n.\cos DAM_n \\ &= (1+e)^2 + 4\sin\varphi^2_{n-1} - 4(1+e)\sin\varphi^2_{n-1} \\ &= (1+e)^2 - 4e\sin\varphi^2_{n-1}. \end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Art ist im Dreieck ADM_3

$$AD = 1 + e;$$

$$AM_3 = 2\sin\{(i+1)\pi - \varphi_n\} = 2\sin\varphi_n\cos i\pi;$$

$$2\varphi_n - 2DAM_3 = 2i\pi + \pi = (2i+1)\pi,$$

$$DAM_3 = \varphi_n - (2i+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\cos DAM_3 = \sin\varphi_n\cos i\pi;$$

$$DM_3^2 = (1+e)^2 - 4e\sin\varphi_n^2.$$

Setzt man die Area des Dreiecks $DM_2M_3 = D$, und

$$M_2M_3 = 2\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = y;$$

so ist

$$D = \tfrac{1}{2}\varrho y.$$

Aber, wenn wir $DM_2 = p$, $DM_3 = q$ setzen, nach der bekannten Formel für den Inhalt des Dreiecks aus den drei Seiten

$$\begin{aligned} D &= \tfrac{1}{4}\sqrt{4p^2y^2 - (p^2+y^2-q^2)^2}, \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{2y^2(p^2+q^2) - y^4 - (p^2-q^2)^2}. \end{aligned}$$

Also

$$4\varrho^2 = 2(p^2+q^2) - y^2 - \frac{(p^2-q^2)^2}{y^2}.$$

Substituirt man nun die Ausdrücke

$$y = 2\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$

$$p^2 + q^2 = 2(1+e)^2 - 4e(\sin\varphi_n^2 + \sin\varphi^2_{n-1}),$$

$$p^2 - q^2 = 4e(\sin\varphi_n^2 - \sin\varphi^2_{n-1}) = 4e\sin(\varphi_n + \varphi_{n-1})\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1});$$

so erhält man

$$\begin{aligned} 4\varrho^2 &= 4(1+e)^2 - 8e(\sin\varphi_n^2 + \sin\varphi^2_{n-1}) \\ &\quad - 4\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 - 4e^2\sin(\varphi_n + \varphi_{n-1})^2, \\ \varrho^2 &= \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + 2e\cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})\cos(\varphi_n + \varphi_{n-1}) \\ &\quad + e^2\cos(\varphi_n + \varphi_{n-1})^2, \\ \varrho &= \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + e\cos(\varphi_n + \varphi_{n-1}) \\ &= (1+e)\cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + (1-e)\sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1}, \\ \frac{\varrho}{1+e} &= \cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + \frac{1-e}{1+e}\sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

d. i. nach dem Obigen

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + \sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1}\Delta(\varphi_1).$$

Weil aber $F(\varphi_n) - F(\varphi_{n-1}) = F(\varphi_1)$ seyn soll, so muß nach (16.) wirklich

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_n\cos\varphi_{n-1} + \sin\varphi_n\sin\varphi_{n-1}\Delta(\varphi_1)$$

seyn, und unsere Construction ist folglich offenbar richtig. Meh-

reres über diese merkwürdige Construction und ihre Anwendung findet man in Legendre Traité des fonctions elliptiques. Trois. Suppl. p. 174.

X. Vergleichung der elliptischen Functionen der zweiten Art.

22. Wir gehen hierbei von der in (14.) gefundenen Gleichung

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin\mu^2} = \cos\mu ,$$

welche nach (15.) der Gleichung

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

entspricht, aus, wobei wir zugleich wiederholen, daß immer

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = 0$$

und μ eine Constante ist.

Durch Differentiation der ersten Gleichung erhält man

$$-\sin\varphi\cos\psi\,\partial\varphi - \sin\psi\cos\varphi\,\partial\psi = \sqrt{1-k^2\sin\mu^2}\,.\,\partial\,.\sin\varphi\sin\psi ,$$

und, wenn man quadrirt:

$$(\sin\varphi\cos\psi\,\partial\varphi + \sin\psi\cos\varphi\,\partial\psi)^2 = (1-k^2\sin\mu^2)(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2$$

$$k^2\sin\mu^2(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2 = (\cos\varphi\sin\psi\,\partial\varphi + \cos\psi\sin\varphi\,\partial\psi)^2 - (\sin\varphi\cos\psi\,\partial\varphi + \sin\psi\cos\varphi\,\partial\psi)^2$$

$$= (\cos\varphi^2\sin\psi^2 - \sin\varphi^2\cos\psi^2)\,\partial\varphi^2 + (\sin\varphi^2\cos\psi^2 - \cos\varphi^2\sin\psi^2)\,\partial\psi^2$$

$$= (\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi^2 + (\sin\varphi^2 - \sin\psi^2)\,\partial\psi^2 ,$$

$$k^4\sin\mu^2(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2$$

$$= k^2(\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi^2 + k^2(\sin\varphi^2 - \sin\psi^2)\,\partial\psi^2 .$$

Zu dieser Gleichung addire man die Gleichung

$$0 = (1 - k^2\sin\psi^2)\,\partial\varphi^2 + 2\,\partial\varphi\,\partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}\,.\sqrt{1-k^2\sin\psi^2} + (1-k^2\sin\varphi^2)\,\partial\psi^2 ,$$

welche sich auf der Stelle durch Quadrirung der Gleichung

$$0 = \partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2} + \partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}$$

ergiebt; so erhält man

$$k^4\sin\mu^2(\partial\,.\sin\varphi\sin\psi)^2$$

$$= (1-k^2\sin\varphi^2)\,\partial\varphi^2 + 2\,\partial\varphi\,\partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}\,.\sqrt{1-k^2\sin\psi^2} + (1-k^2\sin\psi^2)\,\partial\psi^2$$

$$= \{\partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} + \partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}\}^2 ,$$

und, wenn man die Quadratwurzel auszieht:

$$k^2\sin\mu\,\partial\,.\sin\varphi\sin\psi = \pm\,\partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} \pm \partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2} ;$$

also, wenn man integrirt

$$k^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi = \pm\int\partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2} \pm \int\partial\psi\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}$$

$$= \pm\int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi \pm \int\Delta(\psi)\,\partial\psi ,$$

oder nach unserer Bezeichnung der elliptischen Functionen der zweiten Art, wenn nur die Integrale respective zwischen den Gränzen 0, φ und 0, ψ genommen werden:

$$k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi = \pm E(\varphi) \pm E(\psi) + \text{Const.}$$

Weil nun

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

und $F(\varphi) = 0$ ist für $\varphi = 0$; so ist

$$F(\psi) - F(\mu) = 0,\ F(\psi) = F(\mu),\ \psi = \mu$$

für $\varphi = 0$. Aber, da das durch $E(\varphi)$ bezeichnete Integral zwischen den Gränzen 0, φ oder so genommen ist, daß es für $\varphi = 0$ verschwindet, $E(\varphi) = 0$ für $= 0$. Folglich, wenn man, um Const zu bestimmen, in obiger Gleichung $\varphi = 0$ setzt:

$$0 = \pm E(\mu) + \text{Const},\ \text{Const} = \mp E(\mu);$$

also

$$\pm E(\varphi) \pm E(\psi) \mp E(\mu) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi,$$
$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = \pm k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi,$$

wo nun noch entschieden werden muß, welches Vorzeichen man zu nehmen hat. Nach dem Obigen ist

$$k^2 \sin\mu\, \partial . \sin\varphi \sin\psi = \pm \Delta(\varphi)\partial\varphi \pm \Delta(\psi)\partial\psi,$$

und nach (16.) hat man

$$\Delta(\varphi) = \frac{\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi}{\sin\mu\sin\psi},\ \Delta(\psi) = \frac{\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi}{\sin\mu\sin\varphi};$$

also

$$\pm k^2 \sin\mu\, \partial . \sin\varphi \sin\psi = \frac{\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi}{\sin\mu\sin\psi}\partial\varphi + \frac{\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi}{\sin\mu\sin\varphi}\partial\psi$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi\sin\varphi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}\partial\varphi + \frac{\sin\psi\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi\sin\psi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}\partial\psi$$

$$= \frac{\sin\varphi\,\partial\sin\varphi + \cos\mu\cos\psi\,\partial\cos\varphi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi} + \frac{\sin\psi\,\partial\sin\psi + \cos\mu\cos\varphi\,\partial\cos\psi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\partial . \sin\varphi^2 + \frac{1}{2}\partial . \sin\psi^2 + \cos\mu\,(\cos\varphi\,\partial\cos\psi + \cos\psi\,\partial\cos\varphi)}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\partial . \sin\varphi^2 + \frac{1}{2}\partial . \sin\psi^2 + \cos\mu\,\partial . \cos\varphi\cos\psi}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}$$

$$= \frac{\partial(\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi)}{2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}.$$

Nach (16.) ist aber auch

$$1 = \cos\mu^2 + \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 - 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi + k^2\sin\mu^2\sin\varphi^2\sin\psi^2,$$
$$\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi = 1 + \cos\mu^2 + k^2\sin\mu^2\sin\varphi^2\sin\psi^2,$$
$$\partial(\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi)$$
$$= k^2\sin\mu^2\,\partial . \sin\varphi^2\sin\psi^2 = 2k^2\sin\mu^2\sin\varphi\sin\psi\,\partial . \sin\varphi\sin\psi;$$

also nach gehöriger Substitution in obige Gleichung:

$$\pm k^2\sin\mu\,\partial . \sin\varphi\sin\psi = k^2\sin\mu\,\partial . \sin\varphi\sin\psi,$$

woraus also hervorgeht, das man das obere Zeichen nehmen, und folglich

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$$

setzen muß.

Hieraus ergiebt sich nun der folgende merkwürdige Lehrsatz, welcher als das Fundamentaltheorem der Theorie der elliptischen Functionen der zweiten Art zu betrachten ist:

Wenn die Amplituden φ_1, φ_2, φ_3 der Gleichung

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0$$

genügen; so ist immer

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) - E(\varphi_3) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 .$$

Nach (16.) hat man die Gleichungen

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \Delta(\varphi_1) ,$$
$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \Delta(\varphi_2) ,$$
$$\cos\varphi_3 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_3) ;$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_3 \cos\varphi_2 \Delta(\varphi_2) - \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3)}{1 - k^2 \sin\varphi_2^2 \sin\varphi_3^2} ,$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_3 \cos\varphi_1 \Delta(\varphi_1) - \sin\varphi_1 \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3)}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_3^2} ,$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \Delta(\varphi_1) + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Delta(\varphi_2)}{1 - k^2 \sin\varphi_1^2 \sin\psi_2^2} .$$

23. Setzen wir wieder allgemein

$$F(\varphi_n) = nF(\varphi_1) ,$$

so hat man die Gleichungen

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_1) - F(\varphi_2) = 0 ,$$
$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0 ,$$
$$F(\varphi_1) + F(\varphi_3) - F(\varphi_4) = 0 ,$$
$$F(\varphi_1) + F(\varphi_4) - F(\varphi_5) = 0 ,$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

welchen nach (22.) die Gleichungen

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_1) - E(\varphi_2) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ,$$
$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) - E(\varphi_3) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 ,$$
$$E(\varphi_1) + E(\varphi_3) - E(\varphi_4) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 ,$$
$$E(\varphi_1) + E(\varphi_4) - E(\varphi_5) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_4 \sin\varphi_5 ,$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

entsprechen. Nach gehöriger Substitution erhält man aus diesen Gleichungen:

$$2E(\varphi_1) - E(\varphi_2) = k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$
$$3E(\varphi_1) - E(\varphi_3) = k^2 \sin\varphi_1 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3)$$
$$4E(\varphi_1) - E(\varphi_4) = k^2 \sin\varphi_1 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4)$$
$$5E(\varphi_1) - E(\varphi_5) =$$
$$k^2 \sin\varphi_1 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 + \sin\varphi_4 \sin\varphi_5)$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

welche also den Gleichungen

$2F(\varphi_1)=F(\varphi_2), 3F(\varphi_1)=F(\varphi_3), 4F(\varphi_1)=F(\varphi_4), 5F(\varphi_1)=F(\varphi_5), \ldots$

entsprechen.

XI. Vergleichung der elliptischen Functionen der dritten Art.

24. Wie vorher nehmen wir wieder an, daß

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} + \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\sin\psi^2}} = \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{\partial\psi}{\Delta(\psi)} = 0$$

sey. Setzen wir nun überhaupt

$$Q = \int\left\{\frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)} + \frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\psi^2)\,\Delta(\psi)}\right\},$$

und führen

$$\frac{\partial\psi}{\Delta(\psi)} = -\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

in diese Gleichung ein; so erhalten wir

$$Q = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\cdot\frac{n(\sin\psi^2-\sin\varphi^2)}{1+n(\sin\varphi^2-\sin\psi^2)+n^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}.$$

Nach (22) ist aber, da man, wie wir wissen, dort die obern Zeichen nehmen muß,

$$k^2\sin\mu\,\partial.\sin\varphi\sin\psi = \Delta(\varphi)\,\partial\varphi + \Delta(\psi)\,\partial\psi$$

$$= \Delta(\varphi)\,\partial\varphi - \frac{(\Delta(\psi))^2}{\Delta(\varphi)}\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\left\{(\Delta(\varphi))^2 - (\Delta(\psi))^2\right\}$$

$$= \frac{k^2\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\left\{\sin\psi^2-\sin\varphi^2\right\};$$

also, wenn man dies in den obigen Ausdruck von Q einführt und der Kürze wegen

$$\sin\varphi^2+\sin\psi^2 = p,\quad \sin\varphi\sin\psi = q$$

setzt:

$$Q = \int\frac{n\sin\mu\,\partial q}{1+np+n^2q^2}.$$

Um p aus diesem Ausdruck zu eliminiren, so daß das Integral bloß von q und constanten Größen abhängt, ist nach (14.)

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\mu) = \cos\mu;$$

also

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2 =$$

$$\cos\mu^2 + 2\cos\mu\sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\mu) + \sin\varphi^2\sin\psi^2(1-k^2\sin\mu^2)$$

$$= \cos\mu^2 + 2q\cos\mu\,\Delta(\mu) + q^2(1-k^2\sin\mu^2);$$

aber auch

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2 = 1 - (\sin\varphi^2 + \sin\psi^2) + \sin\varphi^2\sin\psi^2$$
$$= 1 - p + q^2 ;$$

also

$$p = \sin\mu^2 - 2q\cos\mu\,\Delta(\mu) + k^2 q^2 \sin\mu^2 ;$$

folglich

$$Q = \int \frac{n\sin\mu\,\partial q}{1 + n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\Delta(\mu) + q^2(n^2 + nk^2\sin\mu^2)},$$

wobei wir annehmen wollen, daß das Integral zwischen den Gränzen 0, q genommen, oder so bestimmt sey, daß es für $q = 0$ verschwindet.

Es ist aber auch nach der eingeführten Bezeichnung der elliptischen Functionen der dritten Art

$$Q = \Pi(\varphi) + \Pi(\psi) + \text{Const.}$$

Also

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) + \text{Const.}$$
$$= \int_0^q \frac{n\sin\mu\,\partial q}{1 + n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\Delta(\mu) + q^2(n^2 + nk^2\sin\mu^2)}.$$

Weil aber nach der Voraussetzung

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

ist, so ist $\psi = \mu$ für $\varphi = 0$. Für $\varphi = 0$ ist aber offenbar nach dem Obigen auch $q = 0$, und für diesen Werth von q verschwindet das Integral auf der rechten Seite in vorstehender Gleichung. Also ist für $\varphi = 0$:

$$\Pi(\mu) + \text{Const} = 0, \quad \text{Const} = -\Pi(\mu);$$

folglich

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi(\mu)$$
$$= \int_0^q \frac{-n\sin\mu\,\partial q}{1 + n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\Delta(\mu) + q^2(n^2 + nk^2\sin\mu^2)}.$$

Um nun das Integral zu finden, wollen wir überhaupt

$$\int_0^x \frac{\partial x}{a + bx + cx^2}$$

entwickeln. Zu dem Ende setze man

$$\frac{\partial x}{a + bx + cx^2} = \frac{\partial x}{c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2\right)} = \frac{\partial x}{c(\alpha + 2\beta x + x^2)}$$
$$= \frac{\partial x}{c(\alpha - \beta^2 + \beta^2 + 2\beta x + x^2)} = \frac{\partial x}{c\{\alpha - \beta^2 + (\beta + x)^2\}}$$
$$= \frac{\partial x}{c(\alpha - \beta^2)\left\{1 + \frac{(\beta + x)^2}{\alpha - \beta^2}\right\}},$$

wo also

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{2c}$$

ist. Sey nun

$$\frac{\beta + x}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} = y, \; \partial x = \sqrt{\alpha - \beta^2} \cdot \partial y .$$

Folglich

$$\int \frac{\partial x}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \int \frac{\partial y}{1 + y^2} = \frac{\text{Arc tang } y}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} .$$

Weil aber das Integral zwischen den Gränzen 0, x genommen oder so bestimmt werden soll, daß es für $x = 0$ verschwindet, und

$$y = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{ für } x = 0$$

ist; so ist

$$\int_0^x \frac{\partial x}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \left\{ \text{Arc tang } y - \text{Arc tang } \frac{\beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{Arc tang} \frac{y - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2}}}{1 + \frac{\beta y}{\sqrt{\alpha - \beta^2}}} = \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{Arc tang} \frac{y\sqrt{\alpha - \beta^2} - \beta}{\sqrt{\alpha - \beta^2} + \beta y}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\alpha - \beta^2}} \text{Arc tang} \frac{x\sqrt{\alpha - \beta^2}}{\alpha + \beta x} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \text{Arc tang} \frac{x\sqrt{4ac - b^2}}{2a + bx} .$$

Setzt man nun $x = q$ und

$1 + n \sin\mu^2 = a, \; -2n \cos\mu \Delta(\mu) = b, \; n^2 + n k^2 \sin\mu^2 = c$;

so ist unser obiges Integral:

$$n \sin\mu \int_0^q \frac{\partial q}{a + bq + cq^2} = \frac{2n \sin\mu}{\sqrt{4ac - b^2}} \text{Arc tang} \frac{q\sqrt{4ac - b^2}}{2a + bq} .$$

Nun findet man aber leicht

$$4ac - b^2 = 4 \sin\mu^2 (n^2 + nk^2 + n^3 + n^2 k^2)$$

$$= 4n^2 \sin\mu^2 \left(1 + n + \frac{k^2}{n} + k^2\right)$$

$$= 4n^2 \sin\mu^2 \left\{1 + n + (1 + n)\frac{k^2}{n}\right\}$$

$$= 4n^2 (1 + n)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right) \sin\mu^2 ,$$

$$\sqrt{4ac - b^2} = 2n\sqrt{\alpha} \sin\mu ,$$

wenn wir

$$(1 + n)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right) = \alpha$$

setzen.

Ferner ist, weil

$$q = \sin\varphi \sin\psi$$

und nach dem Obigen

$$q\,\Delta(\mu) = \sin\varphi \sin\psi\,\Delta(\mu) = \cos\varphi\cos\psi - \cos\mu$$

ist:

$$\begin{aligned} 2a + bq &= 2 + 2n\sin\mu^2 - 2nq\cos\mu\,\Delta(\mu) \\ &= 2 + 2n\sin\mu^2 - 2n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi + 2n\cos\mu^2 \\ &= 2(1 + n - n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi)\,. \end{aligned}$$

Also

$$n\sin\mu\int_0^q \frac{\partial q}{a + bq + cq^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}{1 + n - n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi}\,.$$

Ist also

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0\,,$$

so ist immer

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{1 + n - n\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3}\,,$$

für den obigen Werth von α. Zugleich entspricht diesen beiden Gleichungen die Gleichung

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) - E(\varphi_3) = k^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\,,$$

wie wir aus dem Vorhergehenden wissen.

Noch ist hierbei zu bemerken, daß der für $\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$ gefundene Ausdruck imaginär wird, wenn α negativ ist. In diesem Falle verwandelt man, wie oft in der Integralrechnung, den Kreisbogen in einen natürlichen Logarithmus, wozu folgende Formel dient. Es ist nämlich

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

$$\text{tang}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}},$$

oder, wenn man $x\sqrt{-1}$ für x setzt:

$$\text{tang}\,x\sqrt{-1} = \frac{e^{-2x} - 1}{(e^{-2x} + 1)\sqrt{-1}} = \frac{1 - e^{2x}}{(1 + e^{2x})\sqrt{-1}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\sqrt{-1};$$

folglich

$$x\sqrt{-1} = \text{Arc tang}\,\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\sqrt{-1}\,.$$

Setzt man nun

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = z\,,$$

so wird

$$e^{2x} = \frac{1+z}{1-z}, \quad x = \tfrac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{Arc\,tang} z \sqrt{-1} = \tfrac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z},$$

mittelst welcher Gleichung sich folglich, wie man sieht, ein Kreisbogen, dessen Tangente imaginär ist, immer leicht in den natürlichen Logarithmus einer reellen Größe verwandeln läßt. Deshalb wollen wir immer den obigen Ausdruck von $\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$ beibehalten.

Ist n positiv, so ist offenbar auch α immer positiv. In diesem Falle kann man $n = \cot\Theta^2$ setzen. Dann ist

$$\alpha = (1 + \cot\Theta^2)\left(1 + \frac{k^2}{\cot\Theta^2}\right) = \frac{1}{\sin\Theta^2}\left(1 + \frac{k^2 \sin\Theta^2}{\cos\Theta^2}\right)$$

$$= \frac{1-(1-k^2)\sin\Theta^2}{\sin\Theta^2\cos\Theta^2} = \frac{1 - k'^2 \sin\Theta^2}{\sin\Theta^2\cos\Theta^2},$$

d. i., wenn wir in der Folge, so wie wir nach dem Vorhergehenden immer

$$\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2} = \Delta(\varphi)$$

setzen, stets

$$\sqrt{1 - k'^2 \sin\varphi^2} = \Delta(\varphi)$$

setzen:

$$\sqrt{\alpha} = \frac{\Delta(\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}.$$

Folglich nach dem Obigen in diesem Falle

$$\Pi(\varphi_1)+\Pi(\varphi_2)-\Pi(\varphi_3) = \frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\Delta(\Theta)} \operatorname{Arc\,tang} \frac{\cot\Theta\,\Delta(\Theta)\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{1-\cos\Theta^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3}.$$

α ist ferner offenbar auch positiv, wenn n negativ und sein absoluter Werth $> k^2$, < 1 ist, so wie auch auf der Stelle in die Augen fällt, daß im entgegengesetzten Falle, wenn der absolute Werth von n nicht zwischen den angegebenen Gränzen liegt, α stets negativ ist. Ist nun n negativ und sein absoluter Werth $> k^2$, < 1, so kann man

$$n = -1 + k'^2 \sin\Theta^2$$

setzen, weil dann der absolute Werth

$$1 - k'^2 \sin\Theta^2$$

von n offenbar < 1 und auch

$$1 - k'^2 \sin\Theta^2 > k^2$$

ist, indem hieraus

$$1 - k^2 > k'^2 \sin\Theta^2, \quad k'^2 > k'^2 \sin\Theta^2$$

folgt, wie es offenbar wirklich der Fall ist. Für obigen Werth von n erhält man aber

$$\alpha = k'^2 \sin\Theta^2 \left\{1 - \frac{k^2}{1 - k'^2 \sin\Theta^2}\right\} = \frac{k'^4 \sin\Theta^2 \cos\Theta^2}{1 - k'^2 \sin\Theta^2},$$

$$\gamma\alpha = \frac{k'^2 \sin\Theta\cos\Theta}{\gamma 1 - k'^2 \sin\Theta^2} = \frac{k'^2 \sin\Theta\cos\Theta}{\Delta(\Theta)}.$$

Nach gehöriger Substitution erhält man in diesem Falle

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$$
$$= \frac{\Delta(\Theta)}{k'^2 \sin\Theta\cos\Theta} \operatorname{Arc\,tang} \frac{-k'^2 \sin\Theta\cos\Theta\Delta(\Theta)\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{k'^2 \sin\Theta^2 + (\Delta(\Theta))^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}.$$

Ist n negativ und sein absoluter Werth nicht zwischen den Gränzen k^2 und 1 enthalten, so sey derselbe zuerst $< k^2$. Dann ist man berechtigt

$$n = -k^2 \sin\Theta^2$$

zu setzen. Da in diesem Falle α negativ ist, so setze man

$$\gamma\alpha = \gamma - \alpha . \gamma - 1 = \beta\gamma - 1.$$

Dies giebt nach dem Obigen

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3) = \frac{1}{\beta\gamma - 1} \operatorname{Arc\,tang} \frac{n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{1 + n - n\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3} \gamma - 1$$

und folglich, wenn man

$$z = \frac{n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{1 + n - n\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3}$$

setzt:

$$\Pi(\varphi_1) + \Pi(\varphi_2) - \Pi(\varphi_3)$$
$$= \frac{1}{2\beta} l \frac{1 + n - n\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}{1 + n - n\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 - n\beta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}.$$

Aber, wenn wir $-n$ für n setzen und

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{(1 - n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)}$$

durch $\Pi(-n, \varphi)$ bezeichnen, wie in der Folge in ähnlichen Fällen immer geschehen soll:

$$\beta = \gamma - \alpha = \frac{(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2 - n)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n\beta = n^{\frac{1}{2}}(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2 - n)^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich, immer $-n$ statt n gesetzt:

$$\Pi(-n, \varphi_1) + \Pi(-n, \varphi_2) - \Pi(-n, \varphi_3)$$
$$= \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2-n)^{\frac{1}{2}}} l \frac{1-n+n\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 - n^{\frac{1}{2}}(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2-n)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{1-n+n\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + n^{\frac{1}{2}}(1-n)^{\frac{1}{2}}(k^2-n)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}.$$

Setzt man nun in dieser Formel, wie erforderlich ist, n nicht $= -k^2 \sin\Theta^2$, sondern $= k^2 \sin\Theta^2$; so erhält man leicht

$$\Pi(-n, \varphi_1) + \Pi(-n, \varphi_2) - \Pi(-n, \varphi_3)$$
$$= \frac{\tang\Theta}{2\Delta(\Theta)} l \frac{(\Delta(\Theta))^2 + k^2\sin\Theta^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 - k^2\sin\Theta\cos\Theta\Delta(\Theta)\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{(\Delta(\Theta))^2 + k^2\sin\Theta^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + k^2\sin\Theta\cos\Theta\Delta(\Theta)\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}.$$

Weil aber nach (16.)

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Delta(\varphi_3)$$

ist; so ist der Zähler und Nenner des Bruchs, von welchem in vorstehender Formel der natürliche Logarithmus zu nehmen ist, indem sich auf erstern die obern, auf letztern die untern Zeichen beziehen,

$$= 1 - k^2 \sin\Theta^2 + k^2 \sin\Theta^2 \{\cos\varphi_3{}^2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3)\}$$
$$\mp k^2 \sin\Theta \cos\Theta \Delta(\Theta) \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3$$
$$= 1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2$$
$$+ k^2 \sin\Theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \{\sin\Theta \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3) \mp \cos\Theta \sin\varphi_3 \Delta(\Theta)\} .$$

Bestimmen wir nun die Winkel ψ und ψ' so, daß durch dieselben den Gleichungen

$$F(\Theta) - F(\varphi_3) = F(\psi), \quad F(\Theta) + F(\varphi_3) = F(\psi')$$

genügt wird, so daß also nach (16.)

$$\sin\psi = \frac{\sin\Theta \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3) - \cos\Theta \sin\varphi_3 \Delta(\Theta)}{1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2},$$

$$\sin\psi' = \frac{\sin\Theta \cos\varphi_3 \Delta(\varphi_3) + \cos\Theta \sin\varphi_3 \Delta(\Theta)}{1 - k^2 \sin\Theta^2 \sin\varphi_3{}^2}$$

ist; so ist

$$\Pi(-n, \varphi_1) + \Pi(-n, \varphi_2) - \Pi(-n, \varphi_3)$$
$$= \frac{\tang\Theta}{2\Delta(\Theta)} \left] \frac{1 + k^2 \sin\Theta \sin\psi \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{1 + k^2 \sin\Theta \sin\psi' \sin\varphi_1 \sin\varphi_2} \right. .$$

Wenn n negativ ist, sind nun noch die drei Fälle zu betrachten, wo der absolute Werth von $n > 1, = k^2$ und $= 1$ ist. In den beiden letzten Fällen wird α offenbar $= 0$. Wir wollen nur noch kurz anzeigen, wie sich diese Fälle auf die vorhergehenden zurückführen lassen. Setzt man nämlich

$$p = \frac{\tang\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

so erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial p}{1 + \alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} \cdot \frac{1 - k^2 \sin\varphi^4}{(1 - k^2 \sin\varphi^2) \cos\varphi^2 + \alpha \sin\varphi^2} .$$

Setzt man nun im Nenner für α seinen Werth

$$\alpha = (1 - n)\left(1 - \frac{k^2}{n}\right),$$

indem wir nämlich wieder $-n$ für n schreiben, so wird derselbe

$$= (1 - k^2 \sin\varphi^2) \cos\varphi^2 + (1 - n)\left(1 - \frac{k^2}{n}\right) \sin\varphi^2$$
$$= 1 - n \sin\varphi^2 + k^2 \sin\varphi^4 - \frac{k^2}{n} \sin\varphi^2$$
$$= 1 - n \sin\varphi^2 - \frac{k^2}{n} \sin\varphi^2 (1 - n \sin\varphi^2)$$
$$= (1 - n \sin\varphi^2)\left(1 - \frac{k^2}{n} \sin\varphi^2\right),$$

und es ist folglich,

$$\frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} \cdot \frac{1-k^2\sin\varphi^4}{(1-n\sin\varphi^2)\left(1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2\right)}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\left\{\frac{1}{1-n\sin\varphi^2}+\frac{1}{1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2}-1\right\};$$

also, da $p = 0$ für $\varphi = 0$:

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2}$$

$$= \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)} + \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-\frac{k^2}{n}\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)} - \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

d. i.

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \Pi(-n,\ \varphi) + \Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) - F(\varphi).$$

Aber, wenn man $p\sqrt{\alpha} = q$, $\partial p\sqrt{\alpha} = \partial q$ setzt:

$$\int_0^p \frac{\partial p}{1+\alpha p^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^q \frac{\partial q}{1+q^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,q$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,p\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\text{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

und folglich immer

$$\Pi(-n,\ \varphi) + \Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{Arc tang}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\text{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

oder, wenn α negativ ist, für $\sqrt{\alpha} = \beta\sqrt{-1}$:

$$\Pi(-n,\ \varphi) + \Pi\left(-\frac{k^2}{n},\ \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{2\beta}\,l\,\frac{\Delta(\varphi)+\beta\,\text{tang}\,\varphi}{\Delta(\varphi)-\beta\,\text{tang}\,\varphi}.$$

Ist nun $n > 1$, so kann man $n = \frac{1}{\sin\Theta^2}$ setzen. Dann ist

$$\alpha = \left(1-\frac{1}{\sin\Theta^2}\right)(1-k^2\sin\Theta^2) = -\frac{1-k^2\sin\Theta^2}{\text{tang}\,\Theta^2},$$

$$\beta = \sqrt{-\alpha} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}{\text{tang}\,\Theta} = \frac{\Delta(\Theta)}{\text{tang}\,\Theta}.$$

Folglich

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\varphi\right)+\Pi(-k^2\sin\Theta^2,\varphi) = F(\varphi)+\frac{\text{tang}\,\Theta}{2\Delta(\Theta)}\,l\,\frac{\text{tang}\,\Theta\Delta(\varphi)+\text{tang}\,\varphi\Delta(\Theta)}{\text{tang}\,\Theta\Delta(\varphi)-\text{tang}\,\varphi\Delta(\Theta)},$$

so daß sich also $\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\ \varphi\right)$ immer auf $F(\varphi)$ und das schon vorher gefundene $\Pi(-k^2\sin\Theta^2,\ \varphi)$ zurückführen läßt. Für $\varphi = \Theta$ wird der natürliche Logarithmus in vorstehender Gleichung unendlich, und in der That ist

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\ \varphi\right) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\Theta^2}\right)\Delta(\varphi)}$$

für $\varphi = \Theta$ unendlich. Wird φ größer als Θ, so hat man in der obigen Gleichung den natürlichen Logarithmus einer negativen Größe zu nehmen, ein Symbol des Imaginären, welches damit zusammenhängt, daß im vorliegenden Falle die durch das Integral

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin\Theta^2},\ \varphi\right) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\Theta^2}\right)\Delta(\varphi)}$$

dargestellte Summe unendlich große Glieder enthält.

Ist $\mathrm{n} = 1$ oder $\mathrm{n} = \mathrm{k}^2$, so ist $\alpha = 0$ und folglich in beiden Fällen

$$\int_0^{\mathrm{p}} \frac{\partial \mathrm{p}}{1+\alpha\mathrm{p}^2} = \Pi(-1,\varphi) + \Pi(-\mathrm{k}^2,\varphi) - \mathrm{F}(\varphi)$$

$$= \int_0^{\mathrm{p}} \partial \mathrm{p} = \mathrm{p} = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$\Pi(-1,\varphi) + \Pi(-\mathrm{k}^2,\varphi) = \mathrm{F}(\varphi) + \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Nun ist aber, wie wir schon in (9.) gesehen haben,

$$\partial.\Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{k}'^2\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)\cos\varphi^2} - \frac{\mathrm{k}'^2\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + \Delta(\varphi)\partial\varphi,$$

wenn wir statt des dortigen b^2 hier $\mathrm{k}'^2 = 1-\mathrm{k}^2$ setzen. Also

$$\Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi = \mathrm{k}'^2\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta(\varphi)} - \mathrm{k}'^2\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + \int_0^{\varphi}\Delta(\varphi)\partial\varphi,$$

d. i., weil

$$\Pi(-1,\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{(1-\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)} = \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta(\varphi)}$$

ist:

$$\Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi = \mathrm{k}'^2\,\Pi(-1,\varphi) - \mathrm{k}'^2\,\mathrm{F}(\varphi) + \mathrm{E}(\varphi),$$

$$\Pi(-1,\varphi) = \mathrm{F}(\varphi) - \frac{1}{\mathrm{k}'^2}\mathrm{E}(\varphi) + \frac{1}{\mathrm{k}'^2}\Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi,$$

und folglich nach der obigen Gleichung zwischen $\Pi(-1,\varphi)$ und $\Pi(-\mathrm{k}^2,\varphi)$:

$$\Pi(-\mathrm{k}^2,\varphi) = \frac{1}{\mathrm{k}'^2}\mathrm{E}(\varphi) + \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{\mathrm{k}'^2}\Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi$$

$$= \frac{1}{\mathrm{k}'^2}\mathrm{E}(\varphi) - \frac{\mathrm{k}^2\sin\varphi\cos\varphi}{\mathrm{k}'^2\,\Delta(\varphi)}.$$

Durch diese Formeln sind also $\Pi(-\mathrm{k}^2,\varphi)$ und $\Pi(-1,\varphi)$ auf elliptische Functionen der ersten und zweiten Ordnung ge-

bracht, so daß uns nach allem Bisherigen nur folgende drei vorher schon vollständig behandelte Fälle übrig bleiben:

1. Wenn in der Function $\Pi(n, \varphi)$ oder $\Pi(\varphi)$, was nach der eingeführten Bezeichnung dasselbe ist, die Größe n positiv oder von der Form $n = \cot\Theta^2$ ist.

2. Wenn n negativ, sein absoluter Werth aber $> k^2$, < 1, oder n von der Form

$$n = -1 + k'^2 \sin\Theta^2$$

ist.

3. Wenn n negativ und sein absoluter Werth $< k^2$ oder n von der Form

$$n = -k^2 \sin\Theta^2$$

ist.

Auch Legendre betrachtet immer nur diese drei Fälle, und schließt nach einer ausdrücklichen Bemerkung (Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 71.) namentlich den Fall, wenn n negativ und sein absoluter Werth größer als die Einheit ist, ganz aus. Wegen des Falls, wenn n imaginär ist, müssen wir hier auf Chap. XXIV. des angeführten Werks oder auf die Exercices de calcul intégral. T. I. p. 147. verweisen. Mit vieler Leichtigkeit lassen sich auch aus den obigen allgemeinen Formeln viele merkwürdige specielle Sätze ableiten, welches aber keiner Schwierigkeit unterliegt, und uns hier, da dieser Artikel uns noch ein weites Feld allgemeinerer Untersuchungen darbietet, zu weit führen würde.

XII. Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel, abgeleitet aus dem Vorhergehenden.

25. Wenn

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die allgemeine Gleichung einer Ellipse ist, hier aber die große Halbaxe $a = 1$, die Excentricität $= \sqrt{1 - b^2} = k$ gesetzt wird; so ist noch (9.) für $x = \sin\varphi$, wenn s den, den Coordinaten x, y entsprechenden, Bogen bezeichnet,

$$s = \int \Delta(\varphi)\,\partial\varphi\,,$$

das Integral zwischen den gehörigen Gränzen genommen. Ist nun in Fig. 2. mit AA_1 und BB_1 als Axen die in Rede stehende Ellipse beschrieben, so denke man sich über AA_1 als Durchmesser, d. i. mit einem der Einheit gleichen Radius einen Kreis beschrieben, und nehme den Winkel $B'CM' = \varphi$. Dann ist offenbar, wenn man von M' auf die Hauptaxe ein Perpendikel fällt, $CP = x = \sin\varphi$. Bestimmt man nun das obige Inte-

gral so, daß es für $\varphi = 0$ verschwindet, oder nimmt es zwischen den Gränzen 0 und φ, so wird durch dasselbe offenbar der von dem Endpunkte B der Nebenaxe an gerechnete Bogen $BM = s$ der Ellipse dargestellt, und es ist folglich in der bekannten Bezeichnung der elliptischen Functionen der zweiten Art

$$BM = s = \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi)\partial\varphi = E(\varphi) .$$

Jede elliptische Function der zweiten Art stellt also die Länge eines Bogens der Ellipse vor, eine Eigenschaft, von welcher die ganze Klasse dieser Transcendenten den Namen erhalten hat, und aus der also auch im Allgemeinen hervorgeht, daß jede Eigenschaft der elliptischen Functionen der zweiten Art zugleich eine Eigenschaft der Ellipse involvirt, worüber nur einige specielle Bemerkungen beigebracht werden sollen.

26. Wenn $F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$, d. i. nach 16.)

$$\cos\mu\cos\psi + \sin\mu\sin\psi\Delta(\varphi) = \cos\varphi$$
$$\cos\mu\cos\varphi + \sin\mu\sin\varphi\Delta(\psi) = \cos\psi$$
$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Delta(\mu) = \cos\mu$$

ist; so ist nach (22.) immer

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = k^2 \sin\mu\sin\varphi\sin\psi .$$

Setzen wir nun $\mu = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\Delta(\mu) = \sqrt{1-k^2} = b$; also

$$\sin\psi\Delta(\varphi) = \cos\varphi, \quad \sin\varphi\Delta(\psi) = \cos\psi;$$
$$\cos\varphi\cos\psi - b\sin\varphi\sin\psi = 0 ,$$

oder die letzte Gleichung auch

$$b\,\mathrm{tang}\varphi\,\mathrm{tang}\psi = 1 ,$$

und diese Gleichung entspricht der Gleichung

$$E(\varphi) + E(\psi) - E\left(\frac{\pi}{2}\right) = k^2\sin\varphi\sin\psi ,$$

oder

$$E(\varphi) - \left\{E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E(\psi)\right\} = k^2\sin\varphi\sin\psi .$$

Da nun nach (25.) $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die Länge des elliptischen Quadranten ist, und die Bogen $E(\varphi)$, $E(\psi)$ von dem Endpunkte der kleinen Axe an gerechnet werden; so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung unmittelbar das folgende merkwürdige zuerst von Fagnani im Jahre 1718 gefundene Theorem:

Wenn $b\,\mathrm{tang}\varphi\,\mathrm{tang}\psi = 1$ ist, so lassen sich auf dem elliptischen Quadranten von dem Endpunkte der kleinen und der großen Axe an immer zwei Bogen der Ellipse abschneiden, deren Differenz die algebraische Größe $k^2\sin\varphi\sin\psi$ ist.

Die eine Amplitudo kann man sich jederzeit willkührlich geben, und die andere mittelst der Gleichungen

$$\text{tang}\,\psi = \frac{1}{b}\cot\varphi,\quad \text{tang}\,\varphi = \frac{1}{b}\cot\psi$$

finden.

Merkwürdig ist es, daß man auch immer leicht eine gerade Linie angeben kann, welche der Differenz der beiden in Rede stehenden elliptischen Bogen gleich ist. Sind nämlich in Fig. 3. BM und AN die beiden elliptischen Bogen, so daß

$$BM - AN = k^2 \sin\varphi \sin\psi$$

ist, so behaupte ich, daß, wenn man durch M und N die beiden Berührenden Mm und Nn zieht, deren Differenz der Differenz der beiden Bogen BM und AN gleich seyn wird. Bezieht man nämlich den Punkt N auf die große Axe der Ellipse, und bezeichnet in Bezug auf dieselbe die Coordinaten von N durch x, y; so ist nach dem Vorhergehenden und nach (9.)

$$x = \sin\psi,\quad y = b\cos\psi\,.$$

Bezieht man aber den Punkt M auf die kleine Axe und bezeichnet seine Coordinaten in Bezug auf dieselbe durch x', y'; so ist eben so

$$x' = b\cos\varphi,\quad y' = \sin\varphi\,.$$

Sind nun s und S die respective auf der großen und kleinen Axe genommenen Subtangenten der Punkte N und M, so ist nach einer schon aus den ersten Elementen der Kegelschnitte bekannten Formel

$$s = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1-\sin\psi^2}{\sin\psi} = \frac{\cos\psi^2}{\sin\psi}\,,$$

$$S = \frac{b^2-x'^2}{x'} = \frac{b^2-b^2\cos\varphi^2}{b\cos\varphi} = \frac{b\sin\varphi^2}{\cos\varphi}\,.$$

Setzt man aber $Nn = t$, $Mm = T$, so ist, da $b^2 = 1-k^2$ ist:

$$t^2 = s^2 + y^2 = \frac{\cos\psi^2(\cos\psi^2 + b^2\sin\psi^2)}{\sin\psi^2} = \frac{\cos\psi^2(1-k^2\sin\psi^2)}{\sin\psi^2}\,,$$

$$T^2 = S^2 + y'^2 = \frac{\sin\varphi^2(\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)}{\cos\varphi^2} = \frac{\sin\varphi^2(1-k^2\sin\varphi^2)}{\cos\varphi^2}\,;$$

also

$$t = \cot\psi\,\Delta(\psi) = \cot\psi\,.\,\frac{\cos\psi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\psi^2}{\sin\varphi\sin\psi}\,,$$

$$T = \text{tang}\,\varphi\,\Delta(\varphi) = \text{tang}\,\varphi\,.\,\frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\,;$$

$$T - t = \frac{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2}{\sin\varphi\sin\psi}\,.$$

Aber nach dem Obigen

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2 = b^2\sin\varphi^2\sin\psi^2 = (1-k^2)\sin\varphi^2\sin\psi^2\,,$$

$$\begin{aligned} k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2 &= \sin\varphi^2\sin\psi^2 - \cos\varphi^2\cos\psi^2 \\ &= \sin\varphi^2(1-\cos\psi^2) - \cos\psi^2(1-\sin\varphi^2) \\ &= \sin\varphi^2 - \cos\psi^2\,; \end{aligned}$$

also

$$T - t = k^2 \sin\varphi \sin\psi ,$$

d. i.

$$Mm - Nn = BM - AN ,$$

wie behauptet wurde.

Ist $\varphi = \psi = \Theta$, so fallen die beiden Punkte **M** und **N** in den einen Punkt **K** (Fig. 3.) zusammen. In diesem Falle ist

$$b \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = b \operatorname{tang}\Theta^2 = 1, \quad \operatorname{tang}\Theta = \frac{1}{\sqrt{b}} ;$$

$$\sin\varphi = \sin\psi = \sin\Theta = \sqrt{\frac{1}{1+\cot\Theta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+b}} ;$$

$$\cos\varphi = \cos\psi = \cos\Theta = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tang}\Theta^2}} = \sqrt{\frac{b}{1+b}} ;$$

folglich

$$BK - AK = \frac{k^2}{1+b} = \frac{1-b^2}{1+b} = 1 - b ,$$

d. i. die Differenz der Bogen **BK** und **AK** der Differenz der beiden Halbaxen gleich. Auch folgt aus dem Obigen auf der Stelle in diesem Falle

$$BK = \tfrac{1}{2} E\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(1-b) ,$$

$$AK = \tfrac{1}{2} E\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}(1-b) ,$$

wo $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$, wie immer, der elliptische Quadrant ist. Denkt man sich durch **K** eine Berührende gezogen und bezeichnet die zwischen **K** und der großen und kleinen Axe liegenden Theile derselben respective durch **t** und **T**, so ist nach dem Obigen

$$t = \frac{\cos\Theta^2}{\sin\Theta^2} = \cot\Theta^2 = b, \quad T = \frac{\sin\Theta}{\sin\Theta} = 1 ,$$

d. i. **t** der kleinen, **T** der großen Halbaxe der Ellipse gleich.

Schneidet man auf dem elliptischen Quadranten **AB** (Fig. 4.) von **B** aus einen beliebigen Bogen **BD** ab, und nimmt auf demselben einen beliebigen Punkt **M**, so läßt sich auf dem Bogen **BD** immer ein Punkt **N** so bestimmen, daß die Differenz der Bogen **BM** und **DN** eine algebraische Größe ist. Man bestimme nämlich die Amplituden φ und ψ der gegebenen Bogen **BD** und **BM**, welches, wie aus dem Obigen und Fig. 2. erhellet, immer mittelst einer leichten Construction möglich ist. Dann ist $BD = E(\varphi)$, $BM = E(\psi)$. Berechnet man nun die Winkel φ' und ψ' aus den Formeln

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang}\varphi\, \Delta(\psi), \quad \operatorname{tang}\psi' = \operatorname{tang}\psi\, \Delta(\varphi) ,$$

und setzt $\mu = \varphi' - \psi'$; so ist nach (16.)

$$F(\varphi) - F(\psi) - F(\mu) = 0, \quad F(\psi) + F(\mu) - F(\varphi) = 0 ;$$

also nach (22.)

$$E(\psi) + E(\mu) - E(\varphi) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$$

oder

$$E(\psi) - \{E(\varphi) - E(\mu)\} = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi .$$

Ist nun N der der Amplitude μ entsprechende Punkt, welcher sich ebenfalls immer leicht durch Construction finden läßt, so ist $BN = E(\mu)$, $BD - BN = E(\varphi) - E(\mu) = DN$; also

$$BM - DN = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$$

eine algebraische Größe.

27. Wir wollen nun noch zeigen, wie man auf dem elliptischen Quadranten immer einen Bogen MN (Fig. 3.) abschneiden kann, dessen Länge der Hälfte des elliptischen Quadranten gleich ist. Die Amplitude des Punktes M sey $= \varphi$, die des Punktes $N = \psi$, und Θ sey die Amplitude des in (26.) in derselben Figur K genannten Punktes; so ist nach (26.)

$$\sin\Theta^2 = \frac{1}{1+b}, \quad BK = E(\Theta) = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(1-b) .$$

Nun denke man sich φ, ψ so bestimmt, daß

$$F(\varphi) + F(\Theta) - F(\psi) = 0$$

ist; dann ist nach (22.)

$$E(\varphi) + E(\Theta) - E(\psi) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta ;$$

also

$$E(\psi) - E(\varphi) = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(1-b) - k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta .$$

Da nun

$$MN = BN - BM = E(\psi) - E(\varphi) = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

seyn soll, so muß

$$k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta = \tfrac{1}{2}(1-b) ,$$
$$(1 - b^2) \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta^2 = \tfrac{1}{2}(1-b) \sin\Theta ,$$
$$(1 + b) \sin\varphi \sin\psi \sin\Theta^2 = \tfrac{1}{2}\sin\Theta ,$$
$$\sin\varphi \sin\psi = \tfrac{1}{2}\sin\Theta$$

seyn. Wegen der Gleichung

$$F(\varphi) + F(\Theta) - F(\psi) = 0$$

ist aber nach (16.)

$$\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \Delta(\Theta) = \cos\Theta ,$$

und

$$\Delta(\Theta) = \sqrt{1 - k^2 \sin\Theta^2} = \sqrt{1 - \frac{1-b^2}{1+b}} = \sqrt{b} ;$$

also

$$\cos\varphi \cos\psi + \tfrac{1}{2}\sin\Theta\sqrt{b} = \cos\Theta ,$$

d. i., weil

$$\cos\Theta = \gamma\frac{b}{1+b} = \frac{\gamma b}{\gamma 1 + b} = \sin\Theta\gamma b$$

ist:

$$\cos\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}\cos\Theta,$$

so daß man also zur Bestimmung von φ und ψ jetzt die folgenden zwei Gleichungen hat:

$$\sin\varphi\sin\psi = \tfrac{1}{2}\sin\Theta,\quad \cos\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}\cos\Theta.$$

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned}\cos(\varphi-\psi) &= \tfrac{1}{2}(\cos\Theta + \sin\Theta)\\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\cos\Theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta\right)\right\}\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\Theta-\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos(\varphi+\psi) &= \tfrac{1}{2}(\cos\Theta - \sin\Theta)\\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\cos\Theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)\right\}\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

wodurch sich also die gesuchten Amplituden φ, ψ beide finden lassen. Die Sinus der Winkel φ und ψ sind die Abscissen der beiden Punkte M und N. Diese Sinus würden sich auch leicht durch $\sin\Theta$ unmittelbar ausdrücken lassen, wobei wir aber nicht länger verweilen.

Aehnliche Aufgaben findet man mehrere in **Legendre Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 49.**

28. Den vorhergehenden Sätzen von der Ellipse fügen wir nun noch einige allgemeine Bemerkungen über die, analoge Eigenschaften darbietende, Hyperbel bei. Aus (9.) wissen wir, daß, wenn die Excentricität der Hyperbel $= 1$, die halbe große Axe $= k$, die halbe kleine Axe $= b$, also $k^2 = 1 - b^2$, $b^2 = 1 - k^2$, der Bogen $= s$, und

$$y = b^2\,\mathrm{tang}\,\varphi,\ x = \frac{k}{\cos\varphi}\gamma 1 - k^2\sin\varphi^2 = \frac{k}{\cos\varphi}\Delta(\varphi)$$

gesetzt wird,

$$s = \Delta(\varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi + b^2\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int\Delta(\varphi)\,\partial\varphi$$

ist, wenn nur die Integrale zwischen den gehörigen Gränzen genommen werden. Denkt man sich nun die Integrale so bestimmt, daß sie für $x = k$, d. i. $y = 0$ oder $\varphi = 0$ verschwinden, so wird der Bogen s offenbar von dem Scheitel A (Fig. 5.) an gerechnet, und es ist folglich, für $CP = x$ und $PM = y$, in der bekannten Bezeichnung der elliptischen Functionen

$$s = AM = \Delta(\varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi + b^2 F(\varphi) - E(\varphi).$$

Denken wir uns nun die Amplituden φ, ψ, μ wieder so bestimmt, daß sie der Gleichung

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$$

genügen, und bezeichnen die entsprechenden Bogen der Hyperbel durch $H(\varphi)$, $H(\psi)$, $H(\mu)$; so ist

$$H(\varphi) = \Delta(\varphi)\tang\varphi + b^2 F(\varphi) - E(\varphi),$$
$$H(\psi) = \Delta(\psi)\tang\psi + b^2 F(\psi) - E(\psi),$$
$$H(\mu) = \Delta(\mu)\tang\mu + b^2 F(\mu) - E(\mu);$$

also durch Addition der ersten und zweiten und Subtraction der dritten Gleichung:

$$H(\varphi) + H(\psi) - H(\mu) =$$
$$\Delta(\varphi)\tang\varphi + \Delta(\psi)\tang\psi - \Delta(\mu)\tang\mu - \{E(\varphi)+E(\psi) - E(\mu)\}$$

d. i. nach (22.)

$$H(\varphi) + H(\psi) - H(\mu) =$$
$$\Delta(\varphi)\tang\varphi + \Delta(\psi)\tang\psi - \Delta(\mu)\tang\mu - k^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi,$$

wo das Aggregat auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine algebraische Größe ist.

Denkt man sich durch **M** eine Berührende der Hyperbel gezogen und auf dieselbe von dem Mittelpunkte **C** das Perpendikel **CQ** gefällt, so läßt sich zeigen, daß der Theil **MQ** dieser Berührenden $= \Delta(\varphi)\tang\varphi$ ist. Nach bekannten Sätzen von der Hyperbel ist nämlich die Subtangente

$$PT = \frac{x^2 - k^2}{x} = \frac{k(1-k^2)\tang\varphi^2\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$
$$= \frac{kb^2\tang\varphi^2\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \frac{ky\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \frac{ky\sin\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

folglich

$$MT^2 = \frac{k^2y^2\sin\varphi^2}{1-k^2\sin\varphi^2} + y^2,\quad MT = \frac{y}{\Delta(\varphi)}.$$

Ferner ist

$$CT = x - PT = \frac{k^2}{x} = \frac{k\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Aber

$$MT : PT = CT : TQ,$$
$$1 : k\sin\varphi = \frac{k\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} : TQ,\quad TQ = \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

folglich

$$MQ = MT + TQ = \frac{b^2\tang\varphi + k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}$$
$$= \frac{(1-k^2)\sin\varphi + k^2\sin\varphi\cos\varphi^2}{\Delta(\varphi)\cos\varphi}$$
$$= \frac{\sin\varphi(1-k^2\sin\varphi^2)}{\cos\varphi\,\Delta(\varphi)} = \Delta(\varphi)\tang\varphi,$$

wie behauptet wurde. Bezeichnen wir nun die Differenz

$$MQ - AM = \Delta(\varphi) \tang \varphi - H(\varphi)$$

durch $G(\varphi)$; so folgt aus dem Obigen auf der Stelle die überaus merkwürdige Gleichung

$$G(\varphi) + G(\psi) - G(\mu) = k^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi ,$$

welche mit der analogen Gleichung bei der Ellipse in (26.) eine ganz übereinstimmende Form hat. Diese Gleichung würde zu ganz ähnlichen Betrachtungen wie die in (26.) und (27.) bei der Ellipse angestellten Veranlassung geben, wenn wir dieselben hier der Beschränktheit des Raums wegen nicht übergehen müßten, da sie überdies nach dem Vorhergehenden keiner Schwierigkeit unterworfen sind. Den Amplituden darf bei der Hyperbel kein Werth, der größer als $\frac{1}{2}\pi$ ist, beigelegt werden, weil für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ der entsprechende Bogen der Hyperbel unendlich wird.

Die nöthigen hierher gehörenden historischen und literarischen Nachweisungen s. m. Thl. IV. S. 249. Auch vergl. man den Artikel Lemniscata.

29. Noch wollen wir hier eine höchst merkwürdige von Landen gefundene Vergleichung der Bogen der Ellipse und Hyperbel beweisen, indem wir dabei von folgendem auch für die Theorie der elliptischen Functionen überhaupt wichtigen Satze ausgehen:

Wenn zwischen k, k_1, φ, φ_1 die beiden Gleichungen

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi$$

Statt finden, und jetzt

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}}, \quad F(k_1, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin\varphi_1^2}}$$

gesetzt wird; so ist immer

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2} F(k, \varphi) .$$

Aus der Gleichung $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi$ folgt auf der Stelle

$$\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2} = \Delta(k, \varphi) .$$

Also ist

$$\sin 2\varphi_1 \cos\varphi - \cos 2\varphi_1 \sin\varphi = k \sin\varphi ,$$
$$\cos 2\varphi_1 \cos\varphi + \sin 2\varphi_1 \sin\varphi = \Delta(k, \varphi) .$$

Werden diese beiden Gleichungen respective zuerst mit $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, dann mit $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ multiplicirt, und im ersten Falle zu einander addirt, im zweiten von einander subtrahirt, so erhält man

$$\sin 2\varphi_1 = \sin\varphi \{k \cos\varphi + \Delta(k, \varphi)\} ,$$
$$\cos 2\varphi_1 = \Delta(k, \varphi) \cos\varphi - k \sin\varphi^2 ;$$

also aus dieser letzten Gleichung

$$2\cos\varphi_1^2 = 1 - k\sin\varphi^2 + \Delta(k, \varphi)\cos\varphi ,$$
$$2\sin\varphi_1^2 = 1 + k\sin\varphi^2 - \Delta(k, \varphi)\cos\varphi .$$

Hieraus ergiebt sich

$$4\sin\varphi_1\cos\varphi_1\,\partial\varphi_1 = \frac{\{k\cos\varphi + \Delta(k, \varphi)\}^2\sin\varphi\,\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} ,$$

und, wenn man

$$2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \sin 2\varphi_1$$

setzt, nach dem Obigen:

$$2\,\partial\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)}\{k\cos\varphi + \Delta(k, \varphi)\} .$$

Ferner findet man auch leicht

$$(k_1, \varphi_1) = \sqrt{1 - k_1^2\sin\varphi_1^2} = \frac{k\cos\varphi + \Delta(k, \varphi)}{1 + k} ,$$

wenn man nur bedenkt, daß nach der Voraussetzung

$$k_1^2 = \frac{4k}{(1 + k)^2}$$

ist.

Durch Division ergiebt sich hieraus

$$\frac{\partial\varphi_1}{\Delta(k_1, \varphi_1)} = \frac{1 + k}{2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} ,$$

und folglich, wenn man φ und φ_1 zugleich verschwinden oder beide Bogen bei Null anfangen läßt:

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\Delta(k_1, \varphi_1)} = \frac{1+k}{2}\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} ,$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2}F(k, \varphi) .$$

Zu bemerken ist hierbei noch, daß man, wie man sich leicht überzeugen wird, weil $\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \Delta(k, \varphi)$, also, so wie $\Delta(k, \varphi)$, immer positiv ist, φ_1 oder φ, wenn respective φ oder φ_1 gegeben ist, jederzeit so bestimmen muß, daß $2\varphi_1 - \varphi$ ohne Rücksicht auf sein Zeichen der kleinste Bogen ist, für welchen $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi$ ist. Man hat, um dies deutlich einzusehen nur zu beachten, wie φ und φ_1 beide von Null an sich nach und nach gleichzeitig stetig verändern. Für $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ ist

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi = k\sin\varphi$$

für jedes k; also offenbar $\sin\varphi = 0$. Ferner ist für denselben Werth von φ_1

$$\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = 1 ,$$

da $\sin\varphi = 0$ ist und

$$\Delta(k, \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}$$

immer positiv genommen wird. Man hat also $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$; folglich offenbar $\varphi = \pi$, wie auch sogleich erhellet, weil nach der obigen allgemeinen Bemerkung für $2\varphi_1 - \varphi = \pi - \varphi$ ohne Rücksicht auf das Zeichen der kleinste Bogen zu nehmen ist, für welchen $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi$, d. i. in diesem Falle $\sin(2\varphi_1 - \varphi) = \sin(\pi - \varphi) = 0$ ist, welches $\pi - \varphi = 0$, $\varphi = \pi$ giebt. Aus unserer obigen allgemeinen Gleichung ergiebt sich also in diesem Falle

$$F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k}{2} F(k, \pi).$$

Nun ist aber offenbar (vergl. 10.)

$$F(k, \pi) = 2F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

und man hat also die folgende sehr merkwürdige Gleichung zwischen den vollständigen elliptischen Functionen der ersten Art:

$$F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k) F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

wobei man zu merken hat, daß zwischen k und k_1 die Gleichung

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

Statt findet.

Setzen wir nun ferner

$$E(k_1, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \Delta(k_1, \varphi_1) \partial\varphi_1,$$

d. i. nach dem Obigen

$$2(1+k) E(k_1, \varphi_1) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} \{k\cos\varphi + \Delta(k, \varphi)\}^2,$$

oder, wenn man

$$\{k\cos\varphi + \Delta(k,\varphi)\}^2 = k^2\cos\varphi^2 + 2k\Delta(k,\varphi)\cos\varphi + 1 - k^2\sin\varphi^2$$
$$= 2(\Delta(k,\varphi))^2 + 2k\Delta(k,\varphi)\cos\varphi - k'^2$$

setzt, wo $k'^2 = 1 - k^2$ ist:

$$2(1+k) E(k_1, \varphi_1) =$$
$$= 2\int_0^{\varphi} \Delta(k, \varphi) \partial\varphi + 2k\int_0^{\varphi} \cos\varphi \partial\varphi - k'^2 \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)},$$

d. i.

$$(1+k) E(k_1, \varphi_1) = E(k, \varphi) - \tfrac{1}{2} k'^2 F(k, \varphi) + k\sin\varphi,$$

oder

$$k'^2 F(k, \varphi) = 2E(k, \varphi) - 2(1+k) E(k_1, \varphi_1) + 2k\sin\varphi,$$

woraus man also sieht, daß jede elliptische Function der ersten

Art $F(k, \varphi)$ durch die beiden elliptischen Functionen $E(k, \varphi)$ und $E(k_1, \varphi_1)$ ausgedrückt werden kann. Bezeichnen wir nun den in (28.) durch $H(\varphi)$ bezeichneten Bogen der Hyperbel jetzt durch $H(k, \varphi)$, wo k die halbe große Axe der Hyperbel bezeichnet, die Excentricität $= 1$ gesetzt, so ist nach (28.)

$$H(k, \varphi) = \Delta(k, \varphi) \operatorname{tang} \varphi + b^2 F(k, \varphi) - E(k, \varphi),$$

für $b^2 = 1 - k^2 = k'^2$, indem a. a. O. die kleine Halbaxe der Hyperbel durch b bezeichnet worden ist. Also, weil nach dem Vorhergehenden, indem man b für k' setzt,

$$b^2 F(k, \varphi) = 2E(k, \varphi) - 2(1+k)E(k_1, \varphi_1) + 2k \sin \varphi$$

ist:

$$H(k, \varphi) = \Delta(k, \varphi) \operatorname{tang} \varphi + E(k, \varphi) - 2(1+k)E(k_1, \varphi_1) + 2k \sin \varphi,$$

woraus man also sieht, daß jeder Bogen $H(k, \varphi)$ einer Hyperbel sich durch die beiden elliptischen Bogen $E(k, \varphi)$ und $E(k_1, \varphi_1)$ (s. 25.) ausdrücken läßt, welches der berühmte von Landen gefundene und in den Philosophical Transactions. 1775. zuerst bekannt gemachte Satz ist. Auch s. m. Mathematical Memoirs by John Landen. 1780. und den Artikel Rectification (35.) in diesem Wörterbuche. Umgekehrt würde sich aus dem Obigen auch leicht ableiten lassen, daß jeder Bogen der Ellipse immer durch zwei Bogen der Hyperbel dargestellt oder gemessen werden kann.

Ueber das gegenseitige Verhalten von k und k_1 ist zu bemerken, daß k_1 zwar immer größer als k, aber kleiner als die Einheit ist, wobei man zu beobachten hat, daß k immer kleiner als die Einheit ist. Es ist nämlich

$$(1-k)^2 > 0, \quad 1 - 2k + k^2 > 0;$$
$$1 + 2k + k^2 > 4k, \quad (1+k)^2 > 4k;$$
$$\frac{4k}{(1+k)^2} < 1, \quad k_1^2 < 1, \quad k_1 < 1.$$

Ferner ist $1 + k < 2$, $(1+k)^2 < 4$, also

$$\frac{4}{(1+k)^2} > 1 \text{ und um so mehr } \frac{4}{(1+k)^2} > k;$$

also auch

$$\frac{4k}{(1+k)^2} > k^2, \quad k_1^2 > k^2, \quad k_1 > k.$$

Auch ist

$$1 - k_1^2 = (1-k_1)(1+k_1) = 1 - \frac{4k}{(1+k)^2} = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$$

$$1 - k_1 = \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2(1+k_1)} = \frac{(1-k)^2}{(1+k)(1+2\Upsilon k+k)},$$

wodurch die Differenz zwischen k_1 und 1 bestimmt wird.

XIII. Beweis verschiedener merkwürdiger Gleichungen zwischen den elliptischen Functionen der ersten und zweiten Art und ihren nach k oder k' genommenen Differentialquotienten.

30. Bekanntlich ist

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi)\partial\varphi, \quad F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

also nach dem Artikel Bestimmtes Integral (18.), wenn man unter dem Integralzeichen nach k differentiirt:

$$\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} = \int_0^{\varphi} \frac{\partial \Delta(\varphi)}{\partial k}\partial\varphi, \quad \frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} = -\int_0^{\varphi} \frac{\partial \Delta(\varphi)}{(\Delta(\varphi))^2 \partial k}\partial\varphi.$$

Nun ist aber

$$(\Delta(\varphi))^2 = 1 - k^2 \sin\varphi^2, \quad \frac{\partial \Delta(\varphi)}{\partial\varphi} = -\frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Delta(\varphi)}{\partial\varphi^2} &= -k^2 \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)(\Delta(\varphi))^2 + k^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{(\Delta(\varphi))^3} \\
&= -k^2 \frac{\cos\varphi^2 - (1 - k^2\sin\varphi^2)\sin\varphi^2}{(\Delta(\varphi))^3} \\
&= -k^2 \frac{1 - 2\sin\varphi^2 + k^2\sin\varphi^4}{(\Delta(\varphi))^3} \\
&= -\frac{k^2 - 2k^2\sin\varphi^2 + k^4\sin\varphi^4}{(\Delta(\varphi))^3} \\
&= \frac{k'^2 - (1 - 2k^2\sin\varphi^2 + k^4\sin\varphi^4)}{(\Delta(\varphi))^3} \\
&= \frac{k'^2}{(\Delta(\varphi))^3} - (\Delta(\varphi),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi}{(\Delta(\varphi))^3} = \frac{1}{k'^2}\Delta(\varphi)\partial\varphi + \frac{\partial^2\Delta(\varphi)}{k'^2\partial\varphi^2}\partial\varphi;$$

und ferner

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta(\varphi)}{\partial k} &= -\frac{k\sin\varphi^2}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1 - k^2\sin\varphi^2 - 1}{\Delta(\varphi)} \\
&= \frac{1}{k}\left\{\Delta(\varphi) - \frac{1}{\Delta(\varphi)}\right\}, \\
\frac{\partial\Delta(\varphi)}{(\Delta(\varphi))^2\partial k} &= \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{(\Delta(\varphi))^3}\right\};
\end{aligned}$$

folglich

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\Delta(\varphi)}{\partial k}\partial\varphi = \frac{1}{k}\left\{\int_0^{\varphi}\Delta(\varphi)\partial\varphi - \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\right\},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \Delta(\varphi)}{(\Delta(\varphi))^2 \partial k} \partial\varphi = \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(\Delta(\varphi))^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \frac{\partial^2 \Delta(\varphi)}{\partial\varphi^2}\partial\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi - \frac{\partial \Delta(\varphi)}{k'^2 \partial\varphi}\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{1}{k'^2}\int_0^\varphi \Delta(\varphi)\partial\varphi + \frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{k'^2 \Delta(\varphi)}\right\};$$

alſo nach dem Obigen

$$\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} = \frac{1}{k}\left\{E(\varphi) - F(\varphi)\right\},$$

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} = \frac{1}{k k'^2}\left\{E(\varphi) - k'^2 F(\varphi)\right\} - \frac{k \sin\varphi\cos\varphi}{k'^2 \Delta(\varphi)};$$

und folglich

$$F(\varphi) = E(\varphi) - k\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k},$$

$$E(\varphi) = k'^2\left\{F(\varphi) + k\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}\right\} + \frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Aus der erſten dieſer beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} = \frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} - k\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2} - \frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} = -k\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2};$$

alſo, wenn man dieſen Ausdruck und den Werth von $F(\varphi)$ aus der erſten Gleichung in die zweite Gleichung, zugleich aber $k'^2 = 1 - k^2$ ſetzt, nach leichter Rechnung:

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} + E(\varphi) - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} = 0.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen

$$\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k} = k'^2\left\{2\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} + k\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2}\right\} - 2k\left\{F(\varphi) + k\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}\right\}$$
$$+ \frac{2k \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{k^3 \sin\varphi^3\cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3}$$
$$= k'^2\left\{2\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} + k\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2}\right\} - 2k\left\{F(\varphi) + k\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}\right\}$$
$$+ \frac{k \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{k \sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3};$$

alſo nach gehöriger Subſtitution dieſes Ausdrucks und des Ausdrucks von $E(\varphi)$ in den obigen Ausdruck von $F(\varphi)$, indem man zugleich $k'^2 = 1 - k^2$ ſetzt, nach leichter Rechnung:

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k} - F(\varphi) + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3} = 0,$$

so daß wir also die beiden Gleichungen

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial F(\varphi)}{\partial k}-F(\varphi)+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3}=0,$$

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial k^2}+\frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial E(\varphi)}{\partial k}+E(\varphi)-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}=0;$$

und, wenn wir $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, der Kürze wegen aber immer

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F',\ E\left(\frac{\pi}{2}\right)=E'$$

setzen, die beiden Gleichungen

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 F'}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial F'}{\partial k}-F'=0,$$

$$(1-k^2)\frac{\partial^2 E'}{\partial k^2}+\frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial E'}{\partial k}+E'=0$$

haben.

Um nun in diese Gleichungen statt der veränderlichen Größe k die veränderliche Größe k' einzuführen, wollen wir zuerst sehen, was man, wenn y überhaupt eine Function von k ist, für $\frac{\partial y}{\partial k}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial k^2}$ setzen muß. Da $k'^2=1-k^2$ ist, so ist

$$\frac{\partial k'}{\partial k}=-\frac{k}{k'};$$

also nach dem Artikel Differentialrechnung. 4. i. d. Z.

$$\frac{\partial y}{\partial k}=\frac{\partial y}{\partial k'}\cdot\frac{\partial k'}{\partial k}=-\frac{k}{k'}\cdot\frac{\partial y}{\partial k'},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2}=-\frac{k}{k'}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial k'^2}\cdot\frac{\partial k'}{\partial k}-\frac{\partial y}{\partial k'}\cdot\frac{k'+\frac{k^2}{k'}}{k'^2}$$

$$=\frac{k^2}{k'^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial k'^2}-\frac{k^2+k'^2}{k'^3}\cdot\frac{\partial y}{\partial k'}=\frac{k^2}{k'^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial k'^2}-\frac{1}{k'^3}\cdot\frac{\partial y}{\partial k'}.$$

Macht man nach diesen Formeln die gehörigen Substitutionen, so erhält man:

$$(1-k'^2)\frac{\partial^2 F'}{\partial k'^2}+\frac{1-3k'^2}{k'}\cdot\frac{\partial F'}{\partial k'}-F'=0,$$

$$(1-k'^2)\frac{\partial^2 E'}{\partial k'^2}-\frac{1+k'^2}{k'}\cdot\frac{\partial E'}{\partial k'}+E'=0.$$

31. Die im Vorhergehenden bewiesenen Gleichungen sind eine reiche Quelle merkwürdiger Sätze, von denen wir jedoch hier nur vorzüglich auf einen aufmerksam machen wollen. Nach (30.) ist nämlich

$$\frac{\partial E'}{\partial k}=\frac{1}{k}\{E'-F'\},\ \frac{\partial F'}{\partial k}=\frac{1}{kk'^2}\{E'-k'^2F'\}.$$

Bezeichnet man nun die dem Modulus k' entsprechenden elliptischen Functionen durch E_1 und F_1, so ist eben so

$$\frac{\partial E_1}{\partial k'} = \frac{1}{k'}\{E_1 - F_1\},\ \frac{\partial F_1}{\partial k'} = \frac{1}{k'k^2}\{E_1 - k^2 F_1\},$$

oder nach (30.)

$$-\frac{k'}{k}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial k} = \frac{1}{k'}\{E_1 - F_1\},\ -\frac{k'}{k}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial k} = \frac{1}{k'k^2}\{E_1 - k^2 F_1\};$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial k} = -\frac{k}{k'^2}\{E_1 - F_1\},\ \frac{\partial F_1}{\partial k} = -\frac{1}{kk'^2}\{E_1 - k^2 F_1\}.$$

Setzen wir aber die Größe

$$F'E_1 + F_1E' - F'F_1 = Z;$$

so ist

$$\frac{\partial Z}{\partial k} = F'\frac{\partial E_1}{\partial k} + E_1\frac{\partial F'}{\partial k} + F_1\frac{\partial E'}{\partial k} + E'\frac{\partial F_1}{\partial k} - F'\frac{\partial F_1}{\partial k} - F_1\frac{\partial F'}{\partial k};$$

d. i. nach gehöriger Substitution der für die Differentialquotienten vorher gefundenen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial k} &= -\frac{k}{k'^2}F'(E_1 - F_1) + \frac{1}{kk'^2}E_1(E' - k'^2F')\\ &\quad + \frac{1}{k}F_1(E' - F') - \frac{1}{kk'^2}E'(E_1 - k^2F_1)\\ &\quad + \frac{1}{kk'^2}F'(E_1 - k^2F_1) - \frac{1}{kk'^2}F_1(E' - k'^2F')\\ &= F'E_1\left\{-\frac{k}{k'^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kk'^2}\right\}\\ &\quad + E'F_1\left\{\frac{1}{k} + \frac{k}{k'^2} - \frac{1}{kk'^2}\right\}\\ &\quad + F'F_1\left\{\frac{k}{k'^2} - \frac{1}{k} - \frac{k}{k'^2} + \frac{1}{k}\right\}\\ &\quad + E'E_1\left\{\frac{1}{kk'^2} - \frac{1}{kk'^2}\right\}.\end{aligned}$$

Aber

$$\frac{1}{k} + \frac{k}{k'^2} - \frac{1}{kk'^2} = \frac{k^2 + k'^2 - 1}{kk'^2} = 0.$$

Also

$$\partial Z = 0,\ Z = \text{Const};$$

d. i. für jedes k die Größe

$$F'E_1 + F_1E' - F'F_1 = \text{Const},$$

so daß man also den Werth dieser Größe für jedes k kennt, wenn man denselben für irgend einen bestimmten Werth von k kennt.

Setzen wir nun $k = 0$, also $k' = 1$, so ist, wenn wir jetzt, wie auch schon früher mehrere Mal, in die Bezeichnung der elliptischen Functionen das Symbol des Modulus mit aufnehmen,

$$F(0,\varphi)=\int_0^{\varphi}\partial\varphi=\varphi,\ E(0,\varphi)=\int_0^{\varphi}\partial\varphi=\varphi;$$

$$F(1,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi},\ E(1,\varphi)=\int_0^{\varphi}\cos\varphi\,\partial\varphi=\sin\varphi;$$

also

$$F(0,\varphi)E(1,\varphi)+F(1,\varphi)E(0,\varphi)-F(0,\varphi)F(1,\varphi)$$
$$=\varphi\sin\varphi+\varphi\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}-\varphi\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi},$$

d. i., weil das zweite und dritte Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sich immer gegenseitig aufheben, auch selbst dann, wenn das Integral, wie es z. B. für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, da für diesen Werth $\cos\varphi=0$ ist, in der That der Fall ist, unendlich wird, immer

$$F(0,\varphi)E(1,\varphi)+F(1,\varphi)E(0,\varphi)-F(0,\varphi)F(1,\varphi)=\varphi\sin\varphi,$$

und folglich, wenn man $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ setzt, in dem Falle, wo $k=0$, $k'=1$ ist:

$$F'E_1+F_1E'-F'F_1=\tfrac{1}{2}\pi;$$

also nach dem Obigen immer

$$F'E_1+F_1E'-F'F_1=\tfrac{1}{2}\pi,$$

oder, was dasselbe ist:

$$F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)E\left(k',\frac{\pi}{2}\right)+F\left(k',\frac{\pi}{2}\right)E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)F\left(k',\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

für jedes k, eine Gleichung, welche offenbar einen sehr merkwürdigen Satz enthält, der von Legendre gefunden ist, und zuerst in dessen Mémoire sur les transcendantes elliptiques. Paris. An. II. p. 57. vorkommt. Zwischen k und k′ findet, wie sich von selbst versteht, immer die Gleichung $k^2+k'^2=1$ Statt. Für $k=\gamma\frac{1}{2}$, ist auch $k'=\gamma\frac{1}{2}$, und unsere Gleichung wird

$$\frac{\pi}{2}=F\left(\gamma\tfrac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)\left\{2E\left(\gamma\tfrac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\gamma\tfrac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

so daß sich also in diesem Falle die elliptischen Functionen der ersten Art aus den elliptischen Functionen der zweiten Art berechnen lassen, und umgekehrt. Es giebt noch andere Fälle dieser Art, auf deren Entwickelung wir uns hier aber nicht einlassen können.

XIV. Annähernde Berechnung der elliptischen Functionen der ersten Art.

32. Nach (29.) hat man folgende Reihe zusammenstimmender Formeln:

$$k_1=\frac{2\gamma k}{1+k},\ \sin(2\varphi_1-\varphi)=k\sin\varphi,\ F(k_1,\varphi_1)=\frac{1+k}{k}F(k,\varphi);$$

$$k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\ \sin(2\varphi_2-\varphi_1)=k_1\sin\varphi_1,\ F(k_2,\varphi_2)=\frac{1+k_1}{2}F(k_1,\varphi_1);$$

$$k_3=\frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2},\ \sin(2\varphi_3-\varphi_2)=k_2\sin\varphi_2,\ F(k_3,\varphi_3)=\frac{1+k_2}{2}F(k_2,\varphi_2);$$

u. s. f. u. s. f.

$k, k_1, k_2, k_3, \ldots$ bilden eine wachsende Reihe und nähern sich immer mehr und mehr der Einheit, ohne dieselbe jemals zu übersteigen, werden derselben aber immer bald sehr nahe kommen. Bestimmt man daher jetzt $k_,, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots$; $\varphi_,, \varphi_{,,}, \varphi_{,,,}, \ldots$ aus den Gleichungen

$$k=\frac{2\sqrt{k_,}}{1+k_,},\ \sin(2\varphi-\varphi_,)=k_,\sin\varphi_,;$$

$$k_,=\frac{2\sqrt{k_{,,}}}{1+k_{,,}},\ \sin(2\varphi_,-\varphi_{,,})=k_{,,}\sin\varphi_{,,};$$

$$k_{,,}=\frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{1+k_{,,,}},\ \sin(2\varphi_{,,}-\varphi_{,,,})=k_{,,,}\sin\varphi_{,,,};$$

u. s. f. u. s. f.

so werden offenbar $k, k_,, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots$ eine abnehmende Reihe bilden und der Null beliebig genähert werden können. Um das Letztere völlig deutlich zu übersehen, setze man

$$\sqrt{1-k^2}=k',\ \sqrt{1-k_,^2}=k_,',\ \sqrt{1-k_{,,}^2}=k_{,,}',\ \ldots;$$

so ergiebt sich sehr leicht

$$k_,=\frac{1-k'}{1+k'},\ k_{,,}=\frac{1-k_,'}{1+k_,'},\ k_{,,,}=\frac{1-k_{,,}'}{1+k_{,,}'},\ k_{IV}=\frac{1-k_{,,,}'}{1+k_{,,,}'},\ \ldots,$$

oder auch

$$k_,=\left\{\frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}}\right\}^2,\ k_{,,}=\left\{\frac{k_,}{1+\sqrt{1-k_,^2}}\right\}^2,\ k_{,,,}=\left\{\frac{k_{,,}}{1+\sqrt{1-k_{,,}^2}}\right\}^2,\ldots$$

Es ist also, weil wir immer annehmen, daß $k<1$ ist, offenbar

$$k_,<k^2,\ k_{,,}<k_,^2,\ k_{,,,}<k_{,,}^2,\ k_{IV}<k_{,,,}^2,\ \ldots,$$

oder

$$k_,<k^2,\ k_{,,}<k^4,\ k_{,,,}<k^8,\ k_{IV}<k^{16},\ \ldots,$$

wo offenbar die Exponenten von k jede beliebige noch so große Größe übersteigen können. Für $k<1$ ist aber, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet, immer auch $k^n<1$. Damit nun $k^n<\nu$ werde, wo ν jede beliebige noch so kleine Größe, welche also immer <1 angenommen werden kann, bezeichnet, muß man n so groß nehmen, daß

$$\frac{1}{k^n}>\frac{1}{\nu},\ \left(\frac{1}{k}\right)^n>\frac{1}{\nu}$$

ist, wo nun $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{\nu}$ beide >1 sind, also, wenn wir, wie gleich nachher, die Logarithmen nehmen, die Logarithmen ächter

Brüche, welche bekanntlich negativ sind, vermieden werden. Aus obiger Bedingung folgt aber

$$n \log \frac{1}{k} > \log \frac{1}{v}, \quad n > \frac{\log \frac{1}{v}}{\log \frac{1}{k}},$$

und man kann also n immer so groß nehmen, daß, für $k < 1$, $k^n < v$ wird. Demnach können die Glieder der Reihe

$$k, k^2, k^4, k^8, k^{16}, \ldots,$$

und also um so mehr die Glieder der Reihe

$$k, k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, k_{IV}, \ldots$$

der Null bis zu jedem beliebigen Grade nahe gebracht werden, wenn man sie nur weit genug vom Anfange entfernt nimmt.

Da also $k, k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots$ sich immer mehr und mehr der Null nähern, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, so erhellet auch aus den obigen Gleichungen, daß sich die Winkel

$$2\varphi - \varphi_{,}, \; 2\varphi_{,} - \varphi_{,,}, \; 2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}, \; 2\varphi_{,,,} - \varphi_{IV}, \ldots$$

immer mehr und mehr der Null, oder die Gleichungen

$$2\varphi - \varphi_{,} = 0, \; 2\varphi_{,} - \varphi_{,,} = 0, \; 2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,} = 0, \; 2\varphi_{,,,} - \varphi_{IV} = 0, \ldots;$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_{,}, \; \varphi_{,} = \tfrac{1}{2}\varphi_{,,}, \; \varphi_{,,} = \tfrac{1}{2}\varphi_{,,,}, \; \varphi_{,,,} = \tfrac{1}{2}\varphi_{IV}, \ldots;$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_{,}, \; \tfrac{1}{2}\varphi_{,} = \tfrac{1}{4}\varphi_{,,}, \; \tfrac{1}{4}\varphi_{,,} = \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,}, \; \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,} = \tfrac{1}{16}\varphi_{IV}, \ldots;$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_{,} = \tfrac{1}{4}\varphi_{,,} = \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,} = \tfrac{1}{16}\varphi_{IV} = \ldots$$

immer mehr und mehr der absoluten Richtigkeit, d. h. die Winkel

$$\varphi, \; \tfrac{1}{2}\varphi_{,}, \; \tfrac{1}{4}\varphi_{,,}, \; \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,}, \; \tfrac{1}{16}\varphi_{IV}, \ldots$$

jederzeit einer gewissen bestimmten Gränze, welcher dieselben beliebig nahe gebracht werden können, nähern werden. Wir wollen im Folgenden diese Gränze immer durch Ω bezeichnen.

Nach (29.) hat man nun

$$F(k, \varphi) = \frac{1 + k_{,}}{2} F(k_{,}, \varphi_{,}),$$

$$F(k_{,}, \varphi_{,}) = \frac{1 + k_{,,}}{2} F(k_{,,}, \varphi_{,,}),$$

$$F(k_{,,}, \varphi_{,,}) = \frac{1 + k_{,,,}}{2} F(k_{,,,}, \varphi_{,,,}),$$

u. s. f. u. s. f.;

also

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_{,}}{2} F(k_{,}, \varphi_{,})$$

$$= \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} F(k_{,,}, \varphi_{,,})$$

$$= \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,,}}{2} F(k_{,,,}, \varphi_{,,,})$$

$$= \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{IV}}{2} F(k_{IV}, \varphi_{IV})$$

u. s. f. u. s. f.

oder, weil $k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, k_{IV}, \ldots$ sich immer mehr und mehr der Null, also, weil überhaupt

$$F(0, \varphi) = \int_0^{\varphi} \partial\varphi = \varphi$$

ist,

$$F(k_{,}, \varphi_{,}),\ F(k_{,,}, \varphi_{,,}),\ F(k_{,,,}, \varphi_{,,,}),\ F(k_{IV}, \varphi_{IV})$$

sich immer mehr und mehr respective den Gränzen $\varphi_{,}, \varphi_{,,}, \varphi_{,,,}, \varphi_{IV}, \ldots$ nähern, mit immer größerer Genauigkeit, je weiter man sich vom Anfange entfernt:

$$F(k, \varphi) = (1+k_{,}) \cdot \tfrac{1}{2}\varphi_{,}$$
$$= (1+k_{,})(1+k_{,,}) \cdot \tfrac{1}{4}\varphi_{,,}$$
$$= (1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,}) \cdot \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,}$$
$$= (1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \cdot \tfrac{1}{16}\varphi_{IV}$$

u. s. f.

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$F(k, \varphi) = \Omega(1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \ldots,$$

welches unstreitig eine sehr merkwürdige in der Anwendung sehr brauchbare Näherungsformel ist, deren Erfindung ebenfalls Legendre gebührt. Setzen wir der Kürze wegen

$$K = (1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \ldots,$$

so ist immer

$$F(k, \varphi) = K\Omega.$$

Da nach dem Obigen

$$1+k_{,} = \frac{2\sqrt{k}}{k}, \quad 1+k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{k_{,}}, \quad 1+k_{,,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,,}}, \ldots$$

ist; so ist auch

$$K = \frac{2\sqrt{k}}{k} \cdot \frac{2\sqrt{k_{,}}}{k_{,}} \cdot \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,,}} \cdot \frac{2\sqrt{k_{IV}}}{k_{,,,}} \ldots.$$

Auch ist

$$1+k_{,} = \frac{2}{1+k}, \quad 1+k_{,,} = \frac{2}{1+k_{,}}, \quad 1+k_{,,,} = \frac{2}{1+k_{,,}}, \ldots,$$

und

$$k'_{,} = \gamma\left\{1 - \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\right\} = \frac{2\gamma k'}{1+k'},$$

$$k'_{,,} = \gamma\left\{1 - \left(\frac{1-k'_{,}}{1+k'_{,}}\right)^2\right\} = \frac{2\gamma k'_{,}}{1+k'_{,}},$$

$$k'_{,,,} = \gamma\left\{1 - \left(\frac{1-k'_{,,}}{1+k'_{,,}}\right)^2\right\} = \frac{2\gamma k'_{,,}}{1+k'_{,,}},$$

u. s. f. u. s. f.

also

$$1+k_{,} = \frac{k'}{\gamma k'}, \quad 1+k_{,,} = \frac{k'_{,}}{\gamma k'_{,}}, \quad 1+k_{,,,} = \frac{k'_{,,}}{\gamma k'_{,,}}, \ldots\ldots,$$

und folglich

$$K = \frac{k'}{\gamma k'} \cdot \frac{k'_{,}}{\gamma k'_{,}} \cdot \frac{k'_{,,}}{\gamma k'_{,,}} \ldots\ldots = \gamma \frac{k' k'_{,} k'_{,,} k'_{,,,} k'_{\mathrm{IV}} \ldots\ldots}{k'},$$

welches eine sehr bequeme Formel zur Berechnung von K ist, wenn man die Rechnung durch Logarithmen führt.

Mittelst einiger Hülfswinkel, Θ, $\Theta_{,}$, $\Theta_{,,}$, $\Theta_{,,,}$, ... kann man $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, k_{IV}, ... sehr leicht berechnen, wie folgende Formeln zeigen:

$$k = \sin\Theta$$

$$k_{,} = \left\{\frac{k}{1+\gamma 1-k^2}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta}\right\}^2 = \tan g\tfrac{1}{2}\Theta^2 = \sin\Theta_{,}$$

$$k_{,,} = \left\{\frac{k_{,}}{1+\gamma 1-k_{,}^2}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\Theta_{,}}{1+\cos\Theta_{,}}\right\}^2 = \tan g\tfrac{1}{2}\Theta_{,}^2 = \sin\Theta_{,,}$$

$$k_{,,,} = \left\{\frac{k_{,,}}{1+\gamma 1-k_{,,}^2}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\Theta_{,,}}{1+\cos\Theta_{,,}}\right\}^2 = \tan g\tfrac{1}{2}\Theta_{,,}^2 = \sin\Theta_{,,,}$$

u. s. f. u. s. f.

Hat man aber k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, so hat man auch

$$k' = \cos\Theta, \quad k'_{,} = \cos\Theta_{,}, \quad k'_{,,} = \cos\Theta_{,,}, \quad k'_{,,,} = \cos\Theta_{,,,}, \ldots\ldots$$

Auch die Winkel $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, φ_{IV}, ... lassen sich durch sehr einfache Formeln berechnen. Es ist nämlich

$$\sin(2\varphi - \varphi_{,}) = k_{,}\sin\varphi_{,},$$

$$\sin 2\varphi\cos\varphi_{,} - \cos 2\varphi\sin\varphi_{,} = k_{,}\sin\varphi_{,},$$

$$\tan g\,\varphi_{,} = \frac{\sin 2\varphi}{k_{,} + \cos 2\varphi}.$$

Aber

$$\tan g(\varphi_{,} - \varphi) = \frac{\tan g\,\varphi_{,} - \tan g\,\varphi}{1 + \tan g\,\varphi_{,}\tan g\,\varphi}$$

und

$$\tan g\,\varphi_{,} - \tan g\,\varphi = \frac{\sin 2\varphi\cos\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi - k_{,}\sin\varphi}{\cos\varphi(k_{,} + \cos 2\varphi)} = \frac{(1-k_{,})\tan g\varphi}{k_{,} + \cos 2\varphi},$$

$$1 + \tan g\,\varphi_{,}\tan g\,\varphi = \frac{\cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi + k_{,}\cos\varphi}{\cos\varphi(k_{,} + \cos 2\varphi)} = \frac{1 + k_{,}}{k_{,} + \cos 2\varphi};$$

also

$$\text{tang}(\varphi_{,}-\varphi) = \frac{1-k_{,}}{1+k_{,}}\text{tang}\,\varphi = k'\text{tang}\,\varphi\,,$$

folglich

$$\begin{aligned}
\text{tang}(\varphi_{,}-\varphi) &= k'\text{tang}\,\varphi\,,\\
\text{tang}(\varphi_{,,}-\varphi_{,}) &= k'_{,}\text{tang}\,\varphi_{,}\,,\\
\text{tang}(\varphi_{,,,}-\varphi_{,,}) &= k'_{,,}\text{tang}\,\varphi_{,,}\,,\\
\text{tang}(\varphi_{\text{IV}}-\varphi_{,,,}) &= k'_{,,,}\text{tang}\,\varphi_{,,,}\,,\\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

nach welchen Formeln $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$ ... mit vieler Leichtigkeit, also auch Ω, berechnet werden können.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird

$$\begin{aligned}
&\sin(\pi-\varphi_{,}) = \sin\varphi_{,} = k_{,}\sin\varphi_{,} = 0,\quad \pi-\varphi_{,}=0,\quad \varphi_{,}=\pi\,;\\
&\sin(2\pi-\varphi_{,,}) = -\sin\varphi_{,,} = k_{,,}\sin\varphi_{,,} = 0,\quad 2\pi-\varphi_{,,}=0,\quad \varphi_{,,}=2\pi\,;\\
&\sin(4\pi-\varphi_{,,,}) = -\sin\varphi_{,,,} = k_{,,,}\sin\varphi_{,,,} = 0,\quad 4\pi-\varphi_{,,,}=0,\quad \varphi_{,,,}=4\pi\,;\\
&\sin(8\pi-\varphi_{\text{IV}}) = -\sin\varphi_{\text{IV}} = k_{\text{IV}}\sin\varphi_{\text{IV}} = 0,\quad 8\pi-\varphi_{\text{IV}}=0,\quad \varphi_{\text{IV}}=8\pi\,;\\
&\qquad\qquad \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\varphi_{,} = \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{4}\varphi_{,,} = \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,} = \tfrac{1}{2}\pi,\ \ldots\ldots\,,$$

so daß also in diesem Falle $\Omega = \frac{1}{2}\pi$, folglich

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi K$$

ist. Man hat sich hierbei an die in (29.) gemachten Bemerkungen zu erinnern.

Ist man bei der Berechnung von k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ... auf ein sehr kleines k gekommen, so kann man, um das nächstfolgende k, welches ich überhaupt durch $k_{,}$ bezeichnen will, zu finden, sich auch der Formel

$$k_{,} = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}\right)^2$$

$$= \frac{2-k^2-2\sqrt{1-k^2}}{k^2} = \tfrac{1}{4}k^2 + \frac{1.3}{4.6}k^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8}k^6 + \ldots.$$

bedienen.

Aus der vorhergehenden Näherungsmethode würde sich auch leicht eine Methode ableiten lassen, φ zu finden, wenn $F(k, \varphi)$ für einen beliebigen Modulus gegeben ist, wobei wir aber hier nicht länger verweilen.

XV. Annähernde Berechnung der elliptischen Functionen der zweiten Art.

33. Wir betrachten hier das allgemeine Integral

$$G = \int_0^{\varphi} (a + b\sin\varphi^2)\frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)}\,,$$

unter welchem, wie man leicht sieht, für $a = 1$, $b = 0$ die

elliptischen Functionen der ersten, für $a = 1$, $b = -k^2$ die elliptischen Functionen der zweiten Art enthalten sind. Setzen wir wieder

$$k = \frac{2\sqrt{k_,}}{1+k_,}, \quad \sin(2\varphi - \varphi_,) = k_, \sin\varphi_,\ ;$$

so ist nach (29.)

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1 + k_, \sin\varphi_,^2 - \Delta(k_,, \varphi_,)\cos\varphi_,)\ ,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)} = \frac{1+k_,}{2} \cdot \frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)}\ ,$$

und folglich nach gehöriger Substitution, da offenbar φ und $\varphi_,$ zugleich verschwinden,

$$G = \frac{1+k_,}{2}\int_0^{\varphi_,} \{a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}bk_, \sin\varphi_,^2 - \tfrac{1}{2}b\Delta(k_,, \varphi_,)\cos\varphi_,\}\frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)}$$

$$= \frac{1+k_,}{2}\left\{\int_0^{\varphi_,} (a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}bk_, \sin\varphi_,^2)\frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)} - \tfrac{1}{2}b\sin\varphi_,\right\}$$

$$= \frac{1+k_,}{2}\left\{\int_0^{\varphi_,} (a_, + b_, \sin\varphi_,^2)\frac{\partial\varphi_,}{\Delta(k_,, \varphi_,)} - \tfrac{1}{2}b\sin\varphi_,\right\}$$

für $a + \frac{1}{2}b = a_,$, $\frac{1}{2}bk_, = b_,$.

Berechnet man nun $k_,$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ...; $\varphi_,$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, ... wieder ganz wie in (32.), so daß diese Größen nämlich den Gleichungen

$$k = \frac{2\sqrt{k_,}}{1+k_,}, \quad \sin(2\varphi - \varphi_,) = k_, \sin\varphi_,\ ;$$

$$k_, = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{1+k_{,,}}, \quad \sin(2\varphi_, - \varphi_{,,}) = k_{,,}\sin\varphi_{,,}\ ;$$

$$k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{1+k_{,,,}}, \quad \sin(2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}) = k_{,,,}\sin\varphi_{,,,}\ ;$$

u. s. f. u. s. f.

entsprechen; so hat man nach dem Vorhergehenden, wenn G, $G_,$, $G_{,,}$, ... lauter respective von a, b, k, φ; $a_,$, $b_,$, $k_,$, $\varphi_,$; $a_{,,}$, $b_{,,}$, $k_{,,}$, $\varphi_{,,}$; .... auf völlig gleiche Weise abhängende Integrale bezeichnen:

$$G = \frac{1+k_,}{2}\{G_, - \tfrac{1}{2}b\sin\varphi_,\}$$

$$G_, = \frac{1+k_{,,}}{2}\{G_{,,} - \tfrac{1}{2}b_,\sin\varphi_{,,}\}$$

$$G_{,,} = \frac{1+k_{,,,}}{2}\{G_{,,,} - \tfrac{1}{2}b_{,,}\sin\varphi_{,,,}\}$$

$$G_{,,,} = \frac{1+k_{IV}}{2}\{G_{IV} - \tfrac{1}{2}b_{,,,}\sin\varphi_{IV}\}$$

u. s. f. u. s. f.

für

$$a_{,} = a + \tfrac{1}{2}b, \quad b_{,} = \tfrac{1}{2}bk;$$
$$a_{,,} = a_{,} + \tfrac{1}{2}b_{,}, \quad b_{,,} = \tfrac{1}{2}b_{,}k_{,,};$$
$$a_{,,,} = a_{,,} + \tfrac{1}{2}b_{,,}, \quad b_{,,,} = \tfrac{1}{2}b_{,,}k_{,,,};$$
$$a_{IV} = a_{,,,} + \tfrac{1}{2}b_{,,,}, \quad b_{IV} = \tfrac{1}{2}b_{,,,}k_{IV};$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

Da nun nach (32.) $k, k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots$ der Null beliebig nahe gebracht werden können, wenn man sich nur weit genug vom Anfange dieser Reihe entfernt; so sey für den beabsichtigten Grad der Näherung $k_{(n)} = 0$. Weil

$$b_{,} = \tfrac{1}{2}bk,$$
$$b_{,,} = \tfrac{1}{2}b_{,}k_{,,} = \tfrac{1}{4}bk_{,}k_{,,}$$
$$b_{,,,} = \tfrac{1}{2}b_{,,}k_{,,,} = \tfrac{1}{8}bk_{,}k_{,,}k_{,,,}$$
$$b_{IV} = \tfrac{1}{2}b_{,,,}k_{IV} = \tfrac{1}{16}bk_{,}k_{,,}k_{,,,}k_{IV}$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

ist; so nimmt, wenn nur der absolute Werth von b, wie wir hier voraussetzen wollen, die Einheit nicht übersteigt, die Reihe $b, b_{,}, b_{,,}, b_{,,,}, \ldots$ schneller ab als die Reihe $k, k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots$, und man kann also für den beabsichtigten Grad der Näherung auch $b_{(n)} = 0$ setzen. Daß man den absoluten Werth von b nie größer als die Einheit anzunehmen braucht, und eigentlich überhaupt b beliebig klein machen kann, erhellet leicht, indem man ja für jedes willkührliche noch so kleine α

$$G = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\varphi} (\alpha a + \alpha b \sin\varphi^2) \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)}$$

setzen kann. Für $a_{(n)}$ erhält man leicht aus dem Obigen

$$a_{(n)} = a + \tfrac{1}{2}b\left\{1 + \frac{k_{,}}{2} + \frac{k_{,}k_{,,}}{4} + \frac{k_{,}k_{,,}k_{,,,}}{8} + \ldots\right\},$$

die Reihe so weit fortgesetzt, bis sie wegen $k_{(n)} = 0$ von selbst abbricht.

Weil $k_{(n)} = 0$, $b_{(n)} = 0$ ist, so ist

$$\Delta(k_{(n)}, \varphi_{(n)}) = 1$$

und

$$G_{(n)} = \int_0^{\varphi_{(n)}} (a_{(n)} + b_{(n)} \sin\varphi_{(n)}^2)\, \partial\varphi_{(n)} = a_{(n)} \int_0^{\varphi_{(n)}} \partial\varphi_{(n)}$$
$$= a_{(n)}\varphi_{(n)}.$$

Ist nun, wie in (32.), Ω die Gränze, welcher die Winkel

$$\varphi, \tfrac{1}{2}\varphi_{,}, \tfrac{1}{4}\varphi_{,,}, \tfrac{1}{8}\varphi_{,,,}, \tfrac{1}{16}\varphi_{IV}, \ldots$$

sich nähern, so ist

$$\frac{1}{2^n}\varphi_{(n)} = \Omega, \quad \varphi_{(n)} = 2^n\Omega,$$

und folglich

$$G_{(n)} = 2^n a_{(n)} . \Omega .$$

Aber nach dem Obigen

$$G = \frac{1+k_,}{2} G_, - \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi,$$

$$= \frac{(1+k_,)(1+k_{,,})}{4} G_{,,} - \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi,$$

$$- \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\frac{b\,k_,}{4}\sin\varphi_{,,}$$

$$= \frac{(1+k_,)(1+k_{,,})(1+k_{,,,})}{8} G_{,,,} - \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi,$$

$$- \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\frac{b\,k_,}{4}\sin\varphi_{,,}$$

$$- \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,,}}{2}\right)\frac{b\,k_,k_{,,}}{8}\sin\varphi_{,,,}$$

u. s. f. u. s. f.

Also offenbar, wenn man wieder der Kürze wegen

$$(1+k_,)((1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV}) \ldots . = K$$

setzt:

$$G = a_{(n)} K\Omega - \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\frac{b}{2}\sin\varphi,$$

$$- \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\frac{b\,k_,}{4}\sin\varphi_{,,}$$

$$- \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,,}}{2}\right)\frac{b\,k_,k_{,,}}{8}\sin\varphi_{,,,}$$

$$- \left(\frac{1+k_,}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{,,,}}{2}\right)\left(\frac{1+k_{IV}}{2}\right)\frac{b\,k_,k_{,,}k_{,,,}}{16}\sin\varphi_{IV}$$

u. s. f.

oder, weil nach (32.)

$$1+k_, = \frac{2\sqrt{k_,}}{k},\quad 1+k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_,}}{k_,},\quad 1+k_{,,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,,}},\ \ldots .$$

ist:

$$G = a_{(n)} K\Omega - \frac{b}{k}\left\{\begin{array}{l} \frac{\sqrt{k_,}}{2}\sin\varphi, \\ + \frac{\sqrt{k_,k_{,,}}}{4}\sin\varphi_{,,} \\ + \frac{\sqrt{k_,k_{,,}k_{,,,}}}{8}\sin\varphi_{,,,} \\ + \frac{\sqrt{k_,k_{,,}k_{,,,}k_{IV}}}{16}\sin\varphi_{IV} \\ + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

$a_{(n)}$ wird nach der oben gegebenen Formel gefunden.

Für die elliptischen Functionen der zweiten Art muß man, wie schon oben erinnert worden ist, $a = 1$, $b = -k^2$ setzen. Dadurch erhält man, wenn man in diesem Falle

$$a_{(n)} = L = 1 - \frac{k^2}{2} - \frac{k^2 k_{'}}{4} - \frac{k^2 k_{'} k_{''}}{8} - \frac{k^2 k_{'} k_{''} k_{'''}}{16} - \ldots$$

setzt:

$$E(k, \varphi) = KL\Omega + \frac{k\sqrt{k_{'}}}{2}\sin\varphi_{'} + \frac{k\sqrt{k_{'}k_{''}}}{4}\sin\varphi_{''} + \frac{k\sqrt{k_{'}k_{''}k_{'''}}}{8}\sin\varphi_{'''} + \frac{k\sqrt{k_{'}k_{''}k_{'''}k_{IV}}}{16}\sin\varphi_{IV} + \ldots\ldots\ldots$$

für

$$K = (1 + k_{'})(1 + k_{''})(1 + k_{'''}) \ldots\ldots = \sqrt{\frac{k_{'}k_{''}k_{'''}k_{IV}\ldots\ldots}{k'}}.$$

Durch diese Formel ist zugleich auch die unbestimmte Rectification der Ellipse gefunden, da bekanntlich (25.) durch $E(k, \varphi)$ immer die Länge eines Bogens einer Ellipse, deren Excentricität $= k$, die halbe Hauptaxe $= 1$ ist, dargestellt wird.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist nach (32.)

$$\sin\varphi_{'} = \sin\varphi_{''} = \sin\varphi_{'''} = \ldots = 0;$$

also, weil nach (32.) auch $\Omega = \frac{1}{2}\pi$ ist:

$$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi KL,$$

welches die Länge des elliptischen Quadranten ist. Alle diese Approximations-Formeln sind sehr bequem zur Rectification der Ellipse.

Für den Bogen $H(\varphi)$ der Hyperbel ist nach (28.)

$$\begin{aligned} H(\varphi) &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi + b^2 F(k, \varphi) - E(k, \varphi) \\ &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi + (1-k^2) F(k, \varphi) - E(k, \varphi) \\ &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi - \int_0^{\varphi} \left\{ \Delta(k, \varphi) - \frac{1-k^2}{\Delta(k, \varphi)} \right\} \partial\varphi \\ &= \Delta(k, \varphi)\,\mathrm{tang}\,\varphi - \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \cos\varphi^2\, \partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)}. \end{aligned}$$

Letzteres Integral geht aus unserm allgemeinen Integral hervor, wenn man $a = k^2$, $b = -k^2$ setzt. Dies giebt nach dem Obigen

$$\Delta(k,\varphi)\tang\varphi - H(\varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2}k^2 K\Omega\left\{1-\frac{k_1}{2}-\frac{k_1k_{11}}{4}-\frac{k_1k_{11}k_{111}}{8}-\ldots\right\}$$
$$+\frac{k}{2}\left\{\frac{\gamma k_1}{1}\sin\varphi_1+\frac{\gamma k_1k_{11}}{2}\sin\varphi_{11}+\frac{\gamma k_1k_{11}k_{111}}{4}\sin\varphi_{111}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma k_1k_{11}k_{111}k_{1V}}{8}\sin\varphi_{1V}+\ldots.\right\}.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Differenz geht unmittelbar aus (28.) hervor. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird diese Differenz

$$= \tfrac{1}{4}k^2\pi K\left\{1-\frac{k_1}{2}-\frac{k_1k_{11}}{4}-\frac{k_1k_{11}k_{111}}{8}-\ldots\right\},$$

und dies ist offenbar die Differenz zwischen der vom Mittelpunkte an gerechneten Asymptote und der vom Scheitel an gerechneten halben Hyperbel, wie ebenfalls unmittelbar aus (28.) hervorgeht.

34. Eine andere Näherungsmethode ergiebt sich auf folgende Art. Für

$$k = \frac{2\gamma k_1}{1+k_1},\quad \sin(2\varphi-\varphi_1) = k_1\sin\varphi_1$$

ist nach (33.)

$$G = \frac{1+k_1}{2}\{G_1-\tfrac{1}{2}b\sin\varphi_1\},\ a_1 = a+\tfrac{1}{2}b,\ b_1 = \tfrac{1}{2}bk_1.$$

Daher ist für

$$k_1 = \frac{2\gamma k}{1+k},\quad \sin(2\varphi_1-\varphi) = k\sin\varphi$$

offenbar

$$G_1 = \frac{1+k}{2}\{G-\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi\},\ a = a_1+\tfrac{1}{2}b_1,\ b = \tfrac{1}{2}b_1k;$$

d. i.

$$G = \frac{2}{1+k}G_1+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi,\ b_1 = \frac{2b}{k},\ a_1 = a-\tfrac{1}{2}b_1.$$

Hat man also folgende Reihe von Gleichungen

$$k_1 = \frac{2\gamma k}{1+k},\ \sin(2\varphi_1-\varphi) = k\sin\varphi;$$
$$k_2 = \frac{2\gamma k_1}{1+k_1},\ \sin(2\varphi_2-\varphi_1) = k_1\sin\varphi_1;$$
$$k_3 = \frac{2\gamma k_2}{1+k_2},\ \sin(2\varphi_3-\varphi_2) = k_2\sin\varphi_2;$$
$$k_4 = \frac{2\gamma k_3}{1+k_3},\ \sin(2\varphi_4-\varphi_3) = k_3\sin\varphi_3;$$
u. s. f. u. s. f.

so entspricht derselben jederzeit die folgende Reihe

$$G = \frac{2}{1+k} G_1 + \tfrac{1}{2} b_1 \sin\varphi ,$$

$$G_1 = \frac{2}{1+k_1} G_2 + \tfrac{1}{2} b_2 \sin\varphi_1 ,$$

$$G_2 = \frac{2}{1+k_2} G_3 + \tfrac{1}{2} b_3 \sin\varphi_2 ,$$

$$G_3 = \frac{2}{1+k_3} G_4 + \tfrac{1}{2} b_4 \sin\varphi_3 ,$$

u. s. f. u. s. f.

für

$$b_1 = \frac{2b}{k}, \; a_1 = a - \tfrac{1}{2} b_1 ;$$

$$b_2 = \frac{2b_1}{k_1}, \; a_2 = a_1 - \tfrac{1}{2} b_2 ;$$

$$b_3 = \frac{2b_2}{k_2}, \; a_3 = a_2 - \tfrac{1}{2} b_3 ;$$

$$b_4 = \frac{2b_3}{k_3}, \; a_4 = a_3 - \tfrac{1}{2} b_4 ;$$

u. s. f. u. s. f.

Nach (29.) wachsen k, k_1, k_2, k_3, ... fortwährend und nähern sich immer mehr und mehr der Einheit, ohne dieselbe jedoch jemals zu übersteigen. Kann man nun für den beabsichtigten Grad der Näherung $k_n = 1$ setzen, so ist

$$\Delta(k_n, \varphi_n) = \cos\varphi_n$$

und folglich

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} (a_n + b_n \sin\varphi^2{}_n) \frac{\partial\varphi_n}{\cos\varphi_n}$$

$$= (a_n + b_n) \int_0^{\varphi_n} \frac{\partial\varphi_n}{\cos\varphi_n} - b_n \int_0^{\varphi_n} \cos\varphi \, \partial\varphi_n$$

$$= (a_n + b_n) \operatorname{l\,tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi_n) - b_n \sin\varphi_n$$

(Integralformel. 117.).

Da sich nun k, k_1, k_2, k_3, ... immer mehr und mehr der Einheit nähern, so werden sich nach dem Obigen auch die Gleichungen

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = \sin\varphi, \; 2\varphi_1 - \varphi = \varphi, \; \varphi_1 = \varphi ;$$
$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_1, \; 2\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_1, \; \varphi_2 = \varphi_1 ;$$
$$\sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = \sin\varphi_2, \; 2\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2, \; \varphi_3 = \varphi_2 ;$$
$$\sin(2\varphi_4 - \varphi_4) = \sin\varphi_3, \; 2\varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_3, \; \varphi_4 = \varphi_3 ;$$

u. s. f. u. s. f.

d. i. die Gleichung

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \ldots .$$

der absoluten Richtigkeit, oder die Winkel φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4,

.... immer mehr und mehr einer gewissen bestimmten Gränze nähern, welche wir durch Ω' bezeichnen wollen. Für $k_n = 1$ ist also $\varphi_n = \Omega'$, folglich

$$G_n = (a_n + b_n)\,l\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Omega') - b_n \sin \Omega'$$

zu setzen. a_n und b_n werden aus den Reihen

$$b_1 = \frac{2b}{k},\quad a_1 = a - \tfrac{1}{2}b_1;$$

$$b_2 = \frac{2b_1}{k_1},\quad a_2 = a_1 - \tfrac{1}{2}b_2;$$

$$b_3 = \frac{2b_2}{k_2},\quad a_3 = a_2 - \tfrac{1}{2}b_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{2b_{n-1}}{k_{n-1}},\quad a_n = a_{n-1} - \tfrac{1}{2}b_n$$

berechnet. Auch ist

$$b_1 = \frac{2b}{k},\ b_2 = \frac{4b}{kk_1},\ b_3 = \frac{8b}{kk_1k_2},\ \ldots\ b_n = \frac{2^n b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}};$$

$$a_1 = a - \frac{b}{k},$$

$$a_2 = a - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1},$$

$$a_3 = a - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1} - \frac{4b}{kk_1k_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1} - \frac{4b}{kk_1k_2} - \ldots - \frac{2^{n-1}b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}};$$

also

$$a_n + b_n = a + \frac{2^n b}{kk_1\ldots k_{n-1}} - \frac{b}{k} - \frac{2b}{kk_1} - \frac{4b}{kk_1k_2} - \ldots - \frac{2^{n-1}b}{kk_1\ldots k_{n-1}}.$$

Es ist aber auch

$$(a_1 + b_1) - (a + b) = \frac{b}{k}(1 - k),$$

$$(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) = \frac{2b}{kk_1}(1 - k_1),$$

$$(a_3 + b_3) - (a_2 + b_2) = \frac{4b}{kk_1k_2}(1 - k_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_n + b_n) - (a_{n-1} + b_{n-1}) = \frac{2^{n-1}b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}(1 - k_{n-1});$$

also, wenn man addirt:

$$a_n + b_n = a + \frac{b}{k} + \frac{2b}{kk_1}(1 - k_1) + \frac{4b}{kk_1k_2}(1 - k_2) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{2^{n-1}b}{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}(1 - k_{n-1}).$$

Aber, wenn man

$$\gamma\overline{1-k^2} = k',\ \gamma\overline{1-k_1^2} = k'_1,\ \gamma\overline{1-k_2^2} = k'_2, \ldots.$$

setzt, da

$$k_1 = \frac{2\gamma k}{1+k},\ k_2 = \frac{2\gamma k_1}{1+k_1},\ k_3 = \frac{2\gamma k_2}{1+k_2}, \ldots.$$

ist:

$$k'_2 = \gamma\left\{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\right\} = \gamma\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} = \frac{1-k}{1+k},$$

$$k'_3 = \gamma\left\{1-\frac{4k_1}{(1+k_1)^2}\right\} = \gamma\frac{(1-k_1)^2}{(1+k_1)^2} = \frac{1-k_1}{1+k_1},$$

$$k'_4 = \gamma\left\{1-\frac{4k_2}{(1+k_2)^2}\right\} = \gamma\frac{(1-k_2)^2}{(1+k_2)^2} = \frac{1-k_2}{1+k_2},$$

u. s. f. u. s. f.;

also umgekehrt

$$k = \frac{1-k'_1}{1+k'_1},\ k_1 = \frac{1-k'_2}{1+k'_2},\ k_2 = \frac{1-k'_3}{1+k'_3}, \ldots.$$

Folglich auch

$$k' = \gamma\overline{1-k^2} = \gamma\left\{1-\left(\frac{1-k'_1}{1+k'_1}\right)^2\right\} = \frac{2\gamma k'_1}{1+k'_1},$$

$$k'_1 = \gamma\overline{1-k_1^2} = \gamma\left\{1-\left(\frac{1-k'_2}{1+k'_2}\right)^2\right\} = \frac{2\gamma k'_2}{1+k'_2},$$

$$k'_2 = \gamma\overline{1-k_2^2} = \gamma\left\{1-\left(\frac{1-k'_3}{1+k'_3}\right)^2\right\} = \frac{2\gamma k'_3}{1+k'_3},$$

u. s. f. u. s. f.

$$1+k = \frac{2}{1+k'_1} = \frac{k'}{\gamma k'_1} = \frac{2\gamma k}{k_1},$$

$$1+k_1 = \frac{2}{1+k'_2} = \frac{k'_1}{\gamma k'_2} = \frac{2\gamma k_1}{k_2},$$

$$1+k_2 = \frac{2}{1+k'_3} = \frac{k'_2}{\gamma k'_3} = \frac{2\gamma k_2}{k_3},$$

u. s. f. u. s. f.

$$1-k = \frac{2k'_1}{1+k'_1} = k'\gamma k'_1,$$

$$1-k_1 = \frac{2k'_2}{1+k'_2} = k'_1\gamma k'_2,$$

$$1-k_2 = \frac{2k'_3}{1+k'_3} = k'_2\gamma k'_3,$$

u. s. f. u. s. f.

Also auch nach dem Obigen

$$k'_1 = \frac{1-k}{1+k} = \frac{k'k_1\Upsilon k'_1}{2\Upsilon k},$$

$$k'_2 = \frac{1-k_1}{1+k_1} = \frac{k'_1k_2\Upsilon k'_2}{2\Upsilon k_1} = \frac{k'k_1k_2\Upsilon k'_1k'_2}{4\Upsilon kk_1},$$

$$k'_3 = \frac{1-k_2}{1+k_2} = \frac{k'_2k_3\Upsilon k'_3}{2\Upsilon k_2} = \frac{k'k_1k_2k_3\Upsilon k'_1k'_2k'_3}{8\Upsilon kk_1k_2},$$

u. s. f. u. s. f.

und folglich

$$1 - k = k'\Upsilon k'_1$$

$$1 - k_1 = \frac{k'k_1\Upsilon k'_1k'_2}{2\Upsilon k},$$

$$1 - k_2 = \frac{k'k_1k_2\Upsilon k'_1k'_2k'_3}{4\Upsilon kk_1},$$

$$1 - k_3 = \frac{k'k_1k_2k_3\Upsilon k'_1k'_2k'_3k'_4}{8\Upsilon kk_1k_2},$$

u. s. f. u. s. f.

Also, da man statt $\frac{b}{k}$ in der oben für $a_n + b_n$ gefundenen Reihe offenbar

$$b + \frac{b}{k} - b = b + \frac{b}{k}(1-k) = b + \frac{b}{k}k'\Upsilon k'_1$$

setzen kann:

$$a_n + b_n =$$

$$a + b + \frac{bk'}{k}\left\{\Upsilon k'_1 + \Upsilon\left(\frac{k'_1k'_2}{k}\right) + \Upsilon\left(\frac{k'_1k'_2k'_3}{kk_1}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \Upsilon\left(\frac{k'_1k'_2k'_3 \ldots k'_n}{kk_1k_2 \ldots k_{n-2}}\right)\right\}.$$

Weil $k, k_1, k_2, k_3, \ldots$ sich immer mehr und mehr der Einheit, also $k', k'_2, k'_3, \ldots$ sich immer mehr und mehr der Null nähern, so ist dies offenbar eine sehr stark convergirende und daher eine sehr bequeme Rechnung gestattende Reihe.

Durch successive Substitution ergiebt sich nun aus dem Obigen

$$G=\frac{2}{1+k}G_1+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi$$

$$=\frac{4}{(1+k)(1+k_1)}G_2+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1$$

$$=\frac{8}{(1+k)(1+k_1)(1+k_2)}G_3+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1+\frac{2}{(1+k)(1+k_1)}b_3\sin\varphi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{2^n}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-1})}G_n+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1$$
$$+\frac{2}{(1+k)(1+k_1)}b_3\sin\varphi_2+\ldots+\frac{2^{n-2}}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-2})}b_n\sin\varphi_{n-1},$$

oder, wenn wir

$$\frac{2^n}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-1})}=K'$$

setzen:

$$G=(a_n+b_n)K'\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\Omega')-b_nK'\sin\Omega'$$
$$+\tfrac{1}{2}b_1\sin\varphi+\frac{1}{1+k}b_2\sin\varphi_1+\frac{2}{(1+k)(1+k_1)}b_3\sin\varphi_2+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{2^{n-2}}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-2})}b_n\sin\varphi_{n-1}.$$

Aber überhaupt

$$(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-1})=\frac{2\sqrt{k}}{k_1}\cdot\frac{2\sqrt{k_1}}{k_2}\cdot\frac{2\sqrt{k_2}}{k_3}\ldots\frac{2\sqrt{k_{n-1}}}{k_n}$$
$$=\frac{2^n}{k_n}\sqrt{\left(\frac{k}{k_1k_2k_3\ldots k_{n-1}}\right)};$$

folglich, weil man nach dem Obigen $k_n=1$ setzen kann:

$$K'=\sqrt{\left(\frac{k_1k_2k_3\ldots k_{n-1}}{k}\right)}.$$

Ferner ist

$$\frac{2^{n-2}b_n}{(1+k)(1+k_1)\ldots(1+k_{n-2})}=2^{n-2}\cdot\frac{k_{n-1}}{2^{n-1}}\sqrt{\left(\frac{k_1k_2\ldots k_{n-2}}{k}\right)}\cdot\frac{2^nb}{kk_1\ldots k_{n-1}}$$
$$=\frac{2^{n-1}b}{k\sqrt{kk_1k_2\ldots k_{n-2}}};$$

$$b_nK'=\frac{2^nb}{kk_1\ldots k_{n-1}}\sqrt{\left(\frac{k_1k_2\ldots k_{n-1}}{k}\right)}=\frac{b}{k}\cdot\frac{2^n}{\sqrt{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}};$$

also

$$G=(a_n+b_n)K'\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\Omega')-\frac{b}{k}\cdot\frac{2^n\sin\Omega'}{\sqrt{kk_1k_2\ldots k_{n-1}}}$$
$$+\frac{b}{k}\left\{\sin\varphi+\frac{2}{\sqrt{k}}\sin\varphi_1+\frac{4}{\sqrt{kk_1}}\sin\varphi_2+\frac{8}{\sqrt{kk_1k_2}}\sin\varphi_3+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{2^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\sqrt{kk_1k_2k_3\ldots k_{n-2}}}\right\}$$
$$=(a_n+b_n)K'\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\Omega')-\frac{b}{k}\Sigma,$$

wo die Bedeutung von Σ sogleich in die Augen fallen wird.

Die durch Σ bezeichnete Reihe läßt sich aber auch noch auf eine andere Art ausdrücken. Man setze nämlich überhaupt

$$\psi(n) = \frac{2^n k_n \sin\varphi_n}{\Gamma k k_1 k_2 \ldots k_{n-1}} - \sin\varphi - \frac{2}{\Gamma k}\sin\varphi_1 - \frac{4}{\Gamma k k_1}\sin\varphi_2 - \ldots\ldots - \frac{2^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\Gamma k k_1 k_2 k_3 \ldots k_{n-2}};$$

so ist

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \frac{2^{n+1} k_{n+1} \sin\varphi_{n+1}}{\Gamma k k_1 k_2 \ldots k_n} - \frac{2^n k_n \sin\varphi_n}{\Gamma k k_1 \ldots k_{n-1}} - \frac{2^n \sin\varphi_n}{\Gamma k k_1 \ldots k_{n-1}}$$

$$= \frac{2^{n+1} k_{n+1} \sin\varphi_{n+1}}{\Gamma k k_1 k_2 \ldots k_n} - \frac{2^n (1+k_n)}{\Gamma k k_1 \ldots k_{n-1}}\sin\varphi_n;$$

aber nach dem Obigen

$$1 + k_n = \frac{2\Gamma k_n}{k_{n+1}} = \frac{2 k_n}{k_{n+1}\Gamma k_n};$$

also

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \frac{2^{n+1}}{\Gamma k k_1 k_2 \ldots k_n}\left\{k_{n+1}\sin\varphi_{n+1} - \frac{k_n}{k_{n+1}}\sin\varphi_n\right\}.$$

Folglich, weil

$$\psi(1) = \frac{2 k_1 \sin\varphi_1}{\Gamma k} - \sin\varphi$$

$$= k\sin\varphi + \frac{2 k_1 \sin\varphi_1}{\Gamma k} - (1+k)\sin\varphi$$

$$= k\sin\varphi + \frac{2 k_1 \sin\varphi_1}{\Gamma k} - \frac{2\Gamma k}{k_1}\sin\varphi$$

$$= k\sin\varphi + \frac{2 k_1 \sin\varphi_1}{\Gamma k} - \frac{2k}{k_1 \Gamma k}\sin\varphi$$

$$= k\sin\varphi + \frac{2}{\Gamma k}\left\{k_1 \sin\varphi_1 - \frac{k}{k_1}\sin\varphi\right\}$$

ist:

$$\psi(1) = k\sin\varphi + \frac{2}{\Gamma k}\left\{k_1\sin\varphi_1 - \frac{k}{k_1}\sin\varphi\right\}$$

$$\psi(2) - \psi(1) = \frac{4}{\Gamma k k_1}\left\{k_2\sin\varphi_2 - \frac{k_1}{k_2}\sin\varphi_1\right\}$$

$$\psi(3) - \psi(2) = \frac{8}{\Gamma k k_1 k_2}\left\{k_3\sin\varphi_3 - \frac{k_2}{k_3}\sin\varphi_2\right\}$$

$$\psi(4) - \psi(3) = \frac{16}{\Gamma k k_1 k_2 k_3}\left\{k_4\sin\varphi_4 - \frac{k_3}{k_4}\sin\varphi_3\right\}$$

. . . . . .

$$\psi(n) - \psi(n-1) = \frac{2^n}{\Gamma k k_1 \ldots k_{n-1}}\left\{k_n\sin\varphi_n - \frac{k_{n-1}}{k_n}\sin\varphi_{n-1}\right\}.$$

Also, wenn man addirt, da wegen $k_n = 1$, $\varphi_n = \Omega$

$$\psi(n) = \frac{2^n \sin\Omega'}{\Gamma k k_1 .. k_{n-1}} - \sin\varphi - \frac{2}{\Gamma k}\sin\varphi_1 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{2^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\Gamma k k_1 k_2 .. k_{n-2}} = \Sigma$$

ist:

$$\Sigma = k\sin\varphi + \frac{2}{\Gamma k}\left\{k_1\sin\varphi_1 - \frac{k}{k_1}\sin\varphi\right\}$$

$$+ \frac{4}{\Gamma k k_1}\left\{k_2\sin\varphi_2 - \frac{k_1}{k_2}\sin\varphi_1\right\}$$

$$+ \frac{8}{\Gamma k k_1 k_2}\left\{k_3\sin\varphi_3 - \frac{k_2}{k_3}\sin\varphi_2\right\}$$

$$+ \frac{2^n}{\Gamma k k_1 .. k_{n-1}}\left\{k_n\sin\varphi_n - \frac{k_{n-1}}{k_n}\sin\varphi_{n-1}\right\}.$$

Vergleicht man die beiden in (33.) und hier entwickelten Näherungsmethoden mit einander, so fällt in die Augen, daß die bequeme Anwendbarkeit der ersten darauf beruhet, daß die Größen k, k_1, k_{11}, k_{111}, ... sich möglichst schnell der Null nähern, so wie im Gegentheil, wenn die zweite Methode bequem anwendbar seyn soll, die Größen k, k_1, k_2, k_3, ... sich möglichst schnell der Einheit nähern müssen, woraus also hervorgeht, daß man sich im Allgemeinen mit dem größten Vortheil der ersten oder zweiten Methode bedienen wird, jenachdem k entweder nahe $= 0$ oder nahe $= 1$ ist. Wäre also z. B. eine Ellipse zu rectificiren, deren Excentricität k nahe $= 1$ ist, so würde man sich dazu am besten der zweiten Methode bedienen, und hat sich hierbei nur zu erinnern, daß man n immer so groß nehmen muß, daß der beabsichtigte Grad der Näherung verstattet, $k_n = 1$ zu setzen. Für die elliptischen Functionen, d. i. für die Rectification der Ellipse, muß man, wie schon in (33.), $a = 1$, $b = -k^2$ setzen, wodurch man

$$a_n + b_n =$$

$$k'^2 - kk'\left\{\Gamma k'_1 + \Gamma\left(\frac{k'_1 k'_2}{k}\right) + \Gamma\left(\frac{k'_1 k'_2 k'_3}{k k_1}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \Gamma\left(\frac{k'_1 k'_2 k'_3 \ldots k'_n}{k k_1 k_2 .. k_{n-2}}\right)\right\},$$

oder auch, weil nach dem Obigen

$$k'\Gamma k'_1 = 1 - k$$

ist,

$$a_n + b_n =$$

$$= k' \gamma k'_1 \left\{ 1 - \gamma k k'^2_2 - \gamma\left(\frac{k k'_2 k'_3}{k_1}\right) - \gamma\left(\frac{k k'_2 k'_3 k'_4}{k_1 k_2}\right) \right.$$
$$\left. - \ldots - \gamma\left(\frac{k k'_2 k'_3 \ldots k'_n}{k_1 k_2 \ldots k_{n-2}}\right) \right\},$$

$$E(\varphi) = (a_n + b_n) K' 1 \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Omega') + k\Sigma$$

erhält. K' und Σ behalten ihre vorher angegebenen allgemeinen Werthe. Für den elliptischen Quadranten muß man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzen. Besondere Formeln für diesen Fall giebt Legendre im Traité des fonctions elliptiques. T. I. p. 115. M. s. auch den Artikel Cylinder (3.) i. d. Z. und Rectification.

Für die Hyperbel müßte man wie in (33.) verfahren, wobei wir jedoch hier nicht länger verweilen, da die Sache nach der dort gegebenen Erläuterung durchaus keine Schwierigkeit hat.

Eine ähnliche Methode, wie die hier in (34.) entwickelte, in dem Falle, wo k nahe $= 1$ ist, würde sich auch für die elliptischen Functionen der ersten Art geben lassen; indeß sind diese ja auch unter dem hier betrachteten allgemeinen Integral begriffen.

XVI. Annähernde Berechnung der elliptischen Functionen der dritten Art.

35. Wir wollen zuerst die beiden speciellen Fälle, wenn in der elliptischen Function der dritten Art

$$\Pi(n, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1 + n \sin\varphi^2)\,\Delta(\varphi)}$$

$n = k$ oder $n = -k$ ist, einer besondern Betrachtung unterwerfen. Da offenbar

$$\Pi(n, \varphi) = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} + \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{1 - n\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

ist, so ist $\Pi(n, \varphi)$ als gefunden zu betrachten, wenn das zweite Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gefunden ist, da das erste eine elliptische Function der ersten Art ist. Ist nun zuerst $n = k$, so setze man

$$\sin\psi = \frac{(1 + k)\sin\varphi}{1 + k\sin\varphi^2},$$

welches verstattet ist, da offenbar

$$(1 + k\sin\varphi^2)^2 > (1 + k)^2 \sin\varphi^2$$

ist, indem hieraus, wenn man quadrirt,

$$1 + 2k\sin\varphi^2 + k^2\sin\varphi^4 > \sin\varphi^2 + 2k\sin\varphi^2 + k^2\sin\varphi^2,$$
$$\cos\varphi^2 > k^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2,\ k^2\sin\varphi^2 < 1$$

folgt, wie es wirklich der Fall ist, da bekanntlich immer $k < 1$ ist. Durch Differentiation erhält man nun leicht

$$\cos\psi\,\partial\psi = \frac{(1+k)\cos\varphi(1-k\sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{(1+k\sin\varphi^2)^2},$$

und folglich, weil

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1+k\sin\varphi^2}$$

ist:

$$\partial\psi = \frac{(1+k)(1-k\sin\varphi^2)}{1+k\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)};$$

also

$$\int_0^{\varphi}\frac{1-k\sin\varphi^2}{1+k\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{\psi}{1+k},$$

da $\psi = 0$ für $\varphi = 0$. Hierdurch ist also dieses Integral und folglich auch $\Pi(n, \varphi)$ in dem Falle $n = k$ gefunden.

Ist $n = -k$, so findet man, indem

$$\sin\omega = \frac{(1-k)\sin\varphi}{1-k\sin\varphi^2}$$

gesetzt wird, auf ganz ähnliche Art

$$\int_0^{\varphi}\frac{1+k\sin\varphi^2}{1-k\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{\omega}{1-k}.$$

Hiernach können wir also im Folgenden von dem Falle $n = \pm k$ ganz abstrahiren.

In (24.) haben wir ferner, für

$$\alpha = (1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right),$$

die beiden merkwürdigen Gleichungen gefunden:

$$\Pi(n, \varphi) + \Pi\left(\frac{k^2}{n}, \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{Arc\,tang}\frac{\sqrt{\alpha}\tang\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

wenn α positiv ist, und, wenn $\sqrt{\alpha} = \beta\sqrt{-1}$ ist:

$$\Pi(n, \varphi) + \Pi\left(\frac{k^2}{n}, \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{2\beta}l\frac{\Delta(\varphi)+\beta\tang\varphi}{\Delta(\varphi)-\beta\tang\varphi}.$$

Da nun, weil wir von dem Falle $n = \pm k$ ganz abstrahiren, und $k < 1$ ist, offenbar immer der absolute Werth von n oder $\frac{k^2}{n}$ kleiner als k ist, so sieht man, daß man im Folgenden immer annehmen kann, daß in $\Pi(n, \varphi)$ der absolute Werth von n kleiner als k ist. Die Fälle $n = -k^2$ und $n = -1$, in denen $\alpha = 0$ wird, die obigen Gleichungen also nicht mehr Statt finden, sind schon in (24.) erledigt worden.

36. Wir betrachten nun wieder das allgemeinere Integral

$$\Gamma = \int_0^{\varphi}\frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)},$$

welches sich aber auch auf die Form

$$\Gamma = \int_0^{\varphi} \frac{A + nA\sin\varphi^2 + (B - nA)\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)},$$

d. i., wenn wir statt A und B — nA respective a und b setzen, auf die Form

$$\Gamma = \int_0^{\varphi} \left\{ a + \frac{b\sin\varphi^2}{1 + n\sin\varphi^2} \right\} \frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}$$

bringen läßt.

Wie in (33.) setzen wir nun auch hier

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad \sin(2\varphi - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi_1;$$

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1 + k_1\sin\varphi_1^2 - \Delta(k_1,\varphi_1)\cos\varphi_1),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)} = \frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\Delta(k_1,\varphi_1)};$$

so wird

$$\Gamma =$$

$$\frac{1+k_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \left\{ a + \frac{\frac{1}{2}b(1 + k_1\sin\varphi_1^2 - \Delta(k_1,\varphi_1)\cos\varphi_1)}{1 + \frac{1}{2}n(1 + k_1\sin\varphi_1^2 - \Delta(k_1,\varphi_1)\cos\varphi_1)} \right\} \frac{\partial\varphi_1}{\Delta(k_1,\varphi_1)}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner des Bruchs in der Klammer mit

$$1 + \tfrac{1}{2}n(1 + k_1\sin\varphi_1^2 + \Delta(k_1,\varphi_1)\cos\varphi_1),$$

so wird der Nenner

$$= (1 + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}nk_1\sin\varphi_1^2)^2 - \tfrac{1}{4}n^2(1 - k_1^2\sin\varphi_1^2)\cos\varphi_1^2$$
$$= 1 + n + n\{\tfrac{1}{4}n(1 + k_1^2) + (1 + \tfrac{1}{2}n)k_1\}\sin\varphi_1^2.$$

Da aber

$$k^2 = \frac{4k_1}{(1+k_1)^2}, \quad 1 - k^2 = k'^2 = \left(\frac{1-k_1}{1+k_1}\right)^2;$$

$$k' = \frac{1-k_1}{1+k_1}, \quad k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad 1 + k_1 = \frac{2}{1+k'}, \quad 1 + k_1^2 = \frac{2(1+k'^2)}{(1+k')^2}$$

ist; so ergiebt sich nach gehöriger Substitution der obige Nenner

$$= 1 + n + \frac{n(n+k^2)}{(1+k')^2}\sin\varphi_1^2$$

$$= (1 + n)\left\{1 + \frac{n(n+k^2)}{(1+n)(1+k')^2}\sin\varphi_1^2\right\} = (1+n)(1 + n_1\sin\varphi_1^2),$$

für

$$n_1 = \frac{n(n+k^2)}{(1+n)(1+k')^2}.$$

Der Zähler wird durch die angezeigte Multiplication

$$= \tfrac{1}{2}b\,(1 + k_{,}\sin\varphi_{,}^{2} - \Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,})$$
$$+ \tfrac{1}{2}bn\left\{1 + 2k_{,}\sin\varphi_{,}^{2} + k_{,}^{2}\sin\varphi_{,}^{4} - (1 - k_{,}^{2}\sin\varphi_{,}^{2})\cos\varphi_{,}^{2}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}b\,\{1 + k_{,}\sin\varphi_{,}^{2} + \tfrac{1}{2}n(1 + k_{,})^{2}\sin\varphi_{,}^{2}\}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\,\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,}$$
$$= \tfrac{1}{2}b\left\{\frac{1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}{\frac{n(n+k^{2})}{(1+n)(1+k')^{2}}\sin\varphi_{,}^{2} + \frac{1-k'}{1+k'}\sin\varphi_{,}^{2} + \frac{2n}{(1+k')^{2}}\sin\varphi_{,}^{2}}\right\}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\,\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,}$$
$$= \tfrac{1}{2}b\left\{1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2} + \frac{k^{2} + 2n + n^{2}}{(1+n)(1+k')^{2}}\sin\varphi_{,}^{2}\right\}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\,\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,}$$
$$= \tfrac{1}{2}b(1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}) + (1 + n)\,b_{,}\sin\varphi_{,}^{2}$$
$$- \tfrac{1}{2}b\,\Delta(k_{,}, \varphi_{,})\cos\varphi_{,},$$

wenn wir

$$b_{,} = b\cdot\frac{k^{2} + 2n + n^{2}}{2(1+n)^{2}(1+k')^{2}}$$

setzen.

Folglich ist:

$$\Gamma = \frac{1+k_{,}}{2}\int_{0}^{\varphi_{,}}\left\{a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} + \frac{b_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}{1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}\right\}\frac{\partial\varphi_{,}}{\Delta(k_{,}, \varphi_{,})}$$
$$- \frac{1+k_{,}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}b}{1+n}\int_{0}^{\varphi_{,}}\frac{\cos\varphi_{,}\,\partial\varphi_{,}}{1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}},$$

und es ist also, wenn wir

$$a_{,} = a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n},$$
$$b_{,} = b\cdot\frac{k^{2} + 2n + n^{2}}{2(1+n)^{2}(1+k')^{2}},$$
$$n_{,} = \frac{n(n + k^{2})}{(1 + n)(1 + k)^{2}},$$
$$\Gamma_{,} = \int_{0}^{\varphi_{,}}\left\{a_{,} + \frac{b_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}{1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}\right\}\frac{\partial\varphi_{,}}{\Delta(k_{,}, \varphi_{,})}$$

setzen:

$$\Gamma = \frac{1+k_{,}}{2}\left\{\Gamma_{,} - \frac{\frac{1}{2}b}{1+n}\int_{0}^{\varphi_{,}}\frac{\cos\varphi_{,}\,\partial\varphi_{,}}{1 + n_{,}\sin\varphi_{,}^{2}}\right\}.$$

Werden also $k_{,}, k_{,,}, k_{,,,}, \ldots$; $\varphi_{,}, \varphi_{,,}, \varphi_{,,,}, \ldots$, aus den Gleichungen

$$k_{,} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \sin(2\varphi - \varphi_{,}) = k_{,}\sin\varphi_{,};$$
$$k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{1+k_{,}}, \quad \sin(2\varphi_{,} - \varphi_{,,}) = k_{,,}\sin\varphi_{,,};$$

$$k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{1+k_{,,,}}, \quad \sin(2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}) = k_{,,,} \sin\varphi_{,,,} ;$$

u. s. f. u. s. f.

bestimmt; so ist

$$\Gamma = \frac{1+k_{,}}{2}\left\{\Gamma_{,} - \frac{\frac{1}{2}b}{1+n}\int_0^{\varphi_{,}} \frac{\cos\varphi_{,}\,\partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{\,2}}\right\}$$

$$\Gamma_{,} = \frac{1+k_{,,}}{2}\left\{\Gamma_{,,} - \frac{\frac{1}{2}b_{,}}{1+n_{,}}\int_0^{\varphi_{,,}} \frac{\cos\varphi_{,,}\,\partial\varphi_{,,}}{1+n_{,,}\sin\varphi_{,,}^{\,2}}\right\}$$

$$\Gamma_{,,} = \frac{1+k_{,,,}}{2}\left\{\Gamma_{,,,} - \frac{\frac{1}{2}b_{,,}}{1+n_{,,}}\int_0^{\varphi_{,,,}} \frac{\cos\varphi_{,,,}\,\partial\varphi_{,,,}}{1+n_{,,,}\sin\varphi_{,,,}^{\,2}}\right\}$$

$$\Gamma_{,,,} = \frac{1+k_{IV}}{2}\left\{\Gamma_{IV} - \frac{\frac{1}{2}b_{,,,}}{1+n_{,,,}}\int_0^{\varphi_{IV}} \frac{\cos\varphi_{IV}\,\partial\varphi_{IV}}{1+n_{IV}\sin\varphi_{IV}^{\,2}}\right\}$$

u. s. f. u. s. f.

und aus dem Obigen erhellet leicht, wie $a_{,}$, $b_{,}$, n; $a_{,,}$, $b_{,,}$, $n_{,}$; $a_{,,,}$, $b_{,,,}$, $n_{,,}$; u. s. f. successive aus einander gefunden werden.

Macht man $n = mk$, $n_{,} = m_{,}k_{,}$, $n_{,,} = m_{,,}k_{,,}$, u. s. f., so wird nach dem Obigen leicht erhalten:

$$m_{,} = \frac{m(m+k)}{1+mk}, \quad m_{,,} = \frac{m_{,}(m_{,}+k_{,})}{1+m_{,}k_{,}}, \quad m_{,,,} = \frac{m_{,,}(m_{,,}+k_{,,})}{1+m_{,,}k_{,,}}, \ldots.$$

Also ist

$$1 \pm \frac{m_{,}}{m} = \frac{(1\pm k)(1\pm m)}{1+mk}.$$

Der absolute Werth von n ist bekanntlich kleiner als k, und folglich der absolute Werth von $m < 1$. Ist nun zuerst $\frac{m_{,}}{m}$ positiv, so hat man

$$1 - \frac{m_{,}}{m} = \frac{(1-k)(1-m)}{1+mk},$$

also offenbar $1 - \frac{m_{,}}{m}$ positiv, und folglich der absolute Werth von $\frac{m_{,}}{m} < 1$. Ist $\frac{m_{,}}{m}$ negativ, so hat man

$$1 + \frac{m_{,}}{m} = \frac{(1+k)(1+m)}{1+mk},$$

also offenbar der absolute Werth von $\frac{m_{,}}{m}$ wieder < 1, da $1 + \frac{m_{,}}{m}$ augenscheinlich positiv ist, indem man nur immer gehörig vor Augen behält, daß auch $k < 1$ ist. Es ist also immer rücksichtlich der absoluten Werthe $m_{,} < m$, und die absoluten Werthe von m, $m_{,}$, $m_{,,}$, $m_{,,,}$, ... bilden folglich eine abnehmende Reihe, so daß also, da der absolute Werth von $m < 1$ ist, jeder dieser Werthe < 1 ist. Nun können nach (32.) k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ..., wenn man sich nur weit genug vom

Anfange dieser Reihe entfernt, der Null beliebig nahe gebracht werden, und dies gilt also nach dem Vorhergehenden um so mehr von den absoluten Werthen der Größen mk, $m_{,}k_{,}$, $m_{,,}k_{,,}$, $m_{,,,}k_{,,,}$, ..., d. i. von den absoluten Werthen der Größen n, $n_{,}$, $n_{,,}$, $n_{,,,}$, ..., so daß folglich diese Reihe auch immer stärker convergirt wie die Reihe k, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$, ... Setzt man also $k_{(\mu)} = 0$, so ist um so mehr $n_{(\mu)} = 0$ zu setzen.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{k^2 + 2n + n^2}{(1+n)^2(1+k')^2} = \frac{(1+n)^2 - k'^2}{(1+n)^2(1+k')^2},$$

$$\lambda_{,} = \frac{k_{,}^2 + 2n_{,} + n_{,}^2}{(1+n_{,})^2(1+k'_{,})^2} = \frac{(1+n_{,})^2 - k'^2_{,}}{(1+n_{,})^2(1+k'_{,})^2},$$

$$\lambda_{,,} = \frac{k_{,,}^2 + 2n_{,,} + n_{,,}^2}{(1+n_{,,})^2(1+k'_{,,})^2} = \frac{(1+n_{,,})^2 - k'^2_{,,}}{(1+n_{,,})^2(1+k'_{,,})^2},$$

u. s. f. u. s. f.

so ist

$$b_{,} = \tfrac{1}{4}\lambda b,\ b_{,,} = \tfrac{1}{4}\lambda\lambda_{,} b,\ b_{,,,} = \tfrac{1}{4}\lambda\lambda_{,}\lambda_{,,} b, \ldots.$$

Ist nun, wie man offenbar anzunehmen berechtigt ist (s. 33. bei einem ganz ähnlichen Falle), der absolute Werth von b nicht größer als die Einheit, so ist für den beabsichtigten Grad der Näherung, da für denselben nach der Voraussetzung $k_{(\mu)} = n_{(\mu)} = 0$ ist, augenscheinlich auch $b_{(\mu+1)} = 0$ zu setzen. Endlich ist auch für diesen Grad der Näherung

$$a_{(\mu)} = a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} + \frac{\frac{1}{2}b_{,}}{1+n_{,}} + \frac{\frac{1}{2}b_{,,}}{1+n_{,,}} + \frac{\frac{1}{2}b_{,,,}}{1+n_{,,,}} + \ldots.,$$

diese Reihe einschließlich bis zu dem $b_{(\mu)}$ enthaltenden Gliede fortgesetzt, oder auch

$$a_{(\mu)} = a + \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} + \frac{\frac{1}{2}\lambda b}{1+n_{,}} + \frac{\frac{1}{2}\lambda\lambda_{,} b}{1+n_{,,}} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{\frac{1}{2^{\mu+1}}\lambda\lambda_{,}\lambda_{,,}\ldots\lambda_{(\mu-1)} b}{1+n_{(\mu)}}.$$

Mittelst des Obigen ergiebt sich aber, immer unter der Voraussetzung, daß $k_{(\mu)} = 0$ ist, auf der Stelle

$$\Gamma_{(\mu)} = a_{(\mu)}\,\varphi_{(\mu)},$$

oder, wenn Ω wieder dieselbe Bedeutung wie in (32.) und (33.) hat,

$$\Gamma_{(\mu)} = 2^{\mu} a_{(\mu)}\,\Omega.$$

Also ist, wenn wir wieder der Kürze wegen

$$(1+k_{,})(1+k_{,,})(1+k_{,,,})(1+k_{IV})\ldots. = K$$

setzen, wie leicht erhellen wird:

$$\Gamma = a_{(\mu)} K \Omega$$

$$- \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} \int_0^{\varphi_{,}} \frac{\cos\varphi_{,}\,\partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{\,2}}$$

$$- \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda_{,}b}{1+n_{,}} \int_0^{\varphi_{,,}} \frac{\cos\varphi_{,,}\,\partial\varphi_{,,}}{1+n_{,,}\sin\varphi_{,,}^{\,2}}$$

$$- \frac{1+k_{,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,}}{2} \cdot \frac{1+k_{,,,}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8}\lambda_{,}\lambda_{,,}b}{1+n_{,,,}} \int_0^{\varphi_{,,,}} \frac{\cos\varphi_{,,,}\,\partial\varphi_{,,,}}{1+n_{,,,}\sin\varphi_{,,,}^{\,2}}$$

— . . . . . .

oder, weil

$$1 + k_{,} = \frac{2\sqrt{k_{,}}}{k}, \quad 1+k_{,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}}, \quad 1+k_{,,,} = \frac{2\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}}, \ldots.$$

ist:

$$\Gamma = a_{(\mu)} K \Omega$$

$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} \int_0^{\varphi_{,}} \frac{\cos\varphi_{,}\,\partial\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin\varphi_{,}^{\,2}}$$

$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda b}{1+n_{,}} \int_0^{\varphi_{,,}} \frac{\cos\varphi_{,,}\,\partial\varphi_{,,}}{1+n_{,,}\sin\varphi_{,,}^{\,2}}$$

$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}} \cdot \frac{\frac{1}{8}\lambda_{,}\lambda_{,,}b}{1+n_{,,}} \int_0^{\varphi_{,,,}} \frac{\cos\varphi_{,,,}\,\partial\varphi_{,,,}}{1+n_{,,,}\sin\varphi_{,,,}^{\,2}}$$

— . . . . . .

Setzt man nun überhaupt

$$\sqrt{n}.\sin\varphi = x; \quad \sqrt{n}.\cos\varphi\,\partial\varphi = \partial x;$$

so ist

$$\frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{1+n\sin\varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\partial x}{1+x^2};$$

folglich, wenn man integrirt, nach einer sehr bekannten Formel:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{1+n\sin\varphi^2} = \frac{\text{Arc tang}\,(\sqrt{n}.\sin\varphi)}{\sqrt{n}};$$

also

$$\Gamma = a_{(\mu)} K \Omega$$

$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\frac{1}{2}b}{1+n} \cdot \frac{\text{Arc tang}\,(\sqrt{n_{,}}.\sin\varphi_{,})}{\sqrt{n_{,}}}$$

$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\frac{1}{4}\lambda b}{1+n_{,}} \cdot \frac{\text{Arc tang}\,(\sqrt{n_{,,}}.\sin\varphi_{,,})}{\sqrt{n_{,,}}}$$

$$- \frac{\sqrt{k_{,}}}{k} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,}}}{k_{,}} \cdot \frac{\sqrt{k_{,,,}}}{k_{,,}} \cdot \frac{\frac{1}{8}\lambda_{,}\lambda_{,,}b}{1+n_{,,}} \cdot \frac{\text{Arc tang}\,(\sqrt{n_{,,,}}.\sin\varphi_{,,,})}{\sqrt{n_{,,,}}}$$

— . . . . . .

Wie man sich zu verhalten hat, wenn die nach der hier befolgten Methode genommenen Integrale imaginär werden, erhellet

aus (24.). Die Kreisbogen werden dann, wie immer in ähnlichen Fällen, in natürliche Logarithmen verwandelt.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird

$$\Gamma = \tfrac{1}{2}\pi\, a(\mu) K \text{ (s. 32. 33.)}$$

Daß man hier auch eine ähnliche Näherungsmethode, wie die in (34.) gezeigte, anwenden könnte, erhellet leicht. Wir müssen indeß der Kürze wegen in dieser Beziehung auf Legendre's Traité des fonctions elliptiques. T. I. Chap. XXII. verweisen.

XVII. Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen.

37. Wir beginnen mit der Entwickelung von $(\Delta(\varphi))^{-1}$ in eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - 6A_3 \cos 6\varphi + \ldots,$$

auf welche, wie wir sehen werden, alles Uebrige zurückkommt. Um die constanten Coefficienten der vorstehenden Gleichung gemäß zu bestimmen, setze man

$$\Theta = \frac{1 - k'}{1 + k'},$$

so ist

$$k' = \frac{1-\Theta}{1+\Theta},\quad k^2 = 1 - k'^2 = 1 - \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta}\right)^2;$$

also

$$(\Delta(\varphi))^2 = 1 - k^2 \sin\varphi^2 = \frac{(1+\Theta)^2 \cos\varphi^2 + (1-\Theta)^2 \sin\varphi^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\Theta(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) + \Theta^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\Theta\cos 2\varphi + \Theta^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{1 + \Theta\left(e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\right) + \Theta^2}{(1+\Theta)^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \Theta e^{2\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 + \Theta e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\right)}{(1+\Theta)^2},$$

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = (1+\Theta)\left(1 + \Theta e^{2\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \Theta e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+\Theta)\left\{1 - \tfrac{1}{2}\Theta e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\Theta^2 e^{4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^3 e^{6\varphi\sqrt{-1}} + \ldots\right\}$$

$$\times\left\{1 - \tfrac{1}{2}\Theta e^{-2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3.}{2.4.}\Theta^2 e^{-4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\Theta^3 e^{-6\varphi\sqrt{-1}} + \ldots\right\}.$$

Multiplicirt man nun diese beiden Reihen wirklich in einander, so ergiebt sich sehr leicht

$$A=(1+\Theta)\left\{1+(\tfrac{1}{2})^2\Theta^2+\left(\frac{1.3}{2.4.}\right)^2\Theta^4+\left(\frac{1.3.5.}{2.4.6.}\right)^2\Theta^6+\ldots\right\},$$

$$A_1=\frac{1+\Theta}{1}\left\{\tfrac{1}{2}\Theta+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\Theta^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^5+\ldots.\right\},$$

$$A_2=\frac{1+\Theta}{2}\left\{\frac{1.3}{2.4}\Theta^2+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^4+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Theta^6+\ldots\right\},$$

$$A_3=\frac{1+\Theta}{3}\left\{\frac{1.3.5}{2.4.6}\Theta^3+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Theta^5+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9.}{2.4.6.8.10}\Theta^7+\ldots\right\},$$

$$A_4=\frac{1+\Theta}{4}\left\{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Theta^4+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3..9}{2.4..10}\Theta^6+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3..11}{2.4..12}\Theta^8+\ldots\right\},$$

u. s. f. u. s. f.

und das Fortschreitungsgesetz dieser Reihen ist leicht zu übersehen. Je kleiner Θ ist, desto brauchbarer sind dieselben zur Berechnung der Coefficienten. Für $\Theta=\frac{1}{2}$ ist

$$k'=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{3},\quad k=\sqrt{1-k'^2}=\tfrac{2}{3}\sqrt{2}=0{,}9428\,.$$

So lange also der Werth von k diese Gränze nicht übersteigt, wird man sich der obigen Reihe mit Vortheil bedienen. Wenn aber $k>0{,}9428$ ist, wird $\Theta>\frac{1}{2}$, die obigen Reihen convergiren nur wenig, und man wird dann besser auf folgende Art verfahren.

38. Zuerst kommt es darauf an, die beiden ersten Coefficienten A und A_1 genau zu finden, wozu man auf folgende Art gelangt. Aus der zum Grunde gelegten Gleichung in (37.) folgt durch Multiplication mit $\partial\varphi$ und $\cos 2\varphi\,\partial\varphi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=A\partial\varphi-2A_1\cos 2\varphi\,\partial\varphi+4A_2\cos 4\varphi\,\partial\varphi-\ldots\ldots,$$

$$\frac{\cos 2\varphi\,\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=A\cos 2\varphi\partial\varphi-2A_1\cos 2\varphi\cos 2\varphi\,\partial\varphi+4A_2\cos 4\varphi\cos 2\varphi\partial\varphi-\ldots;$$

und folglich, wenn man zunächst die erste Gleichung integrirt:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=A\varphi-A_1\sin 2\varphi+A_2\sin 4\varphi-A_3\sin 6\varphi+\ldots.;$$

also

$$\tfrac{1}{2}A\pi=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}=F\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad A=\frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ferner ist allgemein

$$\cos 2n\varphi\cos 2\varphi=\frac{\cos 2(n+1)\varphi+\cos 2(n-1)\varphi}{2},$$

$$\int\cos 2n\varphi\cos 2\varphi\,\partial\varphi=\frac{1}{4(n+1)}\sin 2(n+1)\varphi+\frac{1}{4(n-1)}\sin 2(n-1)\varphi,$$

und folglich, wenn n nicht $= 1$ ist, da in diesem Falle $\frac{1}{4(n-1)}$ unendlich wird,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n\varphi \cos 2\varphi \, \partial\varphi = 0 .$$

Für $n = 1$ ist

$$\cos 2\varphi \cos 2\varphi = \frac{\cos 4\varphi + 1}{2} ,$$

$$\int \cos 2\varphi \cos 2\varphi \, \partial\varphi = \tfrac{1}{8}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi ,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\varphi \cos 2\varphi \, \partial\varphi = \tfrac{1}{4}\pi .$$

Auch ist

$$\int \cos 2\varphi \, \partial\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi , \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\varphi \, \partial\varphi = 0 .$$

Folglich nach dem Obigen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi \, \partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\tfrac{1}{2}A_1\pi , \quad A_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi \, \partial\varphi}{\Delta(\varphi)} .$$

Aber

$$\frac{\sin\varphi^2}{\Delta(\varphi)} = \frac{k^2 \sin\varphi^2}{k^2\Delta(\varphi)} = \frac{1-(1-k^2\sin\varphi^2)}{k^2\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{\Delta(\varphi)} - \Delta(\varphi)\right\} ,$$

$$\frac{\cos\varphi^2}{\Delta(\varphi)} = \frac{k^2\cos\varphi^2}{k^2\Delta(\varphi)} = \frac{k^2-k^2\sin\varphi^2}{k^2\Delta(\varphi)} = \frac{1-k^2\sin\varphi^2-(1-k^2)}{k^2\Delta(\varphi)}$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{\Delta(\varphi) - \frac{k'^2}{\Delta(\varphi)}\right\} ;$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi^2 \, \partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi)\partial\varphi\right\} = \frac{1}{k^2}\{F(\varphi) - E(\varphi)\},$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi^2 \, \partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{\varphi} \Delta(\varphi)\partial\varphi - k'^2\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)}\right\} = \frac{1}{k^2}\{E(\varphi) - k'^2 F(\varphi)\};$$

also, da $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$ ist:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos 2\varphi \, \partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{1}{k^2}\left\{2E(\varphi) - (1+k'^2)F(\varphi)\right\}$$

$$= \frac{2}{k^2}\{E(\varphi) - F(\varphi)\} + F(\varphi) .$$

Folglich nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}A_1\pi = \frac{2}{k^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

so daß also sowohl A, als auch A_1, durch vollständige elliptische Functionen der ersten und zweiten Art ausgedrückt werden kann. Nach (32.) und (33.) ist nun

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi K , \quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi KL$$

für

$$K = \sqrt{\frac{k'_{,} k'_{,,} k'_{,,,} k'_{IV} \ldots}{k'}};$$

$$L = 1 - \frac{k^2}{2} - \frac{k^2 k_{,}}{4} - \frac{k^2 k_{,} k_{,,}}{8} - \ldots;$$

also nach dem Obigen

$$A = K = \sqrt{\frac{k'_{,} k'_{,,} k'_{,,,} k'_{IV} \ldots}{k'}},$$

$$A_1 = \frac{2}{k^2} K(1-L) - K = A\left\{\frac{2(1-L)}{k^2} - 1\right\},$$

d. i.

$$A_1 = A\left\{\frac{k_{,}}{2} + \frac{k_{,} k_{,,}}{4} + \frac{k_{,} k_{,,} k_{,,,}}{8} + \ldots\right\}.$$

Wäre k nahe der Einheit gleich, so könnte man sich auch zur Berechnung von A und A_1 der Näherungsmethode in (34.) bedienen.

Hat man auf diese Weise A und A_1, so können die übrigen Coefficienten auf folgende Art gefunden werden. Differentiirt man die Gleichung

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - 6A_3 \cos 6\varphi + \ldots,$$

so erhält man:

$$\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(\Delta(\varphi))^3} = 4A_1 \sin 2\varphi - 16A_2 \sin 4\varphi + 36A_3 \sin 6\varphi - \ldots,$$

und, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit

$$\frac{2(\Delta(\varphi))^2}{k^2} = \frac{2(1 - k^2 \sin\varphi^2)}{k^2} = \frac{2}{k^2} - 2\sin\varphi^2$$

$$= \frac{2}{k^2} - 1 + (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = \frac{2}{k^2} - 1 + \cos 2\varphi$$

multiplicirt, da $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$ ist:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\varphi}{\Delta(\varphi)} = &\left\{4A_1\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 8A_2\right\}\sin 2\varphi \\ &- \left\{16A_2\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 18A_3 - 2A_1\right\}\sin 4\varphi \\ &+ \left\{36A_3\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 32A_4 - 8A_2\right\}\sin 6\varphi \\ &- \left\{64A_4\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 50A_5 - 18A_3\right\}\sin 8\varphi \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ferner ergiebt sich aus der zum Grunde gelegten Gleichung, wenn man dieselbe mit $\sin 2\varphi$ multiplicirt und die Producte der Sinus und Cosinus wieder auf gewöhnliche Weise als Aggregate zweier Sinus darstellt:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\Delta(\varphi)} = (A - 2A_2)\sin 2\varphi - (A_1 - 3A_3)\sin 4\varphi + (2A_2 - 4A_4)\sin 6\varphi - (3A_3 - 5A_5)\sin 8\varphi + \ldots\ldots\ldots,$$

und durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von $\frac{\sin 2\varphi}{\Delta(\varphi)}$ erhält man:

$$2.\ 3A_2 = 4A_1\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - A,$$

$$3.\ 5A_3 = 16A_2\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 1.3A_1,$$

$$4.\ 7A_4 = 36A_3\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 2.5A_2,$$

$$5.\ 9A_5 = 64A_4\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 3.7A_3,$$

$$6.\ 11A_6 = 100A_5\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - 4.9A_4,$$

u. s. f. u. s. f.

mittelst welcher Gleichungen also alle Coefficienten gefunden werden können, da man A und A_1 nach dem Obigen schon kennt.

39. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = A\,\partial\varphi - 2A_1\cos 2\varphi\,\partial\varphi + 4A_2\cos 4\varphi\,\partial\varphi - 6A_3\cos 6\varphi\,\partial\varphi + \ldots,$$

in welcher A, A_1, A_2, A_3, ... bekannt sind, folgt nun auf der Stelle, wenn man zwischen den Gränzen 0, φ integrirt:

$$F(\varphi) = A\varphi - A_1\sin 2\varphi + A_2\sin 4\varphi - A_3\sin 6\varphi + \ldots.,$$

wodurch also die Entwickelung der elliptischen Functionen der ersten Art gefunden ist.

Ferner setze man

$$E(\varphi) = B\varphi + B_1\sin 2\varphi - B_2\sin 4\varphi + B_3\sin 6\varphi - \ldots,$$

und differentiire; so erhält man

$$\Delta(\varphi) = B + 2B_1\cos 2\varphi - 4B_2\cos 4\varphi + 6B_3\cos 6\varphi - \ldots.,$$

und, wenn man zum zweiten Mal differentiirt:

$$\frac{k^2\sin 2\varphi}{2\Delta(\varphi)} = 4B_1\sin 2\varphi - 16B_2\sin 4\varphi + 36B_3\sin 6\varphi - \ldots$$

Aber nach dem Obigen auch

$$\frac{k^2 \sin 2\varphi}{2\Delta(\varphi)} = \tfrac{1}{2}k^2 \sin 2\varphi \{A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - \ldots\}$$

$$= \tfrac{1}{2}k^2(A - 2A_2)\sin 2\varphi$$
$$- \tfrac{1}{2}k^2(A_1 - 3A_3)\sin 4\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{2}k^2(2A_2 - 4A_4)\sin 6\varphi$$
$$- \tfrac{1}{2}k^2(3A_3 - 5A_5)\sin 8\varphi$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und folglich durch Vergleichung beider Reihen:

$$B_1 = \frac{k^2}{8}(A - 2A_2),$$

$$4B_2 = \frac{k^2}{8}(A_1 - 3A_3),$$

$$9B_3 = \frac{k^2}{8}(2A_2 - 4A_4),$$

$$16B_4 = \frac{k^2}{8}(3A_3 - 5A_5),$$

u. s. f. u. s. f.

so daß also auf diese Weise zugleich auch die Entwickelung der elliptischen Functionen der zweiten Art gefunden ist.

40. Was die Entwickelung der elliptischen Functionen der dritten Art betrifft, so setze man

$$\Pi(\varphi) = C\varphi - C_1 \sin 2\varphi + C_2 \sin 4\varphi - C_3 \sin 6\varphi + \ldots.$$

und versuche nun zunächst die Bestimmung der Coefficienten der Reihe

$$(1 + n\sin\varphi^2)^{-1} = a + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi + a_3 \cos 6\varphi + \ldots.$$

Da

$$\sin\varphi^2 = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

ist, so ist, wenn man auf beiden Seiten mit $n + 2 - n\cos 2\varphi$ multiplicirt:

$$2 = (n+2)a - \tfrac{1}{2}na_1$$
$$+ \{(n+2)a_1 - \tfrac{1}{2}na_2 - na\}\cos 2\varphi$$
$$+ \{(n+2)a_2 - \tfrac{1}{2}na_3 - \tfrac{1}{2}na_1\}\cos 4\varphi$$
$$+ \{(n+2)a_3 - \tfrac{1}{2}na_4 - \tfrac{1}{2}na_2\}\cos 6\varphi$$
$$+ \{(n+2)a_4 - \tfrac{1}{2}na_5 - \tfrac{1}{2}na_3\}\cos 8\varphi$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und man hat also folgende Gleichungen zwischen den Coefficienten:

$$(n+2)a - \tfrac{1}{2}na_1 = 2,$$
$$(n+2)a_1 - \tfrac{1}{2}na_2 - na = 0,$$
$$(n+2)a_2 - \tfrac{1}{2}na_3 - \tfrac{1}{2}na_1 = 0,$$
$$(n+2)a_3 - \tfrac{1}{2}na_4 - \tfrac{1}{2}na_2 = 0,$$
$$(n+2)a_4 - \tfrac{1}{2}na_5 - \tfrac{1}{2}na_3 = 0,$$
u. s. f. u. s. f.

Um nun zuerst a zu bestimmen, denke man sich in der Gleichung

$$(1+n\sin\varphi^2)^{-1} = 1 - n\sin\varphi^2 + n^2\sin\varphi^4 - n^3\sin\varphi^6 + n^4\sin\varphi^8 - \ldots$$

für die Potenzen der Sinus ihre bekannten goniometrischen Ausdrücke durch die Cosinus der vielfachen Winkel gesetzt, so erhält man das von φ unabhängige Glied leicht

$$= 1 - \tfrac{1}{2}n + \frac{1.3}{2.4}n^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}n^3 + \ldots,$$

d. i. nach dem binomischen Lehrsatze

$$a = (1+n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}na_1 = \frac{n+2}{\sqrt{1+n}} - 2 = \frac{1+n-2\sqrt{1+n}+1}{\sqrt{1+n}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+n}-1)^2}{\sqrt{1+n}},$$

und folglich, weil

$$n = (\sqrt{1+n}+1)(\sqrt{1+n}-1)$$

ist:

$$a_1 = 2\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}.(\sqrt{1+n}+1)},$$

oder, wenn wir

$$\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = \Theta$$

setzen:

$$a_1 = 2a\Theta.$$

Hieraus ergiebt sich ferner

$$na_2 = 2a\{2(n+2)\Theta - n\},$$

Aber, wie leicht erhellet,

$$n = \Theta(\sqrt{1+n}+1)^2.$$

Folglich

$$na_2 = 2a\Theta\{2(n+2) - (\sqrt{1+n}+1)^2\}$$

$$= 2a\Theta(\sqrt{1+n}-1)^2,$$

und, weil

$$n = (\sqrt{1+n}+1)(\sqrt{1+n}-1)$$

ist:

$$a_2 = 2a\Theta\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = 2a\Theta^2.$$

Hieraus folgt mittelst der obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} n a_3 &= 2a\Theta\{2(n+2)\Theta - n\} \\ &= 2a\Theta^2\{2(n+2) - (\sqrt{1+n}+1)^2\} \\ &= 2a\Theta^2(\sqrt{1+n}-1)^2 , \end{aligned}$$

und wenn man wieder

$$n = (\sqrt{1+n}+1)(\sqrt{1+n}-1)$$

setzt:

$$a_3 = 2a\Theta^2\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = 2a\Theta^3 .$$

Auf ganz ähnliche Weise ist ferner

$$\begin{aligned} n a_4 &= 2a\Theta^2\{2(n+2)\Theta - n\} \\ &= 2a\Theta^3\{2(n+2) - (\sqrt{1+n}+1)^2\} \\ &= 2a\Theta^3(\sqrt{1+n}-1)^2 , \end{aligned}$$

$$a_4 = 2a\Theta^3\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1} = 2a\Theta^4 .$$

Wie man so weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich, für

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+n}}, \quad \Theta = \frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1},$$

immer

$$\frac{1}{1+n\sin\varphi^2} = a + 2a\Theta\cos 2\varphi + 2a\Theta^2\cos 4\varphi + 2a\Theta^3\cos 6\varphi + 2a\Theta^4\cos 8\varphi + \ldots ,$$

$$\frac{\sqrt{1+n}}{1+n\sin\varphi^2} = 1 + 2\Theta\cos 2\varphi + 2\Theta^2\cos 4\varphi + 2\Theta^3\cos 6\varphi + \ldots$$

Aber

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = A - 2A_1\cos 2\varphi + 4A_2\cos 4\varphi - 6A_3\cos 6\varphi + \ldots$$

Multiplicirt man nun diese Reihe mit der vorhergehenden, so ist das Product, wenn man nur jedem Gliede noch den Factor $\partial\varphi$ beifügt, und der Kürze wegen $\sqrt{1+n} = \alpha$ setzt,

$$= \frac{\alpha\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta(\varphi)} = \alpha\partial\Pi(\varphi)$$

$$= \alpha\{C\partial\varphi - 2C_1\cos 2\varphi\,\partial\varphi + 4C_2\cos 4\varphi\,\partial\varphi - 6C_3\cos 6\varphi\,\partial\varphi + \ldots\} .$$

Verwandelt man nun die Producte der Cosinus nach bekannten goniometrischen Formeln in Aggregate und vergleicht die beiden Reihen mit einander, so erhält man zur Bestimmung von C, C_1, C_2, C_3, ... folgende Gleichungen:

$$\alpha C = A - 2\Theta A_1 + 4\Theta^2 A_2 - 6\Theta^3 A_3 + 8\Theta^4 A_4 - \ldots ,$$

$$-2\alpha C_1 = \begin{cases} \Theta(\alpha C + A) \\ -2A_1 + 4\Theta A_2 - 6\Theta^2 A_3 + 8\Theta^3 A_4 - \ldots \end{cases}$$

$$4\alpha C_2 = \begin{cases} \Theta^2(\alpha C + A) - 2\Theta A_1 \\ +4A_2 - 6\Theta A_3 + 8\Theta^2 A_4 - 10\Theta^3 A_5 + \ldots . \end{cases}$$

$$-6\alpha C_3 = \begin{cases} \Theta^3(\alpha C + A) - 2\Theta^2 A_1 + 4\Theta A_2 \\ -6A_3 + 8\Theta A_4 - 10\Theta^2 A_5 + 12\Theta^3 A_6 - \dots \end{cases}$$

$$8\alpha C_4 = \begin{cases} \Theta^4(\alpha C + A) - 2\Theta^3 A_1 + 4\Theta^2 A_2 - 6\Theta A_3 \\ +8A_4 - 10\Theta A_5 + 12\Theta^2 A_6 - 14\Theta^3 A_7 + \dots \end{cases}$$

u. s. f. u. s. f.

und diese Ausdrücke, deren Gesetz leicht zu übersehen ist, gestatten, weil Θ immer ein ächter Bruch ist, eine bequeme Berechnung der Coefficienten C, C_1, C_2, C_3, ... bei den elliptischen Functionen der dritten Art.

XVIII. Erstes Theorem von Jacobi über die elliptischen Functionen der ersten Art.

41. Die von dem berühmten, indem ich dieses schreibe, jüngst verstorbenen Legendre seit einer langen Reihe von Jahren mit der größten Liebe und Ausdauer gepflegte Theorie der elliptischen Functionen ist in neuester Zeit durch zwei jüngere Mathematiker: C. G. J. Jacobi in Königsberg und den in diesen Zusätzen schon mehrmals genannten Abel, mit mehreren überaus merkwürdigen Entdeckungen, von denen jetzt das Wichtigste, so weit es hier der Raum gestattet, mitgetheilt werden soll, bereichert worden. Nach (8.) lassen sich die elliptischen Functionen der ersten Art unter folgender Form darstellen:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \int_0^{x} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \xi;$$

wo $x = \sin\varphi$ ist, und bekanntlich φ die Amplitude von $\xi = F(k, \varphi)$ genannt wird. Setzen wir daher mit Jacobi $\varphi = \text{am}.\xi$, oder, wie hier der Kürze wegen geschehen soll, mit Legendre $\varphi = A\xi$, so ist $x = \sin\text{am}\xi$ oder $x = \sin A\xi$. Setzen wir ferner im Folgenden immer

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \int_0^{1} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K,$$

so soll $K - \xi = \xi'$ das Complement von ξ genannt werden. Ist aber die elliptische Function $F(k, \varphi') = K - \xi$, so soll φ', welches $= A(K-\xi)$ ist, die Coamplitudo von ξ genannt, und nach Jacobi durch coam.ξ, oder hier nach Legendre durch $CA\xi$ bezeichnet werden, so daß also immer $A(K-\xi) = CA\xi$, $A\xi = CA(K-\xi)$ ist. k', für welches immer

$$k^2 + k'^2 = 1$$

ist, heißt das Complement des Modulus k.

42. Sey jetzt

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \sigma),\ F(k, \varphi) - F(k, \psi) = F(k, \Theta);$$

so ist nach (16.)

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi) + \cos\varphi\sin\psi\,\Delta(k,\varphi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\sin\Theta = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi) - \cos\varphi\sin\psi\,\Delta(k,\varphi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

folglich

$$\sin\sigma + \sin\Theta = \frac{2\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\sin\sigma\sin\Theta = \frac{\sin\varphi^2 - \sin\psi^2}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

also, weil

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta) = 1\pm(\sin\sigma+\sin\Theta)+\sin\sigma\sin\Theta$$

ist:

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta) = \frac{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2+\sin\varphi^2-\sin\psi^2\pm 2\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(k,\psi)}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}.$$

Setzen wir nun

$$F(k,\psi)+F(k,\psi') = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = K;$$

so ist nach (18.)

$$\sin\psi = \frac{\cos\psi'}{\Delta(k,\psi')},\quad \cos\psi = \frac{k'\sin\psi'}{\Delta(k,\psi)},\quad \Delta(k,\psi)\Delta(k,\psi') = k',$$

$$k'\operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\psi' = 1;$$

folglich, wenn man diese Werthe von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ in den Zähler des für

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta)$$

gefundenen Ausdrucks einführt, der Zähler des Bruchs, nachdem derselbe im Zähler und im Nenner mit $\Delta^2(k,\psi') = (\Delta(k,\psi'))^2$ multiplicirt worden,

$$\begin{aligned}
&= (1+\sin\varphi^2)(1-k^2\sin\psi'^2) - (1+k^2\sin\varphi^2)\cos\psi'^2 \\
&\quad \pm 2k'\sin\varphi\sin\psi'\Delta(k,\psi)\Delta(k,\psi') \\
&= 1+\sin\varphi^2 - k^2\sin\psi'^2 - k^2\sin\varphi^2\sin\psi'^2 \\
&\quad - \cos\psi'^2 - k^2\sin\varphi^2\cos\psi'^2 \pm 2k'^2\sin\varphi\sin\psi' \\
&= \sin\psi'^2+\sin\varphi^2 - k^2\sin\psi'^2 - k^2\sin\varphi^2 \pm 2k'^2\sin\varphi\sin\psi' \\
&= (1-k^2)\sin\psi'^2 + (1-k^2)\sin\varphi^2 \pm 2k'^2\sin\varphi\sin\psi' \\
&= k'^2(\sin\psi' \pm \sin\varphi)^2;
\end{aligned}$$

also

$$(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta) = \frac{k'^2(\sin\psi'\pm\sin\varphi)^2}{(1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2)\Delta^2(k,\psi')},$$

$$\frac{(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta)}{\cos\psi^2} = \frac{k'^2(\sin\psi'\pm\sin\varphi)^2}{(1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2)\cos\psi^2\Delta^2(k,\psi')}$$

$$= \frac{k'^2(\sin\psi'\pm\sin\varphi)^2}{k'^2(1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2)\sin\psi'^2},$$

d. i.

$$\frac{(1\pm\sin\sigma)(1\pm\sin\Theta)}{\cos\psi^2} = \frac{\left\{1\pm\frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'}\right\}^2}{1-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}.$$

Setzen wir nun

$$F(k,\varphi)=\xi,\ F(k,\psi)=\frac{p-m}{p}K,$$

so ist

$$\varphi = A\xi,\ \psi = A\left(\frac{p-m}{p}K\right).$$

Aber

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=F(k,\sigma),\ F(k,\varphi)-F(k,\psi)=F(k,\Theta);$$

also

$$F(k,\sigma)=\xi+\frac{p-m}{p}K,\ F(k,\Theta)=\xi-\frac{p-m}{p}K;$$

$$\sigma = A\left(\xi+\frac{p-m}{p}K\right),\ \Theta = A\left(\xi-\frac{p-m}{p}K\right).$$

Ferner ist

$$F(k,\psi)+F(k,\psi')=\frac{p-m}{p}K+F(k,\psi')=K;$$

also

$$F(k,\psi')=\frac{m}{p}K,\ \psi'=A\left(\frac{m}{p}K\right),$$

so wie offenbar auch

$$\psi = CA\left(\frac{m}{p}K\right),\ \psi'=CA\left(\frac{p-m}{p}K\right)$$

ist. Setzen wir nun wieder $\sin\varphi = x$ und der Kürze wegen

$$\frac{p-m}{p}K=\lambda_m;$$

so wird unsere obige Gleichung:

$$\frac{\left\{1\pm\frac{x}{\sin CA\lambda_m}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 A\lambda_m} = \frac{\{1\pm\sin A(\xi+\lambda_m)\}\{1\pm\sin A(\xi-\lambda_m)\}}{\cos^2 A\lambda_m},$$

oder

$$\frac{\left\{1\pm\frac{x}{\sin A\left(\frac{m}{p}K\right)}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 CA\left(\frac{m}{p}K\right)} = \frac{\{1\pm\sin A(\xi+\lambda_m)\}\{1\pm\sin A(\xi-\lambda_m)\}}{\cos^2 CA\left(\frac{m}{p}K\right)}.$$

43. Bevor wir von dieser merkwürdigen Gleichung, welche den folgenden Untersuchungen vorzüglich zum Grunde liegt, wei-

tere Anwendung machen, müssen wir noch Folgendes einschalten. Ist nämlich

$$F(k, \varphi) \pm F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = F(k, \varphi) \pm K = F(k, \psi),$$

so ist nach (16.)

$$\sin\psi = \pm \frac{\cos\varphi}{\Delta(k, \varphi)}, \quad \cos\psi = \mp \frac{k' \sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)}, \quad \Delta(k, \psi) = \frac{k}{\Delta(k, \varphi)},$$

und, wenn

$$F(k, \psi) \pm F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = F(k, \psi) \pm K = F(k, \psi')$$

gesetzt wird:

$$\sin\psi' = \pm \frac{\cos\psi}{\Delta(k, \psi)}, \quad \cos\psi' = \mp \frac{k' \sin\psi}{\Delta(k, \psi)}, \quad \Delta(k, \psi') = \frac{k'}{\Delta(k, \psi)};$$

also

$$\sin\psi' = -\frac{k' \sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)} \cdot \frac{\Delta(k, \varphi)}{k'} = -\sin\varphi,$$

so daß folglich, wenn

$$F(k, \varphi) \pm 2K = F(k, \psi')$$

ist, immer $\sin\psi' = -\sin\varphi$ ist. Setzen wir nun

$$F(k, \varphi) = \xi, \quad \varphi = A\xi,$$

so ist

$$F(k, \psi') = \xi \pm 2K, \quad \psi' = A(\xi \pm 2K),$$

und es ist folglich immer

$$\sin A\xi = -\sin A(\xi \pm 2K);$$

also durch wiederholte Anwendung dieser Relation

$$\sin A\xi = -\sin A(\xi \pm 2K) = \sin A(\xi \pm 4K)$$
$$= -\sin A(\xi \pm 6K) = \sin A(\xi \pm 8K) = \ldots.$$

44. Betrachten wir nun, unter der Voraussetzung, daß p eine beliebige ungerade Zahl ist, das Product der Factoren

$$1 \mp \sin A\xi = 1 \mp x,$$

$$\frac{\left\{1 - \frac{x}{\sin A\left(\frac{1}{p}K\right)}\right\}^2}{1 - k^2 x^2 \sin^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right)},$$

$$\frac{\left\{1 + \frac{x}{\sin A\left(\frac{3}{p}K\right)}\right\}^2}{1 - k^2 x^2 \sin^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right)},$$

$$\frac{\left\{1-\frac{x}{\sin A\left(\frac{5}{p}K\right)}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right)},$$

. . . . . .

$$\frac{\left\{1\pm\frac{x}{\sin A\left(\frac{p-2}{p}K\right)}\right\}^2}{1-k^2x^2\sin^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)},$$

welches wir im Folgenden immer $= 1 - y$ setzen wollen; so ergiebt sich aus (42.) auf der Stelle, daß dieses Product dem Producte der Größen

$$1 \mp \sin A\xi;$$

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{2}{p}K\right),\quad 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{2}{p}K\right);$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),\quad 1 \mp \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right);$$

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{6}{p}K\right),\quad 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{6}{p}K\right);$$

. . . . . .

$$1 + \sin A\left(\xi + \frac{p-3}{p}K\right),\quad 1 + \sin A\left(\xi - \frac{p-3}{p}K\right);$$

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{p-1}{p}K\right),\quad 1 - \sin A\left(\xi - \frac{p-1}{p}K\right)$$

gleich ist, wenn man dieses Product durch das Product

$$Q = \cos^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right).\cos^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right).\cos^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right)..;$$

$$\cos^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)$$

dividirt. Die obern und untern Zeichen gelten, jenachdem p von der Form $4n + 1$ oder $4n - 1$ ist.

Ist nun zuerst p von der Form $4n + 1$, so kann man die Factoren des ersten Products, ohne Rücksicht auf den Factor $1 \mp \sin A\xi$, immer in folgender Ordnung nehmen, indem man dieselben zugleich theilweise nach dem in (43.) bewiesenen Satze umformt:

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right)$$

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi+\frac{12}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{12}{p}K\right)$$

. . . . . .

$$1-\sin A\left(\xi+\frac{p-1}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi-\frac{p-3}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{p+3}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(n+1)}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi-\frac{p-7}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{p+7}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(n+2)}{p}K\right)$$

. . . . . .

$$1+\sin A\left(\xi-\frac{2}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{2p-2}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4.2n}{p}K\right)$$

. . . . . .

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{2}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{2p+2}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(2n+1)}{p}K\right)$$

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{6}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{2p+6}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(2n+2)}{p}K\right)$$

. . . . . .

$$1+\sin A\left(\xi+\frac{p-3}{p}K\right)=1+\sin A\left(\xi+\frac{3p-3}{p}K-2K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4.3n}{p}K\right)$$

$$1-\sin A\left(\xi-\frac{p-1}{p}K\right)=1-\sin A\left(\xi+\frac{3p+1}{p}K-4K\right)$$

$$=1-\sin A\left(\xi+\frac{4(3n+1)}{p}K\right)$$

$$1 - \sin A\left(\xi - \frac{p-5}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{3p+5}{p}K - 4K\right)$$
$$= 1 - \sin A\left(\xi + \frac{4(3n+2)}{p}K\right)$$
. . . . . .
$$1 - \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{4p-4}{p}K - 4K\right)$$
$$= 1 - \sin A\left(\xi + \frac{4.4n}{p}K\right).$$

Ist $p = 4n - 1$, so sind die Factoren unsers Products:

$$1 + \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right) = 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right)$$
$$1 + \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right) = 1 + \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right)$$
$$1 + \sin A\left(\xi + \frac{12}{p}K\right) = 1 + \sin A\left(\xi + \frac{12}{p}K\right)$$
. . . . . .
$$1 + \sin A\left(\xi + \frac{p-3}{p}K\right) = 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4(n-1)}{p}K\right)$$
$$1 - \sin A\left(\xi - \frac{p-1}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{p+1}{p}K - 2K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)$$
$$1 - \sin A\left(\xi - \frac{p-5}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{p+5}{p}K - 2K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4(n+1)}{p}K\right)$$
. . . . . .
$$1 - \sin A\left(\xi - \frac{2}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{2p-2}{p}K - 2K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4(2n-1)}{p}K\right)$$
$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{2}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{2p+2}{p}K - 2K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4.2n}{p}K\right)$$

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{6}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{2p+6}{p}K - 2K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4(2n+1)}{p}K\right)$$
. . . . . .
$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{p-1}{p}K\right) = 1 - \sin A\left(\xi + \frac{3p-1}{p}K - 2K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4(3n-1)}{p}K\right)$$
$$1 + \sin A\left(\xi - \frac{p-3}{p}K\right) = 1 + \sin A\left(\xi + \frac{3p+3}{p}K - 4K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4.3n}{p}K\right)$$
$$1 + \sin A\left(\xi - \frac{p-7}{p}K\right) = 1 + \sin A\left(\xi + \frac{3p+7}{p}K - 4K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4(3n+1)}{p}K\right)$$
. . . . . .
$$1 + \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right) = 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4p-4}{p}K - 4K\right)$$
$$= 1 + \sin A\left(\xi + \frac{4(4n-2)}{p}K\right).$$

Setzen wir also, p mag von der Form $4n + 1$ oder von der Form $4n - 1$ seyn,

$$P = \left\{1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right)\right\}$$
$$\times \left\{1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right)\right\}$$
$$\times \left\{1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{12}{p}K\right)\right\}$$
. . . . . .
$$\times \left\{1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4(p-1)}{p}K\right)\right\};$$

so ist

$$1 - y = (1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

oder

$$1 - y = (1 \mp x)\frac{P}{Q},$$

wo Q seinen obigen Werth hat, und die obern Zeichen sich im-

mer auf $p = 4n + 1$, die untern auf $p = 4n - 1$ beziehen.

45. Die Function $1 - y$ läßt sich aber noch auf eine andere sehr merkwürdige Form bringen, zu welcher die folgenden Betrachtungen führen.

Setzt man in dem Ausdruck

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

$\xi + \frac{4}{p}K$ statt ξ, so geht, indem Q, welches nicht von ξ abhängt, ungeändert bleibt, jeder Factor von

$$(1 \mp \sin A\xi)P$$

in den nächstfolgenden über, und der letzte Factor wird nach (43.)

$$= 1 \mp \sin A(\xi + 4K) = 1 \mp \sin A\xi,$$

d. i. dem ersten Factor gleich, so daß also die Größe

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

durch die in Rede stehende Substitution nicht geändert wird; und überhaupt schließt man hieraus sehr leicht, daß diese Größe ungeändert bleibt, wenn man, indem m eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, $\xi + \frac{4m}{p}K$ für ξ setzt.

Für $\xi = 0$ ist nach (44.)

$$\begin{aligned} P = & \left\{1 \pm \sin A\left(\tfrac{2}{p}K\right)\right\}\left\{1 \pm \sin A\left(-\tfrac{2}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 \mp \sin A\left(\tfrac{4}{p}K\right)\right\}\left\{1 \mp \sin A\left(-\tfrac{4}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 \pm \sin A\left(\tfrac{6}{p}K\right)\right\}\left\{1 \pm \sin A\left(-\tfrac{6}{p}K\right)\right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times \left\{1 + \sin A\left(\tfrac{p-3}{p}K\right)\right\}\left\{1 + \sin A\left(-\tfrac{p-3}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 - \sin A\left(\tfrac{p-1}{p}K\right)\right\}\left\{1 - \sin A\left(-\tfrac{p-1}{p}K\right)\right\}. \end{aligned}$$

Ist aber allgemein wie oben

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \xi,$$

so ist, wie aus der Theorie der Bestimmten Integrale (s. diesen Artikel. 5.) auf der Stelle folgt:

$$\int_0^{-x} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\xi;$$

also

$$x = \sin A\xi, \quad -x = \sin A(-\xi),$$

und folglich immer

$$\sin A(-\xi) = -\sin A\xi,$$

so daß also nach dem Vorhergehenden für $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} P = & \left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{2}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{4}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{6}{p}K\right)\right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times \left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{p-3}{p}K\right)\right\} \\ & \times \left\{1 - \sin^2 A\left(\frac{p-1}{p}K\right)\right\} \end{aligned}$$

$$= \cos^2 A\left(\frac{2}{p}K\right) . \cos^2 A\left(\frac{4}{p}K\right) . \cos^2 A\left(\frac{6}{p}K\right) .. \cos^2 A\left(\frac{p-1}{p}K\right).$$

Aber

$$\begin{aligned} \frac{2}{p}K + \frac{p-2}{p}K &= K, \\ \frac{4}{p}K + \frac{p-4}{p}K &= K, \\ \frac{6}{p}K + \frac{p-6}{p}K &= K, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{p-3}{p}K + \frac{3}{p}K &= K, \\ \frac{p-1}{p}K + \frac{1}{p}K &= K. \end{aligned}$$

Folglich nach (41.)

$$\begin{aligned} A\left(\frac{2}{p}K\right) &= CA\left(\frac{p-2}{p}K\right) \\ A\left(\frac{4}{p}K\right) &= CA\left(\frac{p-4}{p}K\right) \\ A\left(\frac{6}{p}K\right) &= CA\left(\frac{p-6}{p}K\right) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ A\left(\frac{p-3}{p}K\right) &= CA\left(\frac{3}{p}K\right) \\ A\left(\frac{p-1}{p}K\right) &= CA\left(\frac{1}{p}K\right). \end{aligned}$$

Also

$$P = \cos^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right) . \cos^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right) . \cos^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right) .. \cos^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right),$$

d. i. $P = Q$ (44.). Für $\xi = 0$ ist aber offenbar auch $x = 0$, d. i. $\sin A\xi = 0$, und es ist also

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q} = 1$$

für $\xi = 0$, oder, da diese Größe $= 1 - y$ gesetzt worden ist, $y = 0$ für $\xi = 0$.

Da nun ferner

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q}$$

für jedes ξ ungeändert bleibt, wenn man $\xi + \frac{4m}{p}K$ für ξ setzt, so ist offenbar auch

$$(1 \mp \sin A\xi)\frac{P}{Q} = 1,$$

d. i. $y = 0$, für

$$\xi = \frac{4m}{p}K,$$

wo m jede positive ganze Zahl bezeichnen kann.

x ist immer $= \sin A\xi$, und man sieht also hieraus, daß y für jeden der p folgenden Werthe von x verschwindet:

$$x = 0,\ \sin A\left(\frac{4}{p}K\right),\ \sin A\left(\frac{8}{p}K\right),\ \sin A\left(\frac{12}{p}K\right),\ \ldots \sin A\left(\frac{4(p-1)}{p}K\right).$$

In (44.) haben wir aber gesehen, daß für jedes ξ die Reihe der Größen

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{2}{p}K\right),\ 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{2}{p}K\right);$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),\ 1 \mp \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right);$$

$$1 \pm \sin A\left(\xi + \frac{6}{p}K\right),\ 1 \pm \sin A\left(\xi - \frac{6}{p}K\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 - \sin A\left(\xi + \frac{p-1}{p}K\right),\ 1 - \sin A\left(\xi - \frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei ist mit der Reihe der Größen

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right),$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{12}{p}K\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$1 \mp \sin A\left(\xi + \frac{4(p-1)}{p}K\right);$$

also ist auch für jedes ξ offenbar die Reihe der Größen

$$\pm \sin A\left(\xi + \frac{2}{p}K\right), \pm \sin A\left(\xi - \frac{2}{p}K\right);$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right), \mp \sin A\left(\xi - \frac{4}{p}K\right);$$
$$\pm \sin A\left(\xi + \frac{6}{p}K\right), \pm \sin A\left(\xi - \frac{6}{p}K\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\sin A\left(\xi + \frac{p-1}{p}K\right), -\sin A\left(\xi - \frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei mit der Reihe der Größen

$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{4}{p}K\right),$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{8}{p}K\right),$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{12}{p}K\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp \sin A\left(\xi + \frac{4(p-1)}{p}K\right);$$

folglich für $\xi = 0$ die Reihe der Größen

$$\pm \sin A\left(\frac{2}{p}K\right), \pm \sin A\left(-\frac{2}{p}K\right);$$
$$\mp \sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \mp \sin A\left(-\frac{4}{p}K\right);$$
$$\pm \sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \pm \sin A\left(-\frac{6}{p}K\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right), -\sin A\left(-\frac{p-1}{p}K\right);$$

d. i., weil immer $\sin A(-\xi) = -\sin A\xi$ ist, die Reihe der Größen

$$\pm \sin A\left(\frac{2}{p}K\right), \mp \sin A\left(\frac{2}{p}K\right);$$
$$\mp \sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \pm \sin A\left(\frac{4}{p}K\right);$$
$$\pm \sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \mp \sin A\left(\frac{6}{p}K\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right), \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei mit der Reihe der Größen

$$\mp \sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \mp \sin A\left(\frac{8}{p}K\right), \mp \sin A\left(\frac{12}{p}K\right), \ldots \mp \sin A\left(\frac{4(p-1)}{p}K\right);$$

also offenbar auch immer die Reihe der Größen

$$-\sin A\left(\frac{2}{p}K\right), \sin A\left(\frac{2}{p}K\right);$$
$$-\sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \sin A\left(\frac{4}{p}K\right);$$
$$-\sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \sin A\left(\frac{6}{p}K\right);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right), \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right)$$

einerlei mit der Reihe der Größen

$$\sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \sin A\left(\frac{8}{p}K\right), \sin A\left(\frac{12}{p}K\right), \ldots \sin A\left(\frac{4(p-1)}{p}K\right).$$

Folglich wird auch $y = 0$ für die folgenden p Werthe von x:

$$x = 0, \sin A\left(\frac{2}{p}K\right), \sin A\left(\frac{4}{p}K\right), \sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \ldots \sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right);$$
$$-\sin A\left(\frac{2}{p}K\right), -\sin A\left(\frac{4}{p}K\right), -\sin A\left(\frac{6}{p}K\right), \ldots -\sin A\left(\frac{p-1}{p}K\right).$$

Zugleich fällt auch, weil die Größen

$$0, \frac{2}{p}K, \frac{4}{p}K, \frac{6}{p}K, \frac{8}{p}K, \ldots \frac{p-1}{p}K$$

sämmtlich kleiner als K sind, sogleich in die Augen, daß die vorstehenden p Werthe von x sämmtlich unter einander ungleich sind, indem keine Amplitude in diesem Falle $\frac{1}{2}\pi$ übersteigt.

Setzen wir nun

$$1 - y = \frac{Z}{V}, \quad y = \frac{V - Z}{V},$$

wo V nach (44.) das Product der Größen

$$1 - k^2 x^2 \sin^2 CA\left(\frac{1}{p}K\right),$$
$$1 - k^2 x^2 \sin^2 CA\left(\frac{3}{p}K\right),$$
$$1 - k^2 x^2 \sin^2 CA\left(\frac{5}{p}K\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 - k^2 x^2 \sin^2 CA\left(\frac{p-2}{p}K\right)$$

ist; so ist auch $V - Z$ eine Function, welche für die obigen p Werthe von x verschwindet. $V - Z$ ist aber, wie aus (44.) sogleich erhellet, da

$$p - 2 = 2\left(\frac{p-1}{2}\right) - 1,\ 2.\frac{p-1}{2} + 1 = p$$

ist, eine ganze rationale Function des pten Grades von x. Also kann man nach der Theorie der Gleichungen, wenn wir der Kürze wegen

$$A\left(\frac{2}{p}K\right) = CA\left(\frac{p-2}{p}K\right) = \alpha_2\ ,$$

$$A\left(\frac{4}{p}K\right) = CA\left(\frac{p-4}{p}K\right) = \alpha_4\ ,$$

$$A\left(\frac{6}{p}K\right) = CA\left(\frac{p-6}{p}K\right) = \alpha_6\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\left(\frac{p-1}{p}K\right) = CA\left(\frac{1}{p}K\right) = \alpha_{p-1}$$

setzen,

$$V - Z =$$

$$\frac{x}{\mu}\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_4}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_6}\right)..\left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_{p-1}}\right)$$

$$\times\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_2}\right)\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_4}\right)\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_6}\right)..\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_{p-1}}\right)$$

$$= \frac{x}{\mu}\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_6^2}\right)..\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)$$

setzen, wo μ einen gewissen constanten Factor bezeichnet, der nun noch zu bestimmen ist. Setzen wir also

$$U = \left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_6^2}\right)..\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right),$$

$$V = (1 - k^2x^2\sin\alpha_2^2)(1 - k^2x^2\sin\alpha_4^2)(1 - k^2x^2\sin\alpha_6^2)..(1 - k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)$$

so ist nach dem Obigen immer

$$y = \frac{x}{\mu}\cdot\frac{U}{V}\ .$$

Um μ zu bestimmen, ist zuerst folgende Bemerkung vorauszuschicken. Ist nämlich

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = K\ ,$$

so ist nach (18.)

$$\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta(k, \varphi)}\ .$$

Setzen wir nun $\varphi = A\xi$, so ist $\psi = CA\xi$, und folglich

$$\sin^2 CA\xi = \frac{\cos^2 A\xi}{1-k^2\sin^2 A\xi} = -\frac{\sin^2 A\xi - 1}{1-k^2\sin^2 A\xi},$$

$$\frac{1-\frac{1}{\sin^2 A\xi}}{1-k^2\sin^2 A\xi} = -\frac{\sin^2 CA\xi}{\sin^2 A\xi}.$$

Ist $p = 4n+1$, so hat $1-y$ den Factor $1-x$, und es wird also $1-y=0$ für $1-x=0$, d. i. $y=1$ für $x=1$. Folglich hat man in diesem Falle

$$1 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_2^2}}{1-k^2\sin\alpha_2^2}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_4^2}}{1-k^2\sin\alpha_4^2}\right)\cdots\left(\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_{p-1}^2}}{1-k^2\sin\alpha_{p-1}^2}\right).$$

Aber allgemein

$$\frac{1-\frac{1}{\sin\alpha_{2m}^2}}{1-k^2\sin\alpha_{2m}^2} = \frac{1-\frac{1}{\sin^2 A\left(\frac{2m}{p}K\right)}}{1-k^2\sin A\left(\frac{2m}{p}K\right)} = -\frac{\sin^2 CA\left(\frac{2m}{p}K\right)}{\sin^2 A\left(\frac{2m}{p}K\right)}$$

$$= -\frac{\sin^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K\right)}{\sin^2 A\left(\frac{2m}{p}K\right)} = -\frac{\sin\alpha_{p-2m}^2}{\sin\alpha_{2m}^2}.$$

Folglich, da in diesem Falle die Anzahl der Factoren des obigen Products gerade ist:

$$1 = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\sin\alpha_{p-2}^2\sin\alpha_{p-4}^2\sin\alpha_{p-6}^2\cdots\sin\alpha_1^2}{\sin\alpha_2^2\sin\alpha_4^2\sin\alpha_6^2\cdots\sin\alpha_{p-1}^2},$$

$$\mu = \frac{\sin\alpha_1^2\sin\alpha_3^2\sin\alpha_5^2\cdots\sin\alpha_{p-2}^2}{\sin\alpha_2^2\sin\alpha_4^2\sin\alpha_6^2\cdots\sin\alpha_{p-1}^2}.$$

Ist $p=4n-1$, so hat $1-y$ den Factor $1+x$, und es wird also $1-y=0$ für $1+x=0$, d. i. $y=1$ für $x=-1$. In diesem Falle ist aber die Anzahl der Factoren ungerade, und man erhält folglich für μ wieder den vorhergehenden Ausdruck.

46. Da U und V bloß die gerade Potenz x^2 von x enthalten, so folgt aus der in (45.) gefundenen Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu}\cdot\frac{U}{V}$$

auf der Stelle, daß y in $-y$ übergeht, wenn x in $-x$ übergeht. Ein beliebiger Factor von $\frac{U}{V}$ ist

$$\frac{1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{2m}^2}}{1-k^2x^2\sin\alpha_{2m}^2}.$$

Setzt man in demselben $\frac{1}{kx}$ für x, so geht er, wie leicht erhellet, in

$$\frac{1}{k^2 \sin \alpha^4} \cdot \frac{1 - k^2 x^2 \sin \alpha_{2m}^2}{1 - \frac{x^2}{\sin \alpha_{2m}^2}}$$

über, und man sieht also, daß $\frac{U}{V}$, wenn man $\frac{1}{kx}$ für x setzt, in

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{V}{U}$$

übergeht, für

$$A = k^{p-1} \sin \alpha_2{}^4 \sin \alpha_4{}^4 \sin \alpha_6{}^4 \ldots \sin \alpha_{p-1}^4 .$$

Bezeichnen wir nun den dem Werthe $\frac{1}{kx}$ von x entsprechenden Werth von y durch y', so ist

$$y' = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{kx} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{V}{U}$$

oder

$$\frac{1}{y} = \mu^2 kA \cdot \frac{x}{\mu} \cdot \frac{U}{V} ,$$

d. i. $\frac{1}{y} = \mu^2 kAy$, $y' = \frac{1}{\mu^2 kAy}$, oder, wenn wir der Kürze wegen

$$h = \mu^2 kA = k^p \sin \alpha_1{}^4 \sin \alpha_3{}^4 \sin \alpha_5{}^4 \ldots \sin \alpha_{p-2}^4$$

setzen:

$$y' = \frac{1}{hy} .$$

Die Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{U}{V}$$

hat also die wichtige Eigenschaft, daß man in derselben, ohne ihre Richtigkeit zu stören, $\frac{1}{kx}$ für x und $\frac{1}{hy}$ für y setzen kann, wenn nur die Constante h wie vorher bestimmt wird. Diese Gleichung ist aber, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, eine bloße Transformation der Gleichung

$$1 - y = (1 \mp x) \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{\sin \alpha_1}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{\sin \alpha_3}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\sin \alpha_5}\right)^2 \ldots \left(1 \pm \frac{x}{\sin \alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2 x^2 \sin \alpha_2{}^2)(1 - k^2 x^2 \sin \alpha_4{}^2) \ldots (1 - k^2 x^2 \sin \alpha_{p-1}^2)}$$

von welcher wir in (44.) ausgegangen sind, indem sich die dortige Gleichung immer leicht auf diese ihr hier gegebene Form

bringen läßt; also wird auch die Richtigkeit dieser Gleichung durch die doppelte Substitution: $\frac{1}{kx}$ für x und $\frac{1}{hy}$ für y, nicht gestört. Führt man aber diese Substitution wirklich aus, so ergiebt sich die Gleichung:

$$1 - \frac{1}{hy} =$$

$$B\left(1 \mp \frac{1}{kx}\right) \cdot \frac{(1 - kx \sin\alpha_1)^2 (1 + kx \sin\alpha_3)^2 \ldots (1 \pm kx \sin\alpha_{p-2})^2}{\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)},$$

für

$$\frac{1}{B} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} k^{p-1} \sin\alpha_1^2 \sin\alpha_2^2 \sin\alpha_3^2 \sin\alpha_4^2 \ldots \sin\alpha_{p-2}^2 \sin\alpha_{p-1}^2 .$$

Für $x = -x$ wird nach dem Obigen $y = -y$, und man hat also auch die beiden folgenden Gleichungen:

$$1 + y =$$

$$(1 \pm x) \cdot \frac{\left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{\sin\alpha_5}\right)^2 \ldots \left(1 \mp \frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2 x^2 \sin\alpha_2^2)(1 - k^2 x^2 \sin\alpha_4^2) \ldots (1 - k^2 x^2 \sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1 + \frac{1}{hy} =$$

$$B\left(1 \pm \frac{1}{kx}\right) \cdot \frac{(1 + kx \sin\alpha_1)^2 (1 - kx \sin\alpha_3)^2 \ldots (1 \mp kx \sin\alpha_{p-2})^2}{\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}.$$

Multiplicirt man nun alle vier vorhergehende Gleichungen in einander, und setzt der Kürze wegen

$$1 - y = (1 \mp x) \frac{R^2}{V},$$

$$1 + y = (1 \pm x) \frac{S^2}{V},$$

$$1 - \frac{1}{hy} = B\left(1 \mp \frac{1}{kx}\right) \frac{R'^2}{U},$$

$$1 + \frac{1}{hy} = B\left(1 \pm \frac{1}{kx}\right) \frac{S'^2}{U},$$

wo die Bedeutung von R, S, R', S' leicht erhellen wird, und die Bedeutung von U, V aus (45.) bekannt ist; so wird

$$\left(1 - y^2\right)\left(1 - \frac{1}{h^2 y^2}\right) = \left(1 - x^2\right)\left(1 - \frac{1}{k^2 x^2}\right) \cdot \frac{B^2 R^2 S^2 R'^2 S'^2}{U^2 V^2}.$$

Aber, wenn wir

$$P = \left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_5^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right),$$

$$Q = (1 - k^2 x^2 \sin\alpha_1^2)(1 - k^2 x^2 \sin\alpha_3^2) \ldots (1 - k^2 x^2 \sin\alpha_{p-2}^2)$$

setzen, offenbar

$$P = RS, \quad Q = R'S';$$

also

$$\left(1-y^2\right)\left(1-\frac{1}{h^2y^2}\right) = \left(1-x^2\right)\left(1-\frac{1}{k^2x^2}\right)\cdot\frac{B^2T^2}{U^2V^2},$$

für $T = PQ$. Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $k^2h^2x^2y^2$, so ergiebt sich leicht:

$$(1-y^2)(1-h^2y^2) = (1-x^2)(1-k^2x^2)\cdot\frac{h^2y^2B^2T^2}{k^2x^2U^2V^2}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\frac{y}{xU} = \frac{1}{\mu V};$$

Also

$$(1-y^2)(1-h^2y^2) = (1-x^2)(1-k^2x^2)\frac{h^2B^2T^2}{k^2\mu^2V^4},$$

und, wenn man

$$X = \frac{x}{\mu}U, \quad y = \frac{X}{V}$$

setzt:

$$(V^2-X^2)(V^2-h^2X^2) = (1-x^2)(1-k^2x^2)\frac{h^2B^2}{k^2\mu^2}T^2.$$

Für $x = 0$ ist $X = 0$, $V = 1$, $P = 1$, $Q = 1$, $T = 1$. Also

$$\frac{h^2B^2}{k^2\mu^2} = 1,$$

und folglich

$$(V^2-X^2)(V^2-h^2X^2) = (1-x^2)(1-k^2x^2)T^2,$$

oder

$$(V-X)(V+X)(V-hX)(V+hX) = (1-x)(1+x)(1-kx)(1+kx)T^2;$$

Auch ist

$$(1-y^2)(1-h^2y^2) = (1-x^2)(1-k^2x^2)\frac{T^2}{V^4},$$

oder

$$\frac{T^2}{V^4} = \frac{(1-y^2)(1-h^2y^2)}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

47. Nach (45.) sind V und U zwei ganze rationale Functionen des $(p-1)$ten Grades von x, und

$$X = \frac{x}{\mu}U$$

ist also eine ganze rationale Function des $p$ten Grades von x. Die Factoren

$$V - X,\ V + X,\ V - hX,\ V + hX$$

sind folglich sämmtlich ganze rationale Functionen des pten Grades von x. Auch zeigt die Ansicht der in (45.) mitgetheilten Ausdrücke von V und U auf der Stelle, daß V und X keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Dann können aber, wenn c und c' zwei beliebige ungleiche constante Größen bezeichnen, überhaupt auch

$$V + cX \text{ und } V + c'X$$

keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Wäre nämlich

$$V + cX = (x - \alpha)P,\ V + c'X = (x - \alpha)P';$$

so wäre

$$(c - c')X = (x - \alpha)(P - P'),$$

und folglich, weil nach der Annahme $c - c'$ nicht $= 0$ ist, $x - \alpha$ ein Factor von X, also auch, wie leicht erhellet, von V, so daß folglich V und X den gemeinschaftlichen Factor $x - \alpha$ hätten, welches gegen die Voraussetzung ist. Hieraus sieht man, daß die Größen

$$V - X,\ V + X,\ V - hX,\ V + hX$$

keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Weil aber nach (46.)

$$(V - X)(V + X)(V - hX)(V + hX) = (1 - x)(1 + x)(1 - kx)(1 + kx)T^2$$

ist, und, wie wir so eben gesehen haben, in keiner der auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in einander multiplicirten Größen ein Factor enthalten ist, den auch eine der andern enthielte, so muß offenbar jede dieser vier Größen das Product eines Factors des ersten Grades in das Quadrat eines Polynoms des $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ten Grades seyn, indem augenscheinlich nur unter dieser Bedingung das Product der in Rede stehenden vier Größen die Form

$$(1 - x)(1 + x)(1 - kx)(1 + kx)T^2$$

haben kann, wobei man nur nie vergessen darf, daß jede dieser vier Größen ein Polynom des pten Grades ist, und keine gemeinschaftlichen Factoren in denselben vorkommen.

48. Aus der Gleichung

$$y = \frac{X}{V}$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x}}{V^2},$$

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x},$$

oder, wenn c eine beliebige constante Größe bezeichnet,

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = (V - cX)\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial (V - cX)}{\partial x}.$$

Hat nun $V - cX$ den quadratischen Factor $(\alpha - \beta x)^2$, so daß

$$V - cX = (\alpha - \beta x)^2 P$$

ist, so ist

$$\frac{\partial (V - cX)}{\partial x} = (\alpha - \beta x)^2 \frac{\partial P}{\partial x} - 2\beta(\alpha - \beta x)P,$$

und $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ hat folglich den einfachen Factor $\alpha - \beta x$. Für $V - cX$ kann man aber $V - X$, $V + X$, $V - hX$, $V + hX$ setzen, und sieht also hieraus, daß alle einfachen Faktoren, deren Quadrate Factoren der Größen $V - X$, $V + X$, $V - hX$, $V + hX$ sind, einfache Factoren von $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ sind, woraus also, alles in (47.) Beigebrachte gehörig berücksichtigt, mit völliger Deutlichkeit hervorgeht, daß $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ durch die Größe T (47.) theilbar ist. Nun ist aber V ein Polynom des $(p-1)$ten, X ein Polynom des pten Grades, also

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x}$$

offenbar ein Polynom des $(2p-2)$ten Grades. Das Product

$$(1-x)(1+x)(1-kx)(1+kx)T^2$$
$$= (V-X)(V+X)(V-hX)(V+hX)$$

ist ein Polynom des 4pten, also T^2 ein Polynom des $(4p-4)$ten, T ein Polynom des $(2p-2)$ten Grades, und der Quotient von $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ dnrch T muß folglich, da T in $V^2\frac{\partial y}{\partial x}$ aufgeht, eine constante Größe seyn, welche wir $= \lambda$ setzen wollen, so daß also

$$V^2\frac{\partial y}{\partial x} = \lambda T, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\lambda T}{V^2}$$

ist. Aber nach (46.)

$$\frac{T}{V^2} = \frac{\gamma(1-y^2)(1-h^2y^2)}{\gamma(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Folglich

$$\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\gamma(1-y^2)(1-h^2y^2)}{\gamma(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

$$\frac{\partial y}{\gamma(1-y^2)(1-h^2y^2)} = \frac{\lambda\partial x}{\gamma(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Denkt man sich jetzt X nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt, so ist das niedrigste x enthaltende Glied offenbar $\frac{x}{\mu}$, das niedrigste x^0 enthaltende Glied der Entwickelung von $\frac{\partial X}{\partial x}$

also $= \frac{1}{\mu}$. Das niedrigste x^0 enthaltende Glied der Entwickelung von V ist $= 1$, und das niedrigste Glied der Entwickelung von $\frac{\partial V}{\partial x}$ enthält also, da V eine Function von x^2 ist, schon x. Also ist das niedrigste x^0 enthaltende Glied in der Entwickelung von

$$V^2 \frac{\partial y}{\partial x} = V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x} \quad \ldots\ldots 1)$$

offenbar $= \frac{1}{\mu}$. Das niedrigste x^0 enthaltende Glied von $T = PQ$ ist nach (46.) $= 1$. Weil nun nach dem Obigen

$$V\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda T$$

ist, so ergiebt sich durch Vergleichung der einzelnen Glieder der Entwickelungen nach Potenzen von x, wenn man nur die ersten Glieder beibehält, oder, was dasselbe ist, für $x = 0$ auf der Stelle:

$$\frac{1}{\mu} = \lambda ;$$

also

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mu \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}},$$

und folglich, da, wegen der Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu}\cdot\frac{U}{V},$$

für $x = 0$ offenbar $y = 0$ ist:

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mu\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}},$$

d. i. für $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$:

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi).$$

Dies führt nun auf das folgende überaus merkwürdige Theorem:

Wenn für irgend ein ungerades p

$$y = \frac{x}{\mu}\cdot\frac{U}{V}$$

ist, so ist für

$$\mu = \frac{\sin\alpha_1^2 \sin\alpha_3^2 \sin\alpha_5^2 \ldots \sin\alpha_{p-2}^2}{\sin\alpha_2^2 \sin\alpha_4^2 \sin\alpha_6^2 \ldots \sin\alpha_{p-1}^2},$$

$$h = k^p \sin\alpha_1^4 \sin\alpha_3^4 \sin\alpha_5^4 \ldots \sin\alpha_{p-2}^4$$

immer

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi),$$

indem man $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$ setzt.

Statt der Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{U}{V}$$

kann man aber auch nach dem Obigen die Gleichung

$$1 - y =$$

$$(1 \mp x) \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{\sin \alpha_1}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{\sin \alpha_3}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\sin \alpha_5}\right)^2 \left(1 \pm \frac{x}{\sin \alpha_{p-2}}\right)^2}{(1 - k^2 x^2 \sin \alpha_2^2)(1 - k^2 x^2 \sin \alpha_4^2) \ldots (1 - k^2 x^2 \sin \alpha_{p-1}^2)}$$

setzen, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem p von der Form $4n + 1$ oder von der Form $4n - 1$ ist.

Setzt man, wie es nach dem Obigen verstattet ist, $-x$ und $-y$ respective für x und y, und dividirt die vorhergehende Gleichung mit der auf diese Weise erhaltenen Gleichung, so ergiebt sich:

$$\frac{1 - y}{1 + y} =$$

$$\frac{1 \mp x}{1 \pm x} \cdot \left(\frac{\sin \alpha_1 - x}{\sin \alpha_1 + x}\right)^2 \left(\frac{\sin \alpha_3 + x}{\sin \alpha_3 - x}\right)^2 \left(\frac{\sin \alpha_5 - x}{\sin \alpha_5 + x}\right)^2 \ldots \left(\frac{\sin \alpha_{p-2} \pm x}{\sin \alpha_{p-2} \mp x}\right)^2.$$

Aber allgemein bekanntlich

$$\frac{1 \mp \sin \varphi}{1 \pm \sin \varphi} = \operatorname{tang}(45^0 \mp \tfrac{1}{2}\varphi)^2,$$

$$\frac{\sin \alpha \mp \sin \varphi}{\sin \alpha \pm \sin \varphi} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha \mp \varphi) \cos \frac{1}{2}(\alpha \pm \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \varphi) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha \mp \varphi)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha \pm \varphi)}.$$

Also, wenn man zugleich die Quadratwurzel auszieht, und wieder $x = \sin \varphi$, $y = \sin \psi$ setzt:

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\psi) =$$

$$\operatorname{tang}(45^0 \mp \varphi) \cdot \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \varphi)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \varphi)} \cdot \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_3 + \varphi)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_3 - \varphi)} \cdot \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_5 - \varphi)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_5 + \varphi)} \cdot \ldots \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_{p-2} \pm \varphi)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_{p-2} \mp \varphi)},$$

aus welcher Gleichung also ψ bestimmt werden muß, wenn für die obigen Werthe von μ und h

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi)$$

seyn soll.

Aus der Gleichung

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{U}{V}$$

folgt auch auf der Stelle zur Berechnung von ψ aus φ folgende Gleichung:

$$\sin \psi =$$

$$\frac{\sin \varphi}{\mu} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sin \varphi^2}{\sin \alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\sin \varphi^2}{\sin \alpha_4^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sin \varphi^2}{\sin \alpha_{p-1}^2}\right)}{(1 - k^2 \sin \varphi^2 \sin \alpha_2^2)(1 - k^2 \sin \varphi^2 \sin \alpha_4^2) \ldots (1 - k^2 \sin \varphi^2 \sin \alpha_{p-1}^2)}.$$

Endlich ist auch nach dem Obigen

$$1 - \sin\psi =$$

$$(1 \mp \sin\varphi) \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_1}\right)^2 \left(1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_3}\right)^2 \cdots \left(1 \pm \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_4^2)\ldots(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1 + \sin\psi =$$

$$(1 \pm \sin\varphi) \frac{\left(1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_3}\right)^2 \cdots \left(1 \mp \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_4^2)\ldots(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_{p-1}^2)}.$$

Multiplicirt man nun diese beiden Gleichungen in einander und zieht die Quadratwurzel aus, so erhält man:

$$\cos\psi =$$

$$\cos\varphi \frac{\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right)}{(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_4^2)\ldots(1-k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_{p-1}^2)}.$$

Da allgemein nach dem Obigen

$$\alpha_m = A\left(\frac{m}{p}K\right),$$

also

$$F(k, \alpha_m) = \frac{m}{p}K,$$

und bekanntlich

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist, so muß α_m aus der Gleichung

$$F(k, \alpha_m) = \frac{m}{p}F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

bestimmt werden, wozu in (19.) die nöthige Anleitung ertheilt worden ist.

Jacobi hat dieses merkwürdige Theorem nebst seinem Beweise zuerst in Schumachers astronomischen Nachrichten Nr. 123. 127., dann in den schon angeführten Fundamentis Theoriae functionum ellipticarum. p. 36. ff., Legendre im Traité des fonctions elliptiques. Premier supplément. p. 3. und einen Nachtrag zu dem Beweise im Troisième supplément. p. 169 mitgetheilt. Des Letztern Darstellung sind wir hier vorzüglich gefolgt.

XIX. Zweites Theorem von Jacobi über die elliptischen Functionen der ersten Art.

49. In der Gleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mu \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}$$

setze man, für $i = \sqrt{-1}$,

$$x = i \tang\sigma, \quad y = i \tang\tau;$$

so ist

$$\partial x = \frac{i\partial\sigma}{\cos\sigma^2}, \quad \partial y = \frac{i\partial\tau}{\cos\tau^2};$$

$$1 + x^2 = 1 + \tang\sigma^2 = \frac{1}{\cos\sigma^2}, \quad 1 - y^2 = 1 + \tang\tau^2 = \frac{1}{\cos\tau^2};$$

$$1 - k^2x^2 = 1 + k^2\tang\sigma^2 = \frac{1 - (1 - k^2)\sin\sigma^2}{\cos\sigma^2},$$

$$1 - h^2y^2 = 1 + h^2\tang\tau^2 = \frac{1 - (1 - h^2)\sin\tau^2}{\cos\tau^2};$$

folglich, wenn wir

$$1 - k^2 = k'^2, \; 1 - h^2 = h'^2$$

setzen:

$$\frac{\partial\sigma}{\sqrt{1 - k'^2\sin\sigma^2}} = \mu\frac{\partial\tau}{\sqrt{1 - h'^2\sin\tau^2}};$$

$$\int_0^\sigma \frac{\partial\sigma}{\sqrt{1 - k'^2\sin\sigma^2}} = \mu\int_0^\tau \frac{\partial\tau}{\sqrt{1 - h'^2\sin\tau^2}};$$

d. i. $F(k', \sigma) = \mu F(h', \tau)$.

Da $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$ ist, so ist

$$\sin\varphi = i\tang\sigma, \quad \sin\psi = i\tang\tau;$$

$$\cos\varphi^2 = 1 + \tang\sigma^2 = \frac{1}{\cos\sigma^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\cos\sigma};$$

$$\cos\psi^2 = 1 + \tang\tau^2 = \frac{1}{\cos\tau^2}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\cos\tau}.$$

$$\tang\varphi = i\sin\sigma, \quad \tang\psi = i\sin\tau.$$

Aus den in (48.) für $\sin\psi$ und $\cos\psi$ gegebenen Formeln folgt durch Division

$$\tang\psi = \frac{\tang\varphi}{\mu} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right)}.$$

Aber überhaupt

$$1 - \frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha^2} = 1 + \frac{\tang\sigma^2}{\sin\alpha^2} = 1 + \operatorname{cosec}\alpha^2\tang\sigma^2$$

$$= 1 + (1 + \cot\alpha^2)\tang\sigma^2 = \frac{1 + \cot\alpha^2\sin\sigma^2}{\cos\sigma^2}.$$

Folglich

$$\sin\tau = \frac{\sin\sigma}{\mu}\cdot\frac{(1+\cot\alpha_2{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_4{}^2\sin\sigma^2)\ \ldots\ (1+\cot\alpha_{p-1}^2\sin\sigma^2)}{(1+\cot\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ \ldots\ (1+\cot\alpha_{p-2}^2\sin\sigma^2)}\cdot$$

mittelst welcher Formel τ aus σ gefunden wird.

Nach (45.) ist allgemein

$$\sin^2 CA\xi = \frac{\cos^2 A\xi}{1-k^2\sin^2 A\xi};$$

also

$$k^2\sin^2 A\xi = 1 - \frac{\cos^2 A\xi}{\sin^2 CA\xi}.$$

Aber für jedes n

$$\alpha_n = A\left(\frac{n}{p}K\right),\quad \alpha_{p-n} = A\left(\frac{p-n}{p}K\right) = CA\left(\frac{n}{p}K\right).$$

Also

$$k^2\sin\alpha_n^2 = 1 - \frac{\cos\alpha_n^2}{\sin\alpha_{p-n}^2},$$

und folglich

$$1 - k^2\sin\varphi^2\sin\alpha_n^2 = 1 + \left\{1 - \frac{\cos\alpha_n{}^2}{\sin\alpha_{p-n}^2}\right\}\tang\sigma^2$$

$$= \frac{1 - \frac{\cos\alpha_n{}^2}{\sin\alpha_{p-n}^2}\sin\sigma^2}{\cos\sigma^2}.$$

Also nach der Formel für $\cos\psi$ in (48.)

$$\frac{1}{\cos\tau} = \frac{1}{\cos\sigma}\cdot\frac{(1+\cot\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha_{p-2}^2\sin\sigma^2)}{\left\{1-\frac{\cos\alpha_2{}^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\sin\sigma^2\right\}\left\{1-\frac{\cos\alpha_4{}^2}{\sin\alpha_{p-4}^2}\sin\sigma^2\right\}\ldots\left\{1-\frac{\cos\alpha_{p-1}^2}{\sin\alpha_1{}^2}\sin\sigma^2\right\}},$$

$$\cos\tau = \cos\sigma\cdot\frac{\left\{1-\frac{\cos\alpha_2{}^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\sin\sigma^2\right\}\left\{1-\frac{\cos\alpha_4{}^2}{\sin\alpha_{p-4}^2}\sin\sigma^2\right\}\ldots\left\{1-\frac{\cos\alpha_{p-1}^2}{\sin\alpha_1{}^2}\sin\sigma^2\right\}}{(1+\cot\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha_{p-2}^2\sin\sigma^2)}.$$

Ferner ist nach (46.)

$$\frac{T}{V^2} = \frac{PQ}{V^2} = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \frac{\cos\sigma^2}{\cos\tau^2}\cdot\frac{\sqrt{1-h'^2\sin\tau^2}}{\sqrt{1-k'^2\sin\sigma^2}}.$$

Aber, wie leicht aus (48.) und (46.) folgt

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{P}{V} = \frac{\cos\sigma}{\cos\tau},\quad \frac{P^2}{V^2} = \frac{\cos\sigma^2}{\cos\tau^2};$$

also

$$\frac{\sqrt{1-h'^2\sin\tau^2}}{\sqrt{1-k'^2\sin\sigma^2}} = \frac{Q}{P} =$$

$$\frac{\left\{1-\frac{\cos\alpha_1^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\sin\sigma^2\right\}\left\{1-\frac{\cos\alpha_3^2}{\sin\alpha_{p-3}^2}\sin\sigma^2\right\}..\left\{1-\frac{\cos\alpha_{p-2}^2}{\sin\alpha_2^2}\sin\sigma^2\right\}}{(1+\cot\alpha_1^2\sin\sigma^2)(1+\cot\alpha_3^2\sin\sigma^2)\ldots(1+\cot\alpha_{p-2}^2\sin\sigma^2)}.$$

In der Gleichung

$$F(k', \sigma) = \mu F(h', \tau)$$

setze man nun, wie offenbar verstattet ist, h statt k'; dann ist

$$h'^2 = 1 - h^2 = 1 - k'^2 = k^2,\ h' = k.$$

Den entsprechenden Werth von μ bezeichne man durch μ', und, da überhaupt

$$\alpha_m = A\left(\frac{m}{p}K\right)$$

ist, jetzt aber $k = h'$ ist, so sey jetzt überhaupt

$$\beta_m = A\left(\frac{m}{p}H'\right),$$

für

$$H' = F\left(h', \frac{\pi}{2}\right),$$

wo also β_m so zu bestimmen ist, daß

$$F(h', \beta_m) = \frac{m}{p}H' = \frac{m}{p}F\left(h', \frac{\pi}{2}\right)$$

ist. Bezeichnen wir nun die dem Modulus h entsprechende Amplitudo durch ψ, die dem Modulus k entsprechende Amplitudo durch ω, und setzen $\sin\psi = y$, $\sin\omega = z$; so ist nach dem Vorhergehenden

$$F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

für

$$z = \frac{y}{\mu'}\cdot\frac{(1+y^2\cot\beta_2^2)(1+y^2\cot\beta_4^2)\,..\,(1+y^2\cot\beta_{p-1})}{(1+y^2\cot\beta_1^2)(1+y^2\cot\beta_3^2)\,..\,(1+y^2\cot\beta_{p-2}^2)},$$

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_2^2}{\sin\beta_{p-2}^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_4^2}{\sin\beta_{p-4}^2}\right\}..\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_{p-1}^2}{\sin\beta_1^2}\right\}}{(1+y^2\cot\beta_1^2)(1+y^2\cot\beta_3^2)\,..\,(1+y^2\cot\beta_{p-2}^2)},$$

$$\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-h^2y^2}} =$$

$$\frac{\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_1^2}{\sin\beta_{p-1}^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_3^2}{\sin\beta_{p-3}^2}\right\}..\left\{1-\frac{y^2\cos\beta_{p-2}^2}{\sin\beta_2^2}\right\}}{(1+y^2\cot\beta_1^2)(1+y^2\cot\beta_3^2)\,..\,(1+y^2\cot\beta_{p-2}^2)},$$

$$\mu' = \frac{\sin\beta_1^2 \sin\beta_3^2 \sin\beta_5^2 \ldots \sin\beta_{p-2}^2}{\sin\beta_2^2 \sin\beta_4^2 \sin\beta_6^2 \ldots \sin\beta_{p-1}^2},$$

$$k' = h'^p \sin\beta_1^4 \sin\beta_3^4 \sin\beta_5^4 \ldots \sin\beta_{p-2}^4 .$$

50. Kehren wir jetzt auf ein Paar Augenblicke wieder zu dem in XVIII. bewiesenen ersten Theorem zurück, so erhellet aus den Formeln

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_6^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{(1-k^2x^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_4^2)\ldots(1-k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1-y = (1\mp x)\frac{\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_5}\right)^2\cdots\left(1\pm\frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1-k^2x^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_4^2)\ldots(1-k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

$$1+y = (1\pm x)\frac{\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^2\left(1-\frac{x}{\sin\alpha_3}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sin\alpha_5}\right)^2\cdots\left(1\mp\frac{x}{\sin\alpha_{p-2}}\right)^2}{(1-k^2x^2\sin\alpha_2^2)(1-k^2x^2\sin\alpha_4^2)\ldots(1-k^2x^2\sin\alpha_{p-1}^2)},$$

wenn man x und y, d. i., weil $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$ ist, φ und ψ von Null an sich stetig verändern läßt, daß folgende Werthe von φ und ψ als zusammenstimmende Werthe zu betrachten sind:

$$\varphi = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots \alpha_{p-2}, \alpha_{p-1};$$

$$\psi = 0, \tfrac{1}{2}\pi, \pi, \tfrac{3}{2}\pi, 2\pi, \ldots\ldots \frac{p-2}{2}\pi, \frac{p-1}{2}\pi .$$

Weil ferner bekanntlich

$$F(k, \alpha_p) = \frac{p}{p} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist; so ist $\alpha_p = \frac{1}{2}\pi$, und folglich in diesem Falle, für $\varphi = \alpha_p$, $x = \sin\varphi = 1$. Ist nun $p = 4n + 1$, so ist in diesem Falle, da $1 - x = 0$ ist und die obern Zeichen genommen werden müssen, $1 - y = 0$, $y = 1$. Ist aber $p = 4n - 1$, so ist, da $1 - x = 0$ ist und die untern Zeichen genommen werden müssen, $1 + y = 0$, $y = -1$. Im ersten Falle ist

$$\frac{p}{2}\pi = 2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi, \sin\frac{p}{2}\pi = 1;$$

im zweiten Falle dagegen ist

$$\frac{p}{2}\pi = 2n\pi - \tfrac{1}{2}\pi, \sin\frac{p}{2}\pi = -1;$$

und folglich, wie aus den beiden obigen Reihen der zusammen gehörenden Werthe von φ und ψ sogleich hervorgeht, in beiden Fällen $\psi = \frac{p}{2}\pi$, wenn $\varphi = \alpha_p = \frac{1}{2}\pi$ ist. Ueberhaupt sieht man hieraus, daß, wenn φ zwischen α_m und α_{m+1} liegt, ψ zwi-

schen $\frac{m}{2}\pi$ und $\frac{m+1}{2}\pi$ zu nehmen ist, so wie auch leicht erhellen wird, wie man sich zu verhalten hat, wenn φ größer als $\frac{1}{2}\pi$ wird. Setzt man nun in der Gleichung des Satzes in XVIII.

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi)$$

für φ und ψ die beiden zusammengehörenden Werthe $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{p}{2}\pi$; so wird

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \mu F\left(h, \frac{p}{2}\pi\right).$$

Aber nach (10.)

$$F\left(h, \frac{p}{2}\pi\right) = pF\left(h, \frac{\pi}{2}\right);$$

also

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = p\mu F\left(h, \frac{\pi}{2}\right),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen wieder

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K, \; F\left(h, \frac{\pi}{2}\right) = H$$

setzen:

$$K = p\mu H.$$

51. Weil

$$\frac{(1 + \cot\alpha_2^2)(1 + \cot\alpha_4^2) \ldots (1 + \cot\alpha_{p-1}^2)}{(1 + \cot\alpha_1^2)(1 + \cot\alpha_3^2) \ldots (1 + \cot\alpha_{p-2}^2)}$$

$$= \frac{\sin\alpha_1^2 \sin\alpha_3^2 \sin\alpha_5^2 \ldots \sin\alpha_{p-2}^2}{\sin\alpha_2^2 \sin\alpha_4^2 \sin\alpha_6^2 \ldots \sin\alpha_{p-1}^2} = \mu$$

ist, so ist für $\sigma = \frac{1}{2}\pi$ nach (49.) auch $\tau = \frac{1}{2}\pi$, so wie offenbar $\tau = 0$ für $\sigma = 0$. Also giebt die Gleichung

$$F(k', \sigma) = \mu F(h', \tau)$$

in diesem Falle

$$F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \mu F\left(h', \frac{\pi}{2}\right)$$

oder in abkürzender Bezeichnung

$$K' = \mu H'.$$

Wir haben also

$$\frac{K}{pH} = \mu, \; \frac{K'}{H'} = \mu,$$

woraus auf der Stelle die merkwürdige Gleichung

$$\frac{K}{K'} = p\frac{H}{H'}, \quad \frac{F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)} = p\frac{F\left(h, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(h', \frac{\pi}{2}\right)}$$

folgt.

52. Eben so leicht wie in (51.) erhellet aus (49.), daß zu gleicher Zeit $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ist. Also folgt aus der Gleichung

$$F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

in (49.)

$$F\left(h, \frac{\pi}{2}\right) = \mu' F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad H = \mu' K;$$

und wir haben daher (s. 50.) die beiden Gleichungen:

$$\frac{K}{H} = p\mu, \quad \frac{H}{K} = \mu',$$

woraus, wenn man multiplicirt, die merkwürdige Gleichung

$$p\mu\mu' = 1$$

erhalten wird.

Verbindet man nun die Gleichungen

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi), \quad F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

mit einander; so erhält man

$$F(k, \varphi) = \mu\mu' F(k, \omega),$$

d. i., weil $\mu\mu' = \frac{1}{p}$ ist:

$$F(k, \omega) = pF(k, \varphi),$$

in welcher Gleichung die allgemeine Auflösung des Problems der Multiplication der elliptischen Functionen der ersten Art, wenn der Multiplicator eine ungerade Zahl ist, enthalten ist. Ist nämlich die Amplitudo gegeben, so sucht man zuerst ψ mittelst der Formel

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x_2}{\sin \alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin \alpha_4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{\sin \alpha_{p-1}^2}\right)}{(1 - k^2 x^2 \sin\alpha_2^2)(1 - k^2 x^2 \sin\alpha_4^2) \cdots (1 - k^2 x^2 \sin\alpha_{p-1}^2)}$$

oder einer andern zu diesem Zweck dienlichen Formel des ersten Theorems und dann ω mittelst der Formel

$$z = \frac{y}{\mu'} \cdot \frac{(1 + y^2 \cot\beta_2^2)(1 + y^2 \cot\beta_4^2) \cdots (1 + y^2 \cot\beta_{p-1}^2)}{(1 + y^2 \cot\beta_1^2)(1 + y^2 \cot\beta_3^2) \cdots (1 + y^2 \cot\beta_{p-2}^2)}$$

des zweiten Theorems, indem man bemerkt, daß die Verbindung der Gleichungen

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi), \quad F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega)$$

nach dem Vorhergehenden zu der Gleichung

$$F(k, \omega) = pF(k, \varphi)$$

führt. Wäre ω gegeben und φ der Gleichung

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{p} F(k, \omega)$$

gemäß zu bestimmen, so müßte man $y = \sin\psi$ aus $z = \sin\omega$ durch Auflösung der zweiten der beiden obigen algebraischen Glei-

chungen, und dann eben so $x = \sin\varphi$ aus $y = \sin\psi$ mittelst der ersten dieser beiden Gleichungen bestimmen, so daß also hierdurch auch das Problem der Division der elliptischen Functionen der ersten Art, wenn p eine ungerade Zahl ist, auf die Auflösung bloßer algebraischer Gleichungen gebracht ist.

53. Mittelst des ersten Theorems kann man von der Function $F(k, \varphi)$ zu einer elliptischen Function des Modulus h, von dieser wieder eben so zu einer andern des Modulus h_1, von dieser zu einer andern des Modulus h_2, u. s. f. übergehen, und aus (48.) erhellet, daß

$$k, h, h_1, h_2, h_3, \ldots.$$

eine abnehmende Reihe bilden, deren Gränze Null ist. Eben so leicht erhellet, daß man mittelst der Formeln des ersten Theorems durch Auflösung bloßer algebraischer Gleichungen aus $F(k, \varphi)$ eine Reihe anderer elliptischer Functionen ableiten kann, deren Moduli die steigende Reihe

$$\ldots\ldots k_3, k_2, k_1, k,$$

deren Glieder sich immer mehr und mehr der Einheit nähern, bilden, so daß man also aus jeder elliptischen Function $F(k, \varphi)$ eine unendliche Reihe anderer ableiten kann, deren Moduli die nach beiden Seiten hin in's Unendliche fortschreitende Reihe

Lim. 1) $\ldots k_4, k_3, k_2, k_1, k, h, h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots$ (Lim. 0

bilden, und mit dieser Reihe kann man dann ferner nach den in (49.) gegebenen Formeln eine neue Reihe elliptischer Functionen verbinden, deren Moduli die Complemente der vorhergehenden sind, und daher ebenfalls eine nach beiden Seiten hin in's Unendliche aber im entgegengesetzten Sinne fortschreitende Reihe

Lim. 0) $\ldots k'_4, k'_3, k'_2, k'_1, k', h', h'_1, h'_2, h'_3, h'_4, \ldots$ (Lim. 1

bilden.

Das Folgende enthält eine der wichtigsten und interessantesten Anwendungen der beiden von Jacobi gefundenen Theoreme. Außerdem lassen sich von denselben noch viele andere Anwendungen machen, worüber vorzüglich Legendre Traité des fonctions elliptiques. Deux. suppl. nachzusehen ist, da uns die Beschränktheit des Raums mehr zu sagen verbietet.

XX. Darstellung der trigonometrischen Functionen der Amplitudo als Producte mit unendlich vielen Factoren.

54. Die Hauptgleichungen der beiden von Jacobi gefundenen Theoreme sind nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi), \quad F(h, \psi) = \mu' F(k, \omega),$$

wo nach (46.)

$$h = k^p \sin\alpha_1^4 \sin\alpha_3^4 \sin\alpha_5^4 \ldots \sin\alpha_{p-2}^4$$

ist, und die zweite Gleichung für

$$z = \frac{v}{\mu'} \cdot \frac{(1+y^2\cot\beta_2{}^2)(1+y^2\cot\beta_4{}^2)\ldots(1+y^2\cot\beta_{p-1}^2)}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)\ldots(1+y^2\cot\beta_{p-2}^2)};$$

$$y = \sin\psi, \quad z = \sin\omega;$$

$$F(h', \beta_m) = \frac{m}{p} F\left(h', \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m}{p} H';$$

$$\mu' = \frac{\sin\beta_1{}^2 \sin\beta_3{}^2 \sin\beta_5{}^2 \ldots \sin\beta_{p-2}^2}{\sin\beta_2{}^2 \sin\beta_4{}^2 \sin\beta_6{}^2 \ldots \sin\beta_{p-1}^2}$$

erfüllt wird, immer vorausgesetzt, daß p eine ungerade Zahl ist.

Setzen wir nun $p = \infty$, so ist offenbar $h = 0$, also

$$H = F\left(h, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ferner ist überhaupt

$$2\int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2} = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x} + \int_0^x \frac{\partial x}{1+x} = l\frac{1+x}{1-x};$$

folglich

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{1-\sin x^2}} = \int_0^x \frac{\cos x\,\partial x}{1-\sin x^2} = \int_0^x \frac{\partial \sin x}{1-\sin x^2} = \tfrac{1}{2} l \frac{1+\sin x}{1-\sin x};$$

also, weil $h' = \sqrt{1-h^2} = 1$ ist, offenbar

$$F(h', \beta_m) = \tfrac{1}{2} l \frac{1+\sin\beta_m}{1-\sin\beta_m}.$$

Ferner ist nach (51.) und (52.)

$$\mu' = \frac{H}{K}, \frac{K}{K'} = p\frac{H}{H'};$$

also im vorliegenden Falle

$$\mu' = \frac{\pi}{2K}, \frac{H'}{p} = \frac{HK'}{K} = \frac{\pi K'}{2K}, \frac{m}{p}H' = \frac{m}{2}\cdot\frac{\pi K'}{K};$$

folglich

$$F(h', \beta_m) = \frac{m}{p}H' = \tfrac{1}{2} l \frac{1+\sin\beta_m}{1-\sin\beta_m} = \frac{m}{2}\cdot\frac{\pi K'}{K},$$

und daher, wenn wir der Kürze wegen

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

setzen:

$$\frac{1+\sin\beta_m}{1-\sin\beta_m} = q^{-m};$$

folglich

$$\sin\beta_m = \frac{1-q^m}{1+q^m}, \quad \cos\beta_m = \frac{2q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m}, \quad \cot\beta_m^2 = \frac{4q^m}{(1-q^m)^2};$$

$$\frac{1+y^2\cot\beta_m^2}{1+y^2\cot\beta_{m-1}^2}=\left(\frac{1-q^{m-1}}{1-q^m}\right)^2\cdot\frac{1-2(1-2y^2)\,q^m+q^{2m}}{1-2(1-2y^2)\,q^{m-1}+q^{2m-2}}$$
$$=\left(\frac{1-q^{m-1}}{1-q^m}\right)^2\cdot\frac{1-2q^m\cos 2\psi+q^{2m}}{1-2q^{m-1}\cos 2\psi+q^{2m-2}},$$

da bekanntlich

$$\cos 2\psi=1-2\sin\psi^2=1-2y^2$$

ist. Dies giebt also nach dem Obigen

$$\frac{\sin\omega}{\sin\psi}=$$
$$\frac{2K}{\pi}A^2\cdot\frac{1-2q^2\cos 2\psi+q^4}{1-2q\cos 2\psi+q^2}\cdot\frac{1-2q^4\cos 2\psi+q^8}{1-2q^3\cos 2\psi+q^6}\cdot\frac{1-2q^6\cos 2\psi+q^{12}}{1-2q^5\cos 2\psi+q^{10}}\cdots$$

für

$$A=\frac{1-q}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1-q^4}\cdot\frac{1-q^5}{1-q^6}\cdot\frac{1-q^7}{1-q^8}\cdots$$

Da $h=0$ ist, so ist

$$F(h,\psi)=\psi=\mu' F(k,\omega)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{F(k,\omega)}{K},$$

und ψ kann also immer aus ω gefunden werden.

Für A läßt sich auf folgende Art noch ein zweiter Ausdruck finden. Für $\omega=\frac{1}{2}\pi$ ist nämlich nach (52.) auch $\psi=\frac{1}{2}\pi$, und folglich nach der vorher gefundenen Gleichung

$$1=\frac{2K}{\pi}A^2\cdot\left(\frac{1+q^2}{1+q}\right)^2\left(\frac{1+q^4}{1+q^3}\right)^2\left(\frac{1+q^6}{1+q^5}\right)^2\cdots,$$

$$A=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+q}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1+q^4}\cdot\frac{1+q^5}{1+q^6}\cdot\frac{1+q^7}{1+q^8}\cdots$$

Da für $p=\infty$ nach dem Obigen $h=0$, und wie aus der allgemeinen Gleichung

$$F(h',\beta_m)=\frac{m}{p}F\left(h',\frac{\pi}{2}\right)$$

sogleich erhellet,

$$\sin\beta_p=\sin\beta_{p-1}=\sin\beta_{p-2}=\ldots=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$\cos\beta_p=\cos\beta_{p-1}=\cos\beta_{p-2}=\ldots=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

ist; so werden die beiden andern Hauptformeln in (49.) in diesem Falle

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi}=$$
$$\frac{(1-y^2\cos\beta_2{}^2)(1-y^2\cos\beta_4{}^2)(1-y^2\cos\beta_6{}^2)\cdots}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)(1+y^2\cot\beta_5{}^2)\cdots},$$

$$\Delta(k, \omega) =$$

$$\frac{(1-y^2\cos\beta_1{}^2)(1-y^2\cos\beta_3{}^2)(1-y^2\cos\beta_5{}^2)\ldots.}{(1+y^2\cot\beta_1{}^2)(1+y^2\cot\beta_3{}^2)(1+y^2\cot\beta_5{}^2)\ldots.},$$

d. i. auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} =$$

$$B^2\cdot\frac{1+2q^2\cos 2\psi+q^4}{1-2q\cos 2\psi+q^2}\cdot\frac{1+2q^4\cos 2\psi+q^8}{1-2q^3\cos 2\psi+q^6}\cdot\frac{1+2q^6\cos 2\psi+q^{12}}{1-2q^5\cos 2\psi+q^{10}}\ldots.,$$

$$B=\frac{1-q}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^4}\cdot\frac{1-q^5}{1+q^6}\cdot\frac{1-q^7}{1+q^8}\ldots.;$$

$$\Delta(k, \omega) =$$

$$D^2\cdot\frac{1+2q\cos 2\psi+q^2}{1-2q\cos 2\psi+q^2}\cdot\frac{1+2q^3\cos 2\psi+q^6}{1-2q^3\cos 2\psi+q^6}\cdot\frac{1+2q^5\cos 2\psi+q^{10}}{1-2q^5\cos 2\psi+q^{10}}\ldots.,$$

$$D=\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\cdot\frac{1-q^5}{1+q^5}\cdot\frac{1-q^7}{1+q^7}\ldots.$$

Für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ist auch $\psi = \frac{1}{2}\pi$; also, da in diesem Falle

$$\Delta(k, \omega) = \sqrt{1-k^2} = k'$$

ist:

$$k' = D^2\cdot\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\left(\frac{1-q^3}{1+q^3}\right)^2\left(\frac{1-q^5}{1+q^5}\right)^2\ldots.,$$

$$D=(k')^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\cdot\frac{1+q^5}{1-q^5}\cdot\frac{1+q^7}{1-q^7}\ldots.;$$

folglich auch, wie aus der Vergleichung der beiden Ausdrücke von D sogleich folgt:

$$\sqrt[4]{k'}=\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\cdot\frac{1-q^5}{1+q^5}\cdot\frac{1-q^7}{1+q^7}\ldots.$$

Für $\omega = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$ wird

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} = \frac{0}{0}.$$

Um den wahren Werth dieses Bruchs zu finden, differentiire man den Zähler und Nenner nach einer aus der Differentialrechnung bekannten Regel, und setze dann $\omega = \psi = \frac{1}{2}\pi$; so erhält man

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} = \frac{\sin\omega\,\partial\omega}{\sin\psi\,\partial\psi} = \frac{\partial\omega}{\partial\psi}.$$

Aber

$$\mu' F(k, \omega) = F(h, \psi);$$

folglich

$$\mu'\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-k^2\sin\omega^2}} = \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-h^2\sin\psi^2}},$$

d. i., weil $h = 0$ ist:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\psi} = \frac{1}{\mu'}\sqrt{1-k^2\sin\omega^2} = \frac{2K}{\pi}\sqrt{1-k^2\sin\omega^2};$$

also für $\omega = \psi = \frac{1}{2}\pi$:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\psi} = \frac{2Kk'}{\pi}.$$

Folglich

$$\frac{2Kk'}{\pi} = B^2 \cdot \left(\frac{1-q^2}{1+q}\right)^2 \left(\frac{1-q^4}{1+q^3}\right)^2 \left(\frac{1-q^6}{1+q^5}\right)^2 \cdots,$$

$$B = \left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1+q}{1-q^2} \cdot \frac{1+q^3}{1-q^4} \cdot \frac{1+q^5}{1-q^6} \cdot \frac{1+q^7}{1-q^8} \cdots.$$

55. Die vorhergehenden Formeln involviren gewisse Functionen von q, die wir jetzt näher bestimmen wollen, indem wir der Abkürzung wegen

$$\alpha = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7) \cdots,$$
$$\alpha' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8) \cdots,$$
$$\beta = (1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7) \cdots,$$
$$\beta' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8) \cdots,$$

setzen. Da

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5) \cdots,$$
$$\beta\beta' = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5) \cdots,$$

ist; so erhält man

$$\alpha\alpha'\beta\beta' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8) \cdots = \alpha';$$

also

$$\alpha\beta\beta' = 1, \quad \frac{1}{\alpha} = \beta\beta';$$

d. i.

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\cdots.$$

Nach (54.) ist

$$A = \frac{\alpha}{\alpha'} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\beta}{\beta'}, \quad B = \frac{\alpha}{\beta'} = \left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\beta}{\alpha'},$$

$$D = \frac{\alpha}{\beta} = (k')^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\beta}{\alpha},$$

welches aber nebst der Gleichung $\alpha\beta\beta' = 1$ doch nur drei Gleichungen zwischen α, α', β, β' sind, da die beiden ersten der drei letzten Gleichungen, wenn man sie in einander multiplicirt, offenbar dasselbe Resultat geben, wie die dritte, so daß man also zwischen den vier gesuchten Größen in der That nur die drei Gleichungen

$$\frac{\alpha}{\beta} = (k')^{\frac{1}{4}}, \frac{\alpha'}{\beta'} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (k')^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha\beta\beta' = 1$$

hat, und daher noch eine vierte zu finden suchen muß, wozu man auf folgende Art gelangt.

Der Kürze wegen sey

$$e^{\psi\sqrt{-1}} = e^{i\psi} = V ,$$

so ist bekanntlich

$$\cos\psi = \frac{V + V^{-1}}{2}, \sin\psi = \frac{V - V^{-1}}{2i} ;$$

folglich

$$\cos 2\psi = \cos\psi^2 - \sin\psi^2$$
$$= \frac{V^2 + 2 + V^{-2}}{4} + \frac{V^2 - 2 + V^{-2}}{4} = \frac{V^2 + V^{-2}}{2} ,$$

und daher allgemein

$$1 - 2q^n \cos 2\psi + q^{2n} = 1 - q^n(V^2 + V^{-2}) + q^{2n}$$
$$= 1 - q^n(V^2 + V^{-2}) + q^{2n} . V^2 . V^{-2}$$
$$= (1 - q^n V^2)(1 - q^n V^{-2}) ;$$

also nach (54.)

$$\sin\omega =$$
$$\frac{2K}{\pi} A^2 . \frac{V - V^{-1}}{2i} . \frac{\left\{\begin{array}{l} 1 - q^2 V^2 . 1 - q^4 V^2 . 1 - q^6 V^2 \ldots \\ 1 - q^2 V^{-2} . 1 - q^4 V^{-2} . 1 - q^6 V^{-2} \ldots \end{array}\right.}{\left\{\begin{array}{l} 1 - q V^2 . 1 - q^3 V^2 . 1 - q^5 V^2 \ldots \\ 1 - q V^{-2} . 1 - q^3 V^{-2} . 1 - q^5 V^{-2} \ldots \end{array}\right.} .$$

56. Bevor wir hier weiter gehen können, sind noch folgende auch an sich wichtige Bemerkungen einzuschalten. Setzt man, indem immer $i = \sqrt{-1}$ ist, $\sin\varphi = i\tang\psi$, so ist

$$\cos\varphi = \sqrt{1 + \tang\psi^2} = \frac{1}{\cos\psi} ;$$

also

$$\partial \sin\varphi = \cos\varphi\,\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\cos\psi} = \frac{i\,\partial\psi}{\cos\psi^2}, \partial\varphi = \frac{i\partial\psi}{\cos\psi} ,$$

und demnach

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}} = \frac{i\partial\psi}{\sqrt{\cos\psi^2 + k^2 \sin\psi^2}} = \frac{i\partial\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin\psi^2}} ;$$

also, da für $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ respective $\psi = 0$, $\psi = \psi$ zu setzen ist:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\varphi^2}} = i\int_0^{\psi} \frac{\partial\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin\psi^2}} ,$$

d. i.

$$F(k, \varphi) = iF(k', \psi) .$$

Für $\psi = \frac{1}{2}\pi$ ist

$$\sin\varphi = i . \frac{1}{0} = \frac{i}{0} = \frac{i^2}{0 . i} = -\frac{1}{0} ;$$

so daß also, wenn

$$F(k, \varphi) = iF\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = iK'$$

gesetzt wird, immer

$$\sin\varphi = -\frac{1}{0},$$

oder, was dasselbe ist, stets

$$\sin A(iK') = -\frac{1}{0}$$

ist, wenn $A(iK')$, wie gewöhnlich, die Amplitudo von iK' in Bezug auf k als Modulus bezeichnet.

Ist nun überhaupt

$$\xi = F(k, \varphi),\ \Theta = F(k, \psi);$$

so ist nach (16.)

$$\sin A(\xi + \Theta) = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi) + \cos\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

also, wenn wir $\Theta = iK'$ setzen, da in diesem Falle

$$\sin\psi = \sin A\Theta = -\frac{1}{0},$$

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin\psi^2} = \sqrt{-\sin\psi^2} = i\sin\psi,$$

$$\Delta(\psi) = \sqrt{1-k^2\sin\psi^2} = \sqrt{-k^2\sin\psi^2} = ik\sin\psi$$

ist:

$$\sin A(\xi + iK') = \frac{-k\sin\varphi\sin\psi^2 + \cos\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}$$

$$= \frac{-k\sin\varphi\sin\psi^2 + \cos\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)}{-k^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

oder, wenn man nur immer im Auge behält, daß

$$\sin\psi = -\frac{1}{0}$$

ist:

$$\sin A(\xi + iK') = \frac{1}{k\sin\varphi} = \frac{1}{k\sin A\xi}.$$

57. Kehren wir nun wieder zu (55.) zurück, so ist nach (54.) in den dort gebrauchten Zeichen

$$\psi = \frac{\pi}{2K}F(k, \omega),\ \frac{2K\psi}{\pi} = F(k, \omega).$$

Setzt man aber jetzt

$$\frac{2K\psi}{\pi} + iK' \text{ für } \frac{2K\psi}{\pi},$$

also

$$\psi + \frac{i\pi K'}{2K} \text{ für } \psi;$$

so geht nach (56.)

$$\sin\omega = \sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)$$

in

$$\sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi} + iK'\right) = \frac{1}{k\sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)},$$

d. i. in $\frac{1}{k\sin\omega}$ über. Auch geht

$$V = e^{i\psi}$$

in

$$e^{i\psi}\cdot\frac{\pi K'}{2K} = e^{i\psi}.e^{-\frac{\pi K'}{2K}} = Vq^{\frac{1}{2}}$$

über. Durch diese Substitutionen wird also die in (55.) gefundene Gleichung:

$$\frac{1}{k\sin\omega} =$$

$$\frac{2K}{\pi}A^2\cdot\frac{Vq^{\frac{1}{2}} - V^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2i}\cdot\frac{\begin{cases}1-q^3V^2\,.\,1-q^5V^2\,.\,1-q^7V^2\ldots.\\ 1-qV^{-2}\,.\,1-q^3V^{-2}\,.\,1-q^5V^{-2}\ldots.\end{cases}}{\begin{cases}1-q^2V^2\,.\,1-q^4V^2\,.\,1-q^6V^2\ldots.\\ 1-V^{-2}\,.\,1-q^2V^{-2}\,.\,1-q^4V^{-2}\ldots.\end{cases}}$$

und, wenn man nun diese Gleichung mit der Gleichung in (55.) multiplicirt:

$$\frac{1}{k} = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 A^4\cdot\frac{(V-V^{-1})(Vq^{\frac{1}{2}} - V^{-1}q^{-\frac{1}{2}})}{4(1-V^{-2})(1-qV^2)}$$

$$= -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 A^4\cdot\frac{(1-V^{-2})(qV^2-1)}{4V^{-1}Vq^{\frac{1}{2}}(1-V^{-2})(1-qV^2)},$$

d. i.

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 A^4\cdot\frac{1}{4q^{\frac{1}{2}}},\quad A = \left(\frac{\pi}{K}\right)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{8}}k^{-\frac{1}{4}} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Verbindet man nun diese Gleichung mit den drei in (55.) zwischen α, α', β, β' gefundenen Gleichungen; so erhält man:

$$\alpha^6 = 2q^{\frac{1}{2}}k'k^{-\frac{1}{2}},$$

$$\alpha'^6 = \left(\frac{K}{\pi}\right)^3 q^{-\frac{1}{2}}(2kk'),$$

$$\beta^6 = 2q^{\frac{1}{2}}(kk')^{-\frac{1}{2}},$$

$$\beta'^6 = \tfrac{1}{2}k(k'q)^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich

$$B = \frac{\alpha}{\beta'} = 2^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{8}}\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$D = \frac{\alpha}{\beta} = (k')^{\frac{1}{4}}.$$

Hiernach werden also die Formeln in (54.), da

$$F(k, \omega) = \frac{2K\psi}{\pi}, \quad \omega = A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)$$

ist,

$$\frac{\sin A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)}{\sin\psi} =$$

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1-2q^2\cos 2\psi + q^4}{1-2q\cos 2\psi + q^2} \cdot \frac{1-2q^4\cos 2\psi + q^8}{1-2q^3\cos 2\psi + q^6} \cdot \frac{1-2q^6\cos 2\psi + q^{12}}{1-2q^5\cos 2\psi + q^{10}} \cdots,$$

$$\frac{\cos A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)}{\cos\psi} =$$

$$2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+2q^2\cos 2\psi + q^4}{1-2q\cos 2\psi + q^2} \cdot \frac{1+2q^4\cos 2\psi + q^8}{1-2q^3\cos 2\psi + q^6} \cdot \frac{1+2q^6\cos 2\psi + q^{12}}{1-2q^5\cos 2\psi + q^{10}} \cdots,$$

$$\Delta\left(k, A\left(\frac{2K\psi}{\pi}\right)\right) =$$

$$(k')^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+2q\cos 2\psi + q^2}{1-2q\cos 2\psi + q^2} \cdot \frac{1+2q^3\cos 2\psi + q^6}{1-2q^3\cos 2\psi + q^6} \cdot \frac{1+2q^5\cos 2\psi + q^{10}}{1-2q^5\cos 2\psi + q^{10}} \cdots$$

Entwickelt man das Product

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\ldots.$$

in eine Reihe, so erhält man die Reihe

$$1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\ldots\ldots,$$

in welcher die Exponenten von q von der Form $\frac{1}{2}(3n^2 \pm n)$ sind (Product. 2.). Die Summe dieser Reihe ist also

$$= \alpha\alpha' = \left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (2kk')^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{1}{4}} q^{-\frac{1}{24}}.$$

Sehr viele andere hierher gehörende merkwürdige Formeln s. m. bei Legendre a. a. O. p. 93—138.

XXI. Abels allgemeines Theorem über eine besondere Klasse von Functionen, von denen die elliptischen Functionen ein besonderer Fall sind.

58. Seyen fx und φx zwei beliebige ganze rationale Functionen von x, und

$$\psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}},$$

wo α eine constante Größe bezeichnet. Zerlegt man nun φx auf willkührliche Weise in zwei ganze rationale Factoren $\varphi_1 x$ und und $\varphi_2 x$, so daß $\varphi x = \varphi_1 x . \varphi_2 x$ ist, und setzt

$$\Theta x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$
$$\Theta_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_m x^m,$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$ beliebige Größen bezeichnen, die, selbst veränderlich, alle von einer neuen veränderlichen Größe y abhängig gedacht, übrigens auch zum Theil als constant angenommen werden können; so ist für

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\mu),$$

wo A nicht von x abhängt, jederzeit

$$\varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \varepsilon_4 \psi x_4 + \ldots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu = C - \frac{fa}{\sqrt{\varphi a}} l \frac{\Theta a \sqrt{\varphi_1 a} + \Theta_1 a \sqrt{\varphi_2 a}}{\Theta a \sqrt{\varphi_1 a} - \Theta_1 a \sqrt{\varphi_2 a}} + K\left\{\frac{fx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}\right\},$$

indem zur Erklärung der in dieser Formel gebrauchten Zeichen nun noch Folgendes zu bemerken ist. Die Coefficienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots \varepsilon_\mu$ sind sämmtlich $= \pm 1$, können aber nicht willkührlich $= +1$ und $= -$ gesetzt werden, sondern sind von den Functionen $\psi x_1, \psi x_2, \psi x_3, \psi x_4, \ldots \psi x_\mu$, in welche sie multiplicirt sind, abhängig. C ist eine constante Größe, und

$$K\left\{\frac{fx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}\right\}$$

bezeichnet den Coefficienten des $\frac{1}{x}$ enthaltenden Gliedes in der Entwickelung von

$$\frac{fx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}$$

nach den absteigenden Potenzen von x. Die durch l bezeichneten Logarithmen sind natürliche. Dieses merkwürdige Theorem hat Abel in Crelles Journal B. III. S. 314., wo dasselbe zuerst mitgetheilt wird, und nach ihm Legendre a. a. O. p. 163. auf folgende Art bewiesen.

Man nehme an, daß $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sämmtlich unter einander ungleich seyen und setze

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x = Fx,$$

so ist, wenn jetzt x irgend eine der Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ bezeichnet, $Fx = 0$; folglich, wenn wir das bloß in Bezug auf x genommene Differential von Fx durch $F'x.\partial x$, das in Bezug auf $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$, d. i. das in Bezug auf y genommene Differential dagegen durch δFx bezeichnen:

$$Fx.\partial x + \delta Fx = 0.$$

Aber, weil $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ von $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$ unabhängig sind,

$$\delta Fx = 2\Theta x \varphi_1 x \delta\Theta x - 2\Theta_1 x \varphi_2 x \delta\Theta_1 x ;$$

folglich

$$F'x . \partial x = -\delta Fx = 2\Theta_1 x \varphi_2 x \delta\Theta_1 x - 2\Theta x \varphi_1 x \delta\Theta x .$$

Da nun

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x = 0 ,$$

also

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x = (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x$$

ist; so ist

$$\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} = \pm \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x} ,$$

oder, wenn wir $\varepsilon = \pm 1$ setzen:

$$\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x} ;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten zuerst mit $\sqrt{\varphi_1 x}$, dann mit $\varepsilon\sqrt{\varphi_2 x}$ multiplicirt:

$$\Theta x \varphi_1 x = \varepsilon \Theta_1 x \sqrt{\varphi_1 x \varphi_2 x} = \varepsilon \Theta_1 x \sqrt{\varphi x} ,$$

$$\Theta_1 x \varphi_2 x = \varepsilon \Theta x \sqrt{\varphi_1 x \varphi_2 x} = \varepsilon \Theta x \sqrt{\varphi x} ;$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$F'x . \partial x = 2\varepsilon \{\Theta x \delta\Theta_1 x - \Theta_1 x \delta\Theta x\} \sqrt{\varphi x} .$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit

$$\frac{\varepsilon f x}{(x-\alpha) F'x \sqrt{\varphi x}} ;$$

so erhält man:

$$\frac{\varepsilon f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{2\{\Theta x \delta\Theta_1 x - \Theta_1 x \delta\Theta x\} f x}{(x-\alpha) F'x} ,$$

oder, wenn man in abkürzender Bezeichnung

$$2\{\Theta x \delta\Theta_1 x - \Theta_1 x \delta\Theta x\} f x = \chi x$$

setzt:

$$\frac{\varepsilon f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{\chi x}{(x-\alpha) F'x} .$$

Man hat hierbei zu bemerken, daß unter der obigen Voraussetzung, nach welcher $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sämmtlich unter einander verschieden sind, $F'x$ nicht $= 0$ ist, wie leicht auf folgende Art gezeigt werden kann. Da x eine beliebige der Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ bezeichnen soll, so wollen wir z. B. $x = x_1$ setzen. Bezeichnen wir nun das Product

$$(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_\mu)$$

durch Φx, so ist

$$Fx = (x-x_1)\Phi x ,$$

$$F'x = (x-x_1)\Phi' x + \Phi x ,$$

also $F'x_1 = \Phi x_1$, und folglich $F'x_1$ nicht $= 0$, da

$$\Phi x_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \ldots (x_1 - x_\mu)$$

nicht $= 0$ ist, weil wir annehmen, daß $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sämmtlich unter einander ungleich sind.

Setzen wir nun für irgend eine durch das Functionszeichen Γ bezeichnete Function Γx von x überhaupt

$$\Gamma x_1 + \Gamma x_2 + \Gamma x_3 + \Gamma x_4 + \ldots + \Gamma x_\mu = \Sigma \Gamma x,$$

so ergiebt sich aus dem Obigen, da x jede der Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ bezeichnen kann, wenn man sich in der Gleichung

$$\frac{\varepsilon f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{\chi x}{(x-\alpha) F' x}$$

für x nach und nach alle Glieder dieser Reihe gesetzt denkt, die entsprechenden Werthe von ε durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\mu$ bezeichnet, und dann auf beiden Seiten addirt, auf der Stelle die Gleichung

$$\Sigma \frac{\varepsilon f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma \frac{\chi x}{(x-\alpha) F' x}.$$

Setzt man jetzt

$$\chi x = (x - \alpha)\, \chi_1 x + \chi \alpha,$$

wo

$$\chi_1 x = \frac{\chi x - \chi \alpha}{x - \alpha}$$

ist, und zugleich erhellet, daß $\chi_1 x$ eine um einen Grad niedrigere ganze rationale Function von x als die ganze rationale Function χx ist; so erhält man nach gehöriger Substitution

$$\Sigma \frac{\varepsilon f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma \frac{\chi_1 x}{F' x} + \chi \alpha \Sigma \frac{1}{(x-\alpha) F' x}.$$

Nach dem Artikel Function (2.) i. d. Z. ist aber

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{(\alpha - x_1) F' x} + \frac{1}{(\alpha - x_2) F' x_2} + \ldots + \frac{1}{(\alpha - x_\mu) F' x_\mu}$$

$$= \Sigma \frac{1}{(\alpha - x) F' x} = -\Sigma \frac{1}{(x-\alpha) F' x}$$

folglich

$$\Sigma \frac{\varepsilon f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = -\frac{\chi \alpha}{F\alpha} + \Sigma \frac{\chi_1 x}{F' x}.$$

Um das zweite Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zu finden, denke man sich den vorher erhaltenen Ausdruck von $\frac{1}{F\alpha}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$ entwickelt; so wird

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Sigma \frac{1}{F' x} + \frac{1}{\alpha^2} \Sigma \frac{x}{F' x} + \frac{1}{\alpha^3} \Sigma \frac{x^2}{F' x} + \ldots,$$

und es ist also überhaupt $\Sigma \frac{x^n}{F' x}$ der Coefficient von $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}$

in der Entwickelung von $\frac{1}{Fa}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{a}$, oder der Coefficient von $\frac{1}{a}$ in der Entwickelung von $\frac{a^n}{Fa}$ nach fallenden Potenzen von a, oder auch, was dasselbe ist, der Coefficient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{x^n}{Fx}$ nach fallenden Potenzen von x. Weil nun nach dem Obigen $\chi_1 x$ eine ganze rationale Function von x ist, so ist offenbar $\Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x}$ der Coefficient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{\chi_1 x}{Fx}$ nach fallenden Potenzen von x, oder, wenn wir überhaupt den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von Γx nach fallenden Potenzen von x durch $K\Gamma x$ bezeichnen,

$$\Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x} = K\frac{\chi_1 x}{Fx}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\chi_1 x = \frac{\chi x - \chi a}{x-a},$$

$$\frac{\chi_1 x}{Fx} = \frac{\chi x}{(x-a)Fx} - \frac{\chi a}{(x-a)Fx};$$

folglich

$$K\frac{\chi_1 x}{Fx} = K\frac{\chi x}{(x-a)Fx} - K\frac{\chi a}{(x-a)Fx}.$$

Weil aber die höchste in Fx enthaltene Potenz der veränderlichen Größe x^μ, in $(x-a)Fx$ also $x^{\mu+1}$ ist, so erhält man durch Entwickelung von

$$\frac{\chi a}{(x-a)Fx}$$

nach den fallenden Potenzen von x offenbar einen Ausdruck von der Form

$$A\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu+1} + B\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu+2} + C\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu+3} + \ldots,$$

wo $\mu+1$ mindestens $=2$ ist. Also ist

$$K\frac{\chi a}{(x-a)Fx} = 0,$$

und folglich

$$\Sigma\frac{\chi_1 x}{F'x} = K\frac{\chi_1 x}{Fx} = K\frac{\chi x}{(x-a)Fx};$$

also nach dem Obigen

$$\Sigma\frac{\varepsilon fx\,\partial x}{(x-a)\sqrt{qx}} = -\frac{\chi a}{Fa} + K\frac{\chi x}{(x-a)Fx}.$$

Aber

$$\chi x = 2fx\{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x\},$$
$$\chi\alpha = 2f\alpha\{\Theta\alpha\,\delta\Theta_1\alpha - \Theta_1\alpha\,\delta\Theta\alpha\},$$
$$Fx = (\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x,$$
$$F\alpha = (\Theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\Theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha,$$

also

$$\Sigma\frac{e fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = -\frac{2f\alpha\{\Theta\alpha\,\delta\Theta_1\alpha - \Theta_1\alpha\,\delta\Theta\alpha\}}{(\Theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\Theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha} + K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\}.$$

Um diese Gleichung und das Folgende gehörig zu verstehen, sind einige Bemerkungen vorauszuschicken. Wir denken uns nach dem Obigen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$ sämmtlich von der einen veränderlichen Größe y abhängig. Weil nun

$$(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\mu)$$

gesetzt ist, so sind $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sämmtlich Functionen von y, und es kann also auch

$$\Sigma\frac{e fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{e_1 fx_1\,\partial x_1}{(x_1-\alpha)\sqrt{\varphi x_1}} + \frac{e_2 fx_2\,\partial x_2}{(x_2-\alpha)\sqrt{\varphi x_2}} + \ldots + \frac{e_\mu fx_\mu\,\partial x_\mu}{(x_\mu-\alpha)\sqrt{\varphi x_\mu}}$$

als bloß von y und ∂y abhängend angesehen werden. Die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung hängt aber ebenfalls bloß von y und ∂y ab, da auch

$$K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\}$$

x nicht enthält, indem diese Größe nur der Coeffcient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung der hinter K stehenden Function nach den fallenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ ist. Beziehen sich daher auch die folgenden Integrale bloß auf die veränderliche Größe y, so ist

$$-\int\Sigma\frac{e fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = C - 2f\alpha\int\frac{\Theta\alpha\,\delta\Theta_1\alpha - \Theta_1\alpha\,\delta\Theta\alpha}{(\Theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\Theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha} + \int K\left\{\frac{2fx}{x-\alpha}\cdot\frac{\Theta x\,\delta\Theta_1 x - \Theta_1 x\,\delta\Theta x}{(\Theta x)^2\varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2\varphi_2 x}\right\},$$

da fα offenbar kein y enthält und folglich constant ist.

Setzen wir nun aber, wenn man in Bezug auf x als veränderliche Größe integrirt, überhaupt

$$\int \frac{f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \psi x ,$$

also

$$\int \frac{e f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = e \psi x ;$$

so ist offenbar, wenn die in

$$\int \Sigma \frac{e f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} =$$

$$\int \frac{e_1 f x_1 \partial x_1}{(x_1-\alpha)\sqrt{\varphi x_1}} + \int \frac{e_2 f x_2 \partial x_2}{(x_2-\alpha)\sqrt{\varphi x_2}} + \cdots + \int \frac{e_\mu f x_\mu \partial x_\mu}{(x_\mu-\alpha)\sqrt{\varphi x_\mu}}$$

enthaltenen Integrale in Bezug auf y genommen werden, wie es nach dem Vorhergehenden geschehen soll,

$$\int \Sigma \frac{e f x \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = e_1 \psi x_1 + e_2 \psi x_2 + e_3 \psi x_3 + \cdots + e_\mu \psi x_\mu .$$

Ferner ist nach dem Obigen mit Vernachlässigung aller übrigen Glieder in der Entwickelung der nachstehenden Function nach absteigenden Potenzen von x:

$$\frac{2 f x}{x-\alpha} \cdot \frac{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x}{(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x}$$

$$= \ldots + \frac{1}{x} K \left\{ \frac{2 f x}{x-\alpha} \cdot \frac{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x}{(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x} \right\} + \ldots ;$$

folglich, wenn man in Bezug auf y als veränderliche Größe integrirt, da in dieser Beziehung $x-\alpha$, fx, x constant sind:

$$\frac{2 f x}{x-\alpha} \int \frac{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x}{(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x}$$

$$= \ldots + \frac{1}{x} \int K \left\{ \frac{2 f x}{x-\alpha} \cdot \frac{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x}{(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x} \right\} + \ldots ,$$

und daher

$$K \left\{ \frac{2 f x}{x-\alpha} \int \frac{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x}{(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x} \right\} = \int K \left\{ \frac{2 f x}{x-\alpha} \cdot \frac{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x}{(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x} \right\} .$$

Hieraus ergiebt sich nun nach dem Obigen die Gleichung:

$$e_1 \psi x_1 + e_2 \psi x_2 + e_3 \psi x_3 + \ldots + e_\mu \psi x_\mu$$

$$= C - 2 f \alpha \int \frac{\Theta \alpha \delta \Theta_1 \alpha - \Theta_1 \alpha \delta \Theta \alpha}{(\Theta \alpha)^2 \varphi_1 \alpha - (\Theta_1 \alpha)^2 \varphi_2 \alpha}$$

$$+ K \left\{ \frac{2 f x}{x-\alpha} \int \frac{\Theta x \delta \Theta_1 x - \Theta_1 x \delta \Theta x}{(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x} \right\} .$$

Weil aber $\varphi_1 \alpha$, $\varphi_2 \alpha$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ offenbar als constant zu betrachten sind, so ist, weil, wie leicht durch Differentiation erhellet, allgemein

$$\int \frac{p \partial q - q \partial p}{p^2 m - q^2 n} = \frac{1}{2\sqrt{mn}} l \frac{p\sqrt{m} + q\sqrt{n}}{p\sqrt{m} - q\sqrt{n}}$$

ist:

$$\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu$$
$$= C - \frac{fa}{\Gamma\varphi a}\, l\, \frac{\Theta a\,\Gamma\varphi_1 a + \Theta_1 a\,\Gamma\varphi_2 a}{\Theta a\,\Gamma\varphi_1 a - \Theta_1 a\,\Gamma\varphi_2 a}$$
$$+ K\left\{\frac{fx}{(x-a)\,\Gamma\varphi x}\, l\, \frac{\Theta x\,\Gamma\varphi_1 x + \Theta_1 x\,\Gamma\varphi_2 x}{\Theta x\,\Gamma\varphi_1 x - \Theta_1 x\,\Gamma\varphi_2 x}\right\},$$

und dies ist die zu beweisende Formel, welche wir im Folgenden durch (A) bezeichnen wollen. Man hat hierbei zu bemerken, daß nach dem Obigen $\varphi_1 x\varphi_2 x = \varphi x$, $\varphi_1 a\varphi_2 a = \varphi a$ ist. Die speciellen Werthe von ε_1, ε_2, ε_3, $\ldots$ ε_μ, ob nämlich für die einzelnen Glieder dieser Reihe $+1$ oder -1 zu setzen ist, müssen aus den Gleichungen

$$\Theta x_1\,\Gamma\varphi_1 x_1 = \varepsilon_1\,\Theta_1 x_1\,\Gamma\varphi_2 x_1,$$
$$\Theta x_2\,\Gamma\varphi_1 x_2 = \varepsilon_2\,\Theta_1 x_2\,\Gamma\varphi_2 x_2,$$
$$\Theta x_3\,\Gamma\varphi_1 x_3 = \varepsilon_3\,\Theta_1 x_3\,\Gamma\varphi_2 x_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Theta x_\mu\,\Gamma\varphi_1 x_\mu = \varepsilon_\mu\,\Theta_1 x_\mu\,\Gamma\varphi_2 x_\mu$$

bestimmt werden.

Der vorhergehende Beweis dieses merkwürdigen Satzes, den Jacobi (Crelle's Journal B. VIII. S. 414.) mit Recht das große Abelsche Theorem genannt hat, ist auf den Fall eingeschränkt, wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sämmtlich unter einander verschieden sind. Indeß liegt in der Gleichung (A) selbst im Allgemeinen Nichts, wodurch die Nothwendigkeit, dieselbe auf den erwähnten Fall einzuschränken, bedingt würde, und man kann sich, wie es uns scheint, auch durch das folgende einfache Raisonnement überzeugen, daß diese Gleichung auch dann noch gültig bleibt, wenn unter den Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ beliebig viele einander gleiche vorkommen. Die Gleichung (A) gilt nämlich ganz allgemein für alle Werthe von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$, wenn dieselben nach der Bedingung des vorhergehenden Beweises nur alle unter einander verschieden sind. Dies kann aber offenbar nicht anders in dieser Allgemeinheit Statt finden, als wenn diese Gleichung ganz allgemein für jeden Werth der Größe y, von welcher wir uns $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ abhängig gedacht haben, gilt. Dann wird dieselbe offenbar auch dann noch gültig bleiben, wenn man für y solche Werthe setzt, für welche beliebig viele der Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ einander gleich werden. Ich glaube, daß diese einfache Betrachtung zur Rechtfertigung dieser Behauptung hinreichend seyn wird, und halte weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand für überflüssig. Auch Abel und Legendre betrachten bloß den Fall, wenn die genannten Größen sämmtlich unter einander ungleich sind.

Setzt man $x_1 = x_2$, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Theta x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = \varepsilon_1 \Theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = \varepsilon_2 \Theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1};$$

folglich, wenn nicht

$$\Theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = 0$$

ist, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Fände das Letztere Statt, so wäre auch

$$\Theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = 0;$$

folglich offenbar auch

$$\Theta x_1 \varphi_1 x_1 = 0, \quad \Theta_1 x_1 \varphi_2 x_1 = 0,$$

und die ganzen rationalen Functionen

$$\Theta x \varphi_1 x, \quad \Theta_1 x \varphi_2 x$$

hätten also nach bekannten Sätzen der Algebra einen gemeinschaftlichen Factor. Haben also diese Functionen keinen gemeinschaftlichen Factor, so ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, wenn $x_1 = x_2$ ist. Wie sich dies allgemeiner machen läßt, ist klar, und man erhält nun also leicht folgenden Satz:

Wenn

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x = A(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_\mu)^{n_\mu}$$

ist, und die ganzen rationalen Functionen $\Theta x \varphi_1 x$ und $\Theta_1 x \varphi_2 x$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben; so ist

$$\varepsilon_1 n_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 n_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 n_3 \psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu n_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}$$
$$+ K\left\{\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}\right\}.$$

Setzt man $(x-\alpha)fx$ statt fx, so wird $f\alpha$ in vorstehender Gleichung $= 0$, und man erhält, wenn sonst Alles bleibt, wie vorher, für

$$\psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{\sqrt{\varphi x}};$$

$$\varepsilon_1 n_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 n_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 n_3 \psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu n_\mu \psi x_\mu$$
$$= C + K\left\{\frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} l \frac{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}\right\}.$$

Setzt man allgemein

$$fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots + \nu x^n,$$
$$\varphi x = \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \dots + \varrho' x^r$$
$$= x^r\left\{\varrho' + \dots + \frac{\gamma'}{x^{r-2}} + \frac{\beta'}{x^{r-1}} + \frac{\alpha'}{x^r}\right\};$$

so wird

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi x}} = (\varphi x)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{r}{2}}\left\{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \ldots\right\}$$

$$= ax^{-\frac{r}{2}} + bx^{-\frac{r}{2}-1} + cx^{-\frac{r}{2}-2} + dx^{-\frac{r}{2}-3} + \ldots;$$

also

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = Ax^{n-\frac{r}{2}-1} + Bx^{n-\frac{r}{2}-2} + Cx^{n-\frac{r}{2}-3} + \ldots$$

Auch ist klar, daß

$$l\frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}},$$

wegen der ganz gleichförmigen Bildung des Zählers und des Nenners, die beide nur in den Zeichen + und — verschieden sind, sich im Allgemeinen in eine Reihe von der Form

$$a' + \frac{b'}{x} + \frac{c'}{x^2} + \frac{d'}{x^3} + \frac{e'}{x^4} + \ldots,$$

also

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} l\frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}$$

sich in eine Reihe von der Form

$$A'x^{n-\frac{r}{2}-1} + B'x^{n-\frac{r}{2}-2} + C'x^{n-\frac{r}{2}-3} + \ldots.$$

entwickeln lassen wird. Ist nun $n < \frac{r}{2}$, $2n < r$, so kann nie für irgend ein positives k, welches auch $= 0$ seyn kann,

$$n - \frac{r}{2} - k - 1 = -1$$

seyn, weil sonst

$$n = \frac{r}{2} + k,$$

d. i. $n \geqq \frac{r}{2}$, $2n \geqq r$ wäre. Ist also $2n < r$, so kommt in obiger Reihe kein $\frac{1}{x} = x^{-1}$ enthaltendes Glied vor, und es ist folglich in diesem Falle

$$K\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} l\frac{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\Theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \Theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}} = 0.$$

Dies führt auf folgenden Satz:

Wenn der Grad der Function $(fx)^2$ kleiner als der Grad von φx ist; so ist, für

$$\psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}},$$

wenn sonst Alles bleibt wie vorher, jederzeit

$$e_1 n_1 \psi x_1 + e_2 n_2 \psi x_2 + e_3 n_3 \psi x_3 + \ldots + e_\mu n_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{fx}{\Gamma\varphi x} l \frac{\Theta\alpha \Gamma\varphi_1 \alpha + \Theta_1 \alpha \Gamma\varphi_2 \alpha}{\Theta\alpha \Gamma\varphi_1 \alpha - \Theta_1 \alpha \Gamma\varphi_2 \alpha}$$

Dies gilt also z. B. immer, wenn $fx = 1$ oder überhaupt eine constante Größe, φx eine beliebige ganze rationale Function von x ist.

Setzt man jetzt $(x-\alpha)fx$ statt fx und bezeichnet den Grad von fx durch n, den Grad von φx durch r, so daß also $n+1$ der Grad von $(x-\alpha)fx$, $2n+2$ der Grad von $(x-\alpha)^2 (fx)^2$ ist; so erhält man mittelst des Obigen leicht folgenden Satz:

Wenn $2n + 2 < r$ ist, so ist für

$$\psi x = \int \frac{fx\,\partial x}{\Gamma\varphi x},$$

immer

$$e_1 n_1 \psi x_1 + e_2 n_2 \psi x_2 + e_3 n_3 \psi x_3 + \ldots + e_\mu n_\mu \psi x_\mu = C,$$

d. i. gleich einer constanten Größe.

Dies gilt also immer, wenn $fx = 1$ oder überhaupt eine constante Größe, φx eine ganze rationale Function des dritten oder eines höheren Grades ist.

59. Um den Zusammenhang dieser allgemeinen Theoreme mit der Theorie der elliptischen Functionen zu zeigen, wollen wir hier nur die Anwendung derselben auf die elliptischen Functionen der ersten Art machen.

Da nach (8.)

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Gamma 1 - k^2 \sin\varphi^2} = \int_0^x \frac{\partial x}{\Gamma(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

ist, wo bekanntlich $x = \sin\varphi$ ist, so übersieht man, indem, wenn wir

$$\varphi x = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

setzen, diese Function vom vierten Grade ist, auf der Stelle, daß hier der in (58.) zuletzt bewiesene Lehrsatz Anwendung findet. Zerlegen wir nun φx in die beiden Factoren

$$\varphi_1 x = 1 - k^2x^2, \quad \varphi_2 x = 1 - x,$$

so kann man, wenn

$$x_1 = \sin\varphi_1, \; x_2 = \sin\varphi_2, \; x_3 = \sin\varphi_3, \; , \; x_4 = \sin\varphi_4$$

beliebige als gegeben zu betrachtende Größen bezeichnen, für

$$\Theta x = a + a_1 x, \quad \Theta_1 x = c + c_1 x,$$

die Coefficienten a, a_1, c, c_1, offenbar so bestimmen, daß der Gleichung

$$(\Theta x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_1 x)^2 \varphi_2 x$$
$$= (a + a_1 x)^2 (1 - k^2x^2) - (c + c_1 x)^2 (1 - x^2)$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

genügt wird, und folglich nach dem angeführten in (58.) zuletzt bewiesenen Lehrsatze

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) + \varepsilon_4 F(\varphi_4) = C$$

ist. Setzen wir aber $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$, so ist auch

$$F(\varphi_1) = F(\varphi_2) = F(\varphi_3) = F(\varphi_4) = 0 ;$$

folglich in diesem Falle

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) + \varepsilon_4 F(\varphi_4) = 0 .$$

Um nun eine dieser Gleichung entsprechende Bedingungsgleichung zu finden, setze man nach der Reihe

$$x = 1, x = -1, x = \frac{1}{k}, x = -\frac{1}{k} ;$$

so erhält man aus dem Obigen, indem immer $1 - k^2 = k'^2$ gesetzt wird, leicht die Gleichungen

$$(a + a_1)^2 k'^2 = (1-x_1)(1-x^2)(1-x_3)(1-x_4) ,$$
$$(a - a_1)^2 k'^2 = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) ,$$
$$(ck + c_1)^2 k'^2 = (1-kx_1)(1-kx_2)(1-kx_3)(1-kx_4) ,$$
$$(ck - c_1)^2 k'^2 = (1+kx_1)(1+kx_2)(1+kx_3)(1+kx_4) .$$

Für $x = 0$ erhält man

$$a^2 - c^2 = x_1 x_2 x_3 x_4 ,$$

und, wenn man die Coefficienten von x^4 mit einander vergleicht

$$c_1^2 - a_1^2 k^2 = 1 .$$

Multiplicirt man nun die erste und zweite, die dritte und vierte der vier obigen Gleichungen in einander; so erhält man leicht die beiden Gleichungen

$$(a^2 - a_1^2) k'^2 = \pm \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4 ,$$
$$(c_1^2 - c^2 k^2) k'^2 = \pm \Delta(\varphi_1) \Delta(\varphi_2) \Delta(\varphi_3) \Delta(\varphi_4) ,$$

wo die Zeichen sich nicht auf einander beziehen. Nimmt man hierzu nun noch die Gleichungen

$$a^2 - c^2 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 ,$$
$$c_1^2 - a_1^2 k^2 = 1 ;$$

so erhält man, weil

$$(c_1^2 - c^2 k^2) k'^2 + (a^2 - a_1^2) k^2 k'^2 ,$$
$$= (c_1^2 - a_1^2 k^2) k'^2 + (a^2 - c^2) k^2 k'^2$$

ist, die Bedingungsgleichung

$$\pm \Delta(\varphi_1) \Delta(\varphi_2) \Delta(\varphi_3) \Delta(\varphi_4) \pm k^2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4$$
$$= k'^2 + k^2 k'^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 ,$$

wo die obern und untern Zeichen sich nicht auf einander beziehen. Nähme man aber in dem ersten Gliede dieser Gleichung auf der linken Seite des Gleichheitszeichens das untere Zeichen, so wäre, da bekanntlich $\Delta(\varphi_1)$, $\Delta(\varphi_2)$, $\Delta(\varphi_3)$, $\Delta(\varphi_4)$ immer positiv genommen werden, und überhaupt

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{\cos\varphi^2 + k'^2 \sin\varphi^2} ,$$

also $\Delta(\varphi) > \cos\varphi$ ist, die Größe auf der linken Seite unserer obigen Gleichung stets negativ, da doch im Gegentheil die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar stets positiv ist, weil, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, immer $k < 1$ angenommen wird. Man muß also in dem in Rede stehenden Gliede das obere Zeichen nehmen, so daß folglich unsere Bedingungsgleichung

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) \pm k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cos\varphi_4 \\ = k'^2 + k^2k'^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4\end{array}\right\}$$

ist. Für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ wird diese Gleichung

$$1 \pm k^2 = k'^2 .$$

Da nun aber bekanntlich

$$1 - k^2 = k'^2$$

ist, so muß man im zweiten Gliede das untere Zeichen nehmen, und die der Gleichung

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) + \varepsilon_4 F(\varphi_4) = 0$$

entsprechende Bedingungsgleichung ist also

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3)\Delta(\varphi_4) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cos\varphi_4 \\ = k'^2 + k^2k'^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4 .\end{array}\right.$$

Für $\varphi_4 = 0$ ist folglich die der Gleichung

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) = 0$$

entsprechende Bedingungsgleichung:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) - k^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 = k'^2 .$$

Entwickelt man aus dieser Gleichung, nachdem man sie rational gemacht hat, $\cos\varphi_3$; so erhält man

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}{1 - k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2} ,$$

welches also die der Gleichung

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) = 0$$

entsprechende Bedingungsgleichung ist, wo nun aber noch ε_1, ε_2, ε_3 zu bestimmen sind, wozu man leicht durch folgende Betrachtung gelangt. Setzt man nämlich $k = 0$, so erhält man

$$\cos\varphi_3 = \cos(\varphi_1 \mp \varphi_2) ,$$

d. i.

$$\varphi_1 \mp \varphi_2 - \varphi_3 = 0.$$

Diese Gleichung muß mit der Gleichung

$$\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 + \varepsilon_3\varphi_3 = 0 ,$$

welche für $k = 0$ aus der Gleichung

$$\varepsilon_1 F(\varphi_1) + \varepsilon_2 F(\varphi_2) + \varepsilon_3 F(\varphi_3) = 0$$

folgt, übereinstimmen, so daß also

$$\varepsilon_1 = +1, \varepsilon_2 = \mp 1, \varepsilon_3 = -1$$

ist, und folglich die Gleichung

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)}{1-k^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2}$$

der Gleichung

$$F(\varphi_1) \mp F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0$$

oder

$$F(\varphi_3) = F(\varphi_1) \mp F(\varphi_2),$$

mit gegenseitiger Beziehung der Vorzeichen, entspricht, welches ganz mit dem, was wir in (16.) gefunden haben, übereinstimmt.

Das ganze dritte Supplement zu Legendre's Traité des fonctions elliptiques ist der Anwendung des Abel'schen Theorems auf die elliptischen Functionen und andere Integrale gewidmet, so daß wir also hier auf dieses Werk von Neuem verweisen müssen. Da überhaupt die in der Formel

$$\int \frac{fx\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}$$

enthaltenen Transcendenten ähnliche Eigenschaften wie die elliptischen Functionen haben, und gewissermaßen einen höheren Grad der letztern bilden, so hat Legendre dieselben, oder vielmehr, in noch größerer Allgemeinheit, die in der Formel

$$\int \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{\varphi x}}$$

wenn Fx eine beliebige rationale, φx eine beliebige ganze rationale Function bezeichnet, enthaltenen Transcendenten Hyper- oder Ultra-elliptische Functionen (fonctions ultra-elliptiques) genannt, wofür jedoch mit Recht Jacobi den Namen Abelsche Transcendenten vorgeschlagen hat.

XXII. Historische und literarische Bemerkungen.

60. Wenige historische und literarische Bemerkungen mögen diesen schon sehr angewachsenen Artikel beschließen. Ohne der frühern Arbeiten Eulers, Lagranges, Fagnanis und Landens, worüber der Artikel Rectification (63. ff.) verglichen werden kann, und auch in diesem Artikel oben schon Einiges beigebracht worden ist, der Kürze wegen hier weiter zu gedenken, ist sogleich zu bemerken, daß die Theorie der elliptischen Functionen ihre ganze jetzige Gestalt dem berühmten Legendre verdankt, welcher dieselbe während seiner langen rühmlichen wissenschaftlichen Laufbahn nie aus den Augen verloren und in Wahrheit väterlich gepflegt hat. Seine ersten Arbeiten finden sich in den beiden Abhandlungen: Mémoire I sur les intégrations par arc d'ellipse. Mém. de Paris. 1786. p. 616. Mémoire II sur les intégrations par arc d'ellipse et sur la comparaison de ces arcs. Mém. de Paris 1786. p. 644. und in dem besonders erschienenen Mémoire sur les transcendantes ellipti-

ques. Paris. An II. Gesammelt erschienen seine Entdeckungen, mit neuen vermehrt, und in ein System gebracht, in den Exercices de calcul intégral. T. I — III. Paris. 1811 — 1816. Der erste Theil enthält die Theorie der elliptischen Functionen und der Euler'schen Integrale, der zweite Theil andere Untersuchungen aus der Integralrechnung und die Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf Geometrie und Mechanik, der dritte Theil die elliptischen Tafeln. Als eine neue Ausgabe dieses Werks ist zu betrachten: Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. T. I — II. Paris. 1825 — 1826, dessen erster Theil die Theorie, der zweite die Tafeln der elliptischen Functionen und die Anleitung zu deren Berechnung enthält. Jedoch kann man das ältere, verschiedene andere Untersuchungen aus der Integralrechnung enthaltende, Werk eben deshalb neben dem neuern nicht entbehren. Wohl vorzüglich angeregt durch die Erscheinung dieses Werkes, mit dem Legendre seine Laufbahn auf die rühmlichste Weise beschlossen hat, widmeten nun zwei jüngere Mathematiker: Abel und K. G. J. Jacobi ihre Kräfte der Theorie der elliptischen Functionen, und bereicherten dieselbe mit Entdeckungen, die zu den schönsten in der Mathematik überhaupt gehören, und noch weite Aussichten eröffnen. Da von denselben aber schon ausführlich die Rede gewesen ist, so möge hier nur noch die Bemerkung genügen, daß sich die Abhandlungen dieser beiden Mathematiker fast sämmtlich in Crelles Journal T. I — IX. finden, hier aber nicht alle nahmhaft gemacht werden können, und daß Jacobi die seinigen in einem eignen Werke: Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum. Regimonti. 1829., welches unstreitig zu den bedeutendsten neuern Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur gehört, im Zusammenhange bekannt gemacht hat, obgleich auch jetzt schon verschiedene neuere Abhandlungen in Crelles Journal diesem Werke zur Ergänzung dienen müssen. Abel ward zu dem größten Schaden der Wissenschaft vor der Vollendung seines Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. (Crelles Journal T. IV. S. 236. S. 309.), in welchem wir namentlich auch auf das théorème fontamental §. 1., welches mit dem allgemeinen Satze in XXI. zusammenhängt, aufmerksam machen, von einem zu frühen Tode übereilt. Durch die wichtigen Entdeckungen dieser beiden jüngern Mathematiker ward Legendre veranlaßt, seinem Traité des fonctions elliptiques in einem dritten Bande (Paris. 1828.) drei Supplemente folgen zu lassen, deren erstes die beiden Haupttheoreme von Jacobi (s. oben XVIII. XIX.) und deren Anwendung, das zweite die weitere Ausführung dieser Anwendungen zum Gegenstande hat und mit Abels großem Theorem (s. oben XXI.) schließt. Das dritte Supplement ist, wie schon erwähnt, ganz der Anwendung dieses wichtigen Satzes gewidmet. Ueber die Abelschen Transcendenten s. m. auch eine Abhandlung von Richelot in Crelles Journal. T. XII.

Entgegengesetzte Größen. Busse, Vergleichung zwischen Carnots und meiner Ansicht der Algebra. Freib. 1804. Ueber Carnots Géométrie de position. Paris. 1803 (übers. von Schumacher. Altona, 1810.) s. m. den Artikel Lage, wo das Nöthige über dieses wichtige Werk gesagt ist. Andere Schriften über die entgegengesetzten Größen von Wilken's (Brnschwg. 1800.), Förstemann (Nordh. u. Lpzg. 1817.), Herrmann (Wien, 1818.), W. A. Diesterweg (Bonn, 1831.). Vorzüglich s. m. auch Rothe, Systematisches Lehrb. der Arithm. Lpzg. 1804. Zehntes und eilftes Kapitel.

Epicykloide. Magold, Abhandlung über die Epicykloide. Landshut, 1813. Eytelwein handelt in seinem Handbuche der Statik fester Körper. Theil III. Berlin, 1808. S. 16. S. 35. von der gemeinen und sphärischen Epicykloide ausführlich. M. s. auch Caustische Flächen und Linien (25. 29.) i. d. Z.

Ergänzung, dekadische, gleichbedeutend mit dem arithmetischen Complement eines Logarithmen im Art. Complement.

Erzeugende Functionen. 1. Wenn y_x das allgemeine Symbol einer Function von x ist, so heißt der symbolische Ausdruck

$$\ldots + y_{-x}t^{-x} + \ldots + y_{-2}t^{-2} + y_{-1}t^{-1} + y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + \ldots$$

die erzeugende oder generirende Function (fonction génératrice) von y_x, und soll im Folgenden immer durch εy_x bezeichnet werden.

2. Multiplicirt oder dividirt man die erzeugende Function von y_x mit t, t^2, t^3, t^4, ...; so erhält man die Reihen

$$\ldots + y_{-(x+1)}t^{-x} + \ldots + y_{-3}t^{-2} + y_{-2}t^{-1} + y_{-1} + y_0 t + y_1 t^2 + \ldots + y_{x-1}t^x + \ldots;$$
$$\ldots + y_{-(x+2)}t^{-x} + \ldots + y_{-4}t^{-2} + y_{-3}t^{-1} + y_{-2} + y_{-1}t + y_0 t^2 + \ldots + y_{x-2}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x+3)}t^{-x} + \ldots + y_{-5}t^{-2} + y_{-4}t^{-1} + y_{-3} + y_{-2}t + y_{-1}t^2 + \ldots + y_{x-3}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x+4)}t^{-x} + \ldots + y_{-6}t^{-2} + y_{-5}t^{-1} + y_{-4} + y_{-3}t + y_{-2}t^2 + \ldots + y_{x-4}t^x + \ldots,$$
u. s. w. u. s. w.

und

$$\ldots + y_{-(x-1)}t^{-x} + \ldots + y_{-1}t^{-2} + y_0 t^{-1} + y_1 + y_2 t + y_3 t^2 + \ldots + y_{x+1}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x-2)}t^{-x} + \ldots + y_0 t^{-2} + y_1 t^{-1} + y_2 + y_3 t + y_4 t^2 + \ldots + y_{x+2}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x-3)}t^{-x} + \ldots + y_1 t^{-2} + y_2 t^{-1} + y_3 + y_4 t + y_5 t^2 + \ldots + y_{x+3}t^x + \ldots,$$
$$\ldots + y_{-(x-4)}t^{-x} + \ldots + y_2 t^{-2} + y_3 t^{-1} + y_4 + y_5 t + y_6 t^2 + \ldots + y_{x+4}t^x + \ldots,$$
u. s. w. u. s. w.

woraus erhellet, daß allgemein

$$1. \quad \varepsilon y_{x-n} = t^n \varepsilon y_x,$$

und

$$2. \quad \varepsilon y_{x+n} = \frac{\varepsilon y_x}{t^n}$$

ist.

Auch ist, wie man auf der Stelle übersieht

$$3.\quad \varepsilon(y_x \pm z_x) = \varepsilon y_x \pm \varepsilon z_x .$$

Also ist ferner

$$\varepsilon(y_{x+1} - y_x) = \varepsilon y_{x+1} - \varepsilon y_x = \frac{\varepsilon y_x}{t} - \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)\varepsilon y_x ;$$

und folglich, wenn wir

$$y_{x+1} - y_x = \Delta y_x$$

setzen:

$$4.\quad \varepsilon \Delta y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)\varepsilon y_x .$$

Folglich

$$\varepsilon\Delta^2 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon\Delta y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \varepsilon y_x ,$$

$$\varepsilon\Delta^3 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon\Delta^2 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^3 \varepsilon y_x ,$$

$$\varepsilon\Delta^4 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\varepsilon\Delta^3 y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)^3 \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^4 \varepsilon y_x ,$$

u. s. w. u. s. w.

d. i. allgemein

$$5.\quad \varepsilon\Delta^n y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \varepsilon y_x .$$

Aus (1.) und (5.) folgt

$$6.\quad \varepsilon\Delta^n y_{x-m} = t^m \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \varepsilon y_x ,$$

und aus (2.) und (5.) ergiebt sich

$$7.\quad \varepsilon\Delta^n y_{x+m} = t^{-m} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \varepsilon y_x .$$

Ist a eine constante Größe, so ist offenbar immer

$$8.\quad \varepsilon(a y_x) = a\,\varepsilon y_x .$$

Bezeichnen wir nun mit Laplace die Function

$$a y_x + a' y_{x+1} + a'' y_{x+2} + \ldots + a^{(n)} y_{x+n}$$

durch ∇y_x; so ist nach (3.), (8.) und (2.)

$$\varepsilon\nabla y_x = a\varepsilon y_x + a'\varepsilon y_{x+1} + a''\varepsilon y_{x+2} + \ldots + a^{(n)}\varepsilon y_{x+n}$$

$$= a\varepsilon y_x + a'\frac{\varepsilon y_x}{t} + a''\frac{\varepsilon y_x}{t^2} + \ldots + a^{(n)}\frac{\varepsilon y_x}{t^n} ;$$

also

$$9.\quad \varepsilon\nabla y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}\varepsilon y_x .$$

Bezeichnet man ferner das, was aus ∇y_x wird, wenn man

∇y_x für y_x setzt, durch $\nabla^2 y_x$, das, was aus $\nabla^2 y_x$ wird, wenn man $\nabla^2 y_x$ für ∇y_x setzt, durch $\nabla^3 y_x$; das, was aus $\nabla^3 y_x$ wird, wenn man $\nabla^3 y_x$ für $\nabla^2 y_x$ setzt, durch $\nabla^4 y_x$, u. s. w.; so ist nach (9.)

$$e\nabla^2 y_x =$$
$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} e\nabla y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^2 e y_x ,$$
$$e\nabla^3 y_x =$$
$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} e\nabla^2 y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^3 e y_x ,$$
$$e\nabla^4 y_x =$$
$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} e\nabla^3 y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^4 e y_x ;$$
u. s. w. u. s. w.;

also allgemein

$$10.\quad e\nabla^p y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p e y_x .$$

Nach (6.) und (7.) ist nun

$$e\Delta^q \nabla^p y_{x-m} = t^m \left(\frac{1}{t} - 1\right)^q e\nabla^p y_x , \quad e\Delta^q \nabla^p y_{x+m} = t^{-m} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^q e\nabla^p y_x ;$$

folglich nach (10.)

$$11.\quad e\Delta^q \nabla^p y_{x-m} = t^m \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p \left(\frac{1}{t} - 1\right)^q e y_x ,$$

$$12.\quad e\Delta^q \nabla^p y_{x+m} = t^{-m} \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t} + .. + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p \left(\frac{1}{t} - 1\right)^q e y_x .$$

3. Setzen wir jetzt

$$s^p = \alpha + \frac{\alpha'}{t} + \frac{\alpha''}{t^2} + \frac{\alpha'''}{t^3} + ... + \frac{\alpha^{(k)}}{t^k} ;$$

so kann man mit der größten Leichtigkeit den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $s^p e y_x$ finden. Nach (9.) ist nämlich, wenn wir jetzt

$$\nabla y_x = \alpha y_x + \alpha' y_{x+1} + \alpha'' y_{x+2} + \ldots + \alpha^{(k)} y_{x+k}$$

setzen:

$$e\nabla y_x = \left\{\alpha + \frac{\alpha'}{t} + \frac{\alpha''}{t^2}\alpha + \frac{\alpha'''}{t^3} + \ldots + \frac{\alpha^{(k)}}{t^k}\right\} e y_x = s^p e y_x ,$$

und folglich nach der in (1.) gegebenen Definition der erzeugenden Functionen offenbar

$$\alpha y_x + \alpha' y_{x+1} + \alpha'' y_{x+2} + \ldots \alpha^{(k)} y_{x+k}$$

der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $s^p e_x y$, welchen man aus

$$s^p = \alpha + \frac{\alpha'}{t} + \frac{\alpha''}{t^2} + \frac{\alpha'''}{t^3} + \ldots + \frac{\alpha^{(k)}}{t^k} .$$

durch ein ganz mechanisches Verfahren finden kann, indem man nämlich y_x für $\frac{1}{t}$ schreibt, wodurch man

$$\alpha(y_x)^0 + \alpha'(y_x)^1 + \alpha''(y_x)^2 + \alpha'''(y_x)^3 + \ldots + \alpha^{(k)}(y_x)^k$$

erhält. Schreibt man nun hierin für

$$(y_x)^0, (y_x)^1, (y_x)^2, (y_x)^3, \ldots (y_x)^k$$

respective

$$y_x; y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}, \ldots y_{x+k};$$

so erhält man den gesuchten Coefficienten

$$\alpha y_x + \alpha' y_{x+1} + \alpha'' y_{x+2} + \alpha''' y_{x+3} + \ldots \alpha^{(k)} y_{x+k}$$

von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$. Wäre z. B.

$$s = \frac{1}{t} - 1,$$

so wäre nach dem binomischen Lehrsatze

$$s^p = \frac{1}{t^p} - \frac{p}{1}\cdot\frac{1}{t^{p-1}} + \frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{t^{p-2}} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{t^{p-3}} + \ldots,$$

und folglich

$$(y_x)^p - \frac{p}{1}(y_x)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}(y_x)^{p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(y_x)^{p-3} + \ldots.$$

der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$, wenn man nur in diesem Ausdruck für $(y_x)^p$, $(y_x)^{p-1}$, $(y_x)^{p-2}$, ... respective y_{x+p}, y_{x+p-1}, y_{x+p-2}, ... schreibt, wodurch man für den in Rede stehenden Coefficienten auf der Stelle den Ausdruck

$$y_{x+p} - \frac{p}{1}y_{x+p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}y_{x+p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}y_{x+p-3} + \ldots.$$

erhält.

Weil nun nach (5.)

$$\varepsilon \Delta^p y_x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^p \varepsilon y_x = s^p \varepsilon y_x$$

und nach der Definition der generirenden Functionen $\Delta^p y_x$ der Coefficient von t^x in $\varepsilon \Delta^p y_x$, also auch der Coefficient von t^x in $s^p \varepsilon y_x$ ist; so ist nach dem Vorhergehenden

13. $\Delta^p y_x =$

$$y_{x+p} - \frac{p}{1}y_{x+p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}y_{x+p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}y_{x+p-3} + \ldots.,$$

woraus man sieht, mit welcher Leichtigkeit man diesen auch sonst (s. z. B. Differenzen-Rechnung 1. i. d. Z.) bekannten Ausdruck mittelst der Theorie der generirenden Functionen erhält.

Entwickelt man

$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\}^p$$

nach Potenzen von $\frac{1}{t}$, schreibt in der Entwickelung y_x für $\frac{1}{t}$, und setzt dann wieder für $(y_x)^0$, $(y_x)^1$, $(y_x)^2$, ... respective y_x, y_{x+1}, y_{x+2} ...., so erhält man den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von

$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \cdots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} \varepsilon y_x .$$

Weil aber nach (10.)

$$s\nabla^p y_x = \left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \cdots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} \varepsilon y_x ,$$

und nach der Erklärung der generirenden Functionen $\nabla^p y_x$ der Coefficient von t^x in $s\nabla^p y_x$, also auch in

$$\left\{a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \cdots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right\} \varepsilon y_x$$

ist; so erhält man durch die gezeigte Entwickelung dieses Coefficienten zugleich $\nabla^p y_x$, so wie man vorher $\Delta^p y_x$ erhielt.

4. Wenn s^p nach den Potenzen von $\frac{1}{t} - 1$ entwickelt ist; so kann man den Coefficienten von t^x in $s^p \varepsilon y_x$ noch auf eine andere Art finden und auf einen andern Ausdruck bringen. Ist nämlich

$$s^p = \alpha + \alpha'\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \alpha''\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \cdots + \alpha^{(k)}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^k ;$$

so ist

$$s^p \varepsilon y_x = \alpha \varepsilon y_x + \alpha'\left(\frac{1}{t} - 1\right)\varepsilon y_x + \alpha''\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \varepsilon y_x + \cdots + \alpha^{(k)}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^k \varepsilon y_x ,$$

und folglich nach (5.)

$$s^p \varepsilon y_x = \alpha \varepsilon y_x + \alpha' \varepsilon \Delta y_x + \alpha'' \varepsilon \Delta^2 y_x + \alpha''' \varepsilon \Delta^3 y_x + \cdots + \alpha^{(k)} \varepsilon \Delta^k y_x .$$

Da nun nach der Theorie der generirenden Functionen y_x, Δy_x, $\Delta^2 y_x$, ... $\Delta^k y_x$ respective die Coefficienten von t^x in den Functionen εy_x, $\varepsilon \Delta y_x$, $\varepsilon \Delta^2 y_x$, ... $\varepsilon \Delta^k y_x$ sind; so ist

$$\alpha y_x + \alpha' \Delta y_x + \alpha'' \Delta^2 y_x + \alpha''' \Delta^3 y_x + \cdots + \alpha^{(k)} \Delta^k y_x$$

der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$, und dieser Coefficient wird aus dem obigen Ausdruck von s^p auf folgende Art durch ein ganz mechanisches Verfahren gefunden. Man setzt nämlich in dem obigen Ausdrucke von s^p Δy_x für $\frac{1}{t} - 1$. Dadurch erhält man

$$\alpha(\Delta y_x)^0 + \alpha'(\Delta y_x)^1 + \alpha''(\Delta y_x)^2 + \alpha'''(\Delta y_x)^3 + \cdots + \alpha^{(k)}(\Delta y_x)^k .$$

Setzt man nun ferner für

$$(\Delta y_x)^0, (\Delta y_x)^1, (\Delta y_x)^2, (\Delta y_x)^3, \ldots (\Delta y_x)^k$$

respective

$$\Delta^1 y_x,\ \Delta^1 y_x,\ \Delta^2 y_x,\ \Delta^3 y_x,\ \ldots,\ \Delta^k y_x$$

oder

$$y_x,\ \Delta y_x,\ \Delta^2 y_x,\ \Delta^3 y_x,\ \ldots.\ \Delta^k y_x\ ;$$

so erhält man

$$\alpha y_x + \alpha' \Delta y_x + \alpha'' \Delta^2 y_x + \alpha''' \Delta^3 y_x + \ldots. + \alpha^{(k)} \Delta^k y_x\ ,$$

welches der oben gefundene Ausdruck für den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$ ist, der also aus dem obigen nach Potenzen von $\frac{1}{t} - 1$ entwickelten Ausdrucke von s^p durch ein ganz mechanisches Verfahren abgeleitet werden kann.

Setzt man z. B. $s = \frac{1}{t}$, also

$$s = 1 + \left(\frac{1}{t} - 1\right);$$

so ist

$$s^p = 1 + \frac{p}{1}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{p(p-1)}{1.2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \ldots.$$

Setzt man nun Δy_x für $\frac{1}{t} - 1$, so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$(\Delta y_x)^0 + \frac{p}{1}(\Delta y_x)^1 + \frac{p(p-1)}{1.2}(\Delta y_x)^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\Delta y_x)^3 + \ldots.,$$

und hieraus erhält man durch die oben angezeigte Verwandlung für den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$ die Formel

$$y_x + \frac{p}{1}\Delta y_x + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 y_x + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x + \ldots..$$

Nach (2.) ist nun

$$\varepsilon y_{x+p} = \frac{\varepsilon y_x}{t^p} = s^p \varepsilon y_x\ ,$$

und nach der allgemeinen Definition der generirenden Functionen ist y_{x+p} der Coefficient von t^x in εy_{x+p}, also auch in der Entwickelung von $s^p \varepsilon y_x$. Folglich ist nach dem Obigen

14. $$y_{x+p} = y_x + \frac{p}{1}\Delta y_x + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 y_x + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x + \ldots.;$$

eine auch sonst aus der Differenzenrechnung bekannte Formel, die sich also auch mittelst der Theorie der generirenden Functionen sehr leicht ergiebt.

5. Denken wir uns jetzt

$$\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^m \varepsilon y_x = \left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^n - 1\right\}^m \varepsilon y_x$$

nach Potenzen von $\frac{1}{t} - 1$ entwickelt, und setzen zu dem Ende

$$\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m \varepsilon y_x =$$

$$\left\{\alpha\left(\frac{1}{t}-1\right)^m + \alpha'\left(\frac{1}{t}-1\right)^{m+1} + \alpha''\left(\frac{1}{t}-1\right)^{m+2} + \ldots\right\}\varepsilon y_x ;$$

so ist nach (5.)

$$\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m \varepsilon y_x = \alpha\varepsilon\Delta^m y_x + \alpha'\varepsilon\Delta^{m+1} y_x + \alpha''\varepsilon\Delta^{m+2} y_x + \ldots\ldots ,$$

und folglich der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m \varepsilon y_x$ nach der Definition der generirenden Functionen

$$\alpha\Delta^m y_x + \alpha'\Delta^{m+1} y_x + \alpha''\Delta^{m+2} y_x + \ldots\ldots$$

Nun ist aber, weil nach dem Obigen

$$\left\{\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^n - 1\right\}^m =$$

$$\alpha\left(\frac{1}{t}-1\right)^m + \alpha'\left(\frac{1}{t}-1\right)^{m+1} + \alpha''\left(\frac{1}{t}-1\right)^{m+2} + \ldots$$

ist, offenbar

$$\{(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m = \alpha(\Delta y_x)^m + \alpha'(\Delta y_x)^{m+1} + \alpha''(\Delta y_x)^{m+2} + \ldots ,$$

und man erhält folglich offenbar den Coefficienten von t^x in der Entwickelung von $\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^m \varepsilon y_x$, wenn man

$$\{(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m$$

nach Potenzen von Δy_x entwickelt, und dann allgemein $\Delta^k y_x$ für $(\Delta y_x)^k$ schreibt.

Nach (2.) ist aber

$$\varepsilon y_{x+n} = \frac{\varepsilon y_x}{t^n} ;$$

also

$$\varepsilon y_{x+n} - \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)\varepsilon y_x ,$$

d. i. nach (3.)

$$15.\quad \varepsilon(y_{x+n} - y_x) = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)\varepsilon y_x ,$$

oder, wenn wir

$$y_{x+n} - y_x = \Delta_1 y_x$$

setzen:

$$16.\quad \varepsilon\Delta_1 y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)\varepsilon y_x .$$

Folglich

$$\varepsilon\Delta_1^2 y_x =$$

$$\left(\frac{1}{t^n}-1\right)\varepsilon\Delta_1 y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)\left(\frac{1}{t^n}-1\right)\varepsilon\Delta_1 y_x = \left(\frac{1}{t^n}-1\right)^2 \varepsilon y_x ,$$

$$\varepsilon \Delta_1^3 y_x =$$

$$\left(\frac{1}{t^a}-1\right)\varepsilon\Delta_1^2 y_x = \left(\frac{1}{t^a}-1\right)\left(\frac{1}{t^a}-1\right)^2 \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t^a}-1\right)^3 \varepsilon y_x ,$$

$$\varepsilon \Delta_1^4 y_x =$$

$$\left(\frac{1}{t^a}-1\right)\varepsilon\Delta_1^3 y_x = \left(\frac{1}{t^a}-1\right)\left(\frac{1}{t^a}-1\right)^3 \varepsilon y_x = \left(\frac{1}{t^a}-1\right)^4 \varepsilon y_x ,$$

u. s. w. u. s. w.

d. i. allgemein

$$17.\quad \varepsilon \Delta_1^m y_x = \left(\frac{1}{t^a}-1\right)^m \varepsilon y_x .$$

Also ist $\Delta^m{}_1 y_x$ der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\left(\frac{1}{t^a}-1\right)^m \varepsilon y_x$, und folglich nach dem Obigen

$$18.\quad \Delta_1^m y_x = \{(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m$$

wenn man nur überall $\Delta^k y_x$ für $(\Delta y_x)^k$ setzt.

Auf ähnliche Art könnte man alle in dem Artikel Differenzenrechnung für die Differenzen und Summen entwickelten Formeln mittelst der Theorie der generirenden Functionen von Neuem beweisen, welches wir jedoch unterlassen, weil diese Formeln a. a. O. streng bewiesen worden sind. Man kann wegen dieser Beweise, die sich allerdings durch ihre Eleganz sehr empfehlen, die am Ende dieses Artikels angeführten Schriften nachsehen.

6. Die Theorie der generirenden Functionen führt auch zu einer sehr allgemeinen Umformung der Reihen. Sey nämlich

$$y_0 + y_1 a + y_2 a^2 + y_3 a^3 + \cdots + y_x a^x + \cdots .$$

die gegebene Reihe. Da nun

$$\frac{1}{1-\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4} + \cdots .$$

ist; so ist

$$\frac{\varepsilon(y_x a^x)}{1-\frac{1}{t}} = \varepsilon(y_x a^x) + \frac{\varepsilon(y_x a^x)}{t} + \frac{\varepsilon(y_x a^x)}{t^2} + \frac{\varepsilon(y_x a^x)}{t^3} + \cdots ;$$

d. i. nach (2.)

$$\frac{\varepsilon(y_x a^x)}{1-\frac{1}{t}} = \varepsilon(y_x a^x) + \varepsilon(y_{x+1} a^{x+1}) + \varepsilon(y_{x+2} a^{x+2}) + \varepsilon(y_{x+3} a^{x+3}) + \cdots$$

Der Coefficient von t_x in der Entwickelung der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist nach der Theorie der generirenden Functionen

$$y_x a^x + y_{x+1} a^{x+1} + y_{x+2} a^{x+2} + y_{x+3} a^{x+3} + \cdots .$$

Also ist dies auch der Coefficient von t^x in der Entwickelung von

$$\frac{\varepsilon(y_x a^x)}{1-\frac{1}{t}}.$$

Die generirende Function $\varepsilon(y_x a^x)$ ist bekanntlich

$$\ldots + y_{-x} a^{-x} t^{-x} + \ldots + y_{-1} a^{-1} t^{-1} + y_0 + y_a t + y_2 a^2 t^2 + \ldots + y_x a^x t^x + \ldots$$

Da nun

$$\frac{\varepsilon(y_x a^x)}{1-\frac{1}{t}} = \varepsilon(y_x a^x) + \frac{\varepsilon(y_x a^x)}{t} + \frac{\varepsilon(y_x a^x)}{t^2} + \frac{\varepsilon(y_x a^x)}{t^3} + \ldots.$$

ist; so ist, wenn wir

$$u = y_0 + y_1 a t + y_2 a^2 t^2 + y_3 a^3 t^3 + \ldots + y_x a^x t^x + \ldots$$

setzen, klar, daß

$$y_x a^x + y_{x+1} a^{x+1} + y_{x+2} a^{x+2} + y_{x+3} a^{x+3} + \ldots$$

auch der Coefficient von t^x in der Entwickelung von

$$\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$$

ist. Setzen wir jetzt

$$a + \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2} + \frac{d}{a^3} + \frac{e}{a^4} + \ldots = k,$$

$$a + \frac{b}{at} + \frac{c}{a^2 t^2} + \frac{d}{a^3 t^3} + \frac{e}{a^4 t^4} + \ldots = z;$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{u(k-z)}{1-\frac{1}{t}} = u\left\{\begin{array}{l} \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2} + \frac{d}{a^3} + \frac{e}{a^4} + \ldots \\ + \frac{1}{t}\left(\frac{c}{a^2} + \frac{d}{a^3} + \frac{e}{a^4} + \ldots\right) \\ + \frac{1}{t^2}\left(\frac{d}{a^3} + \frac{e}{a^4} + \ldots\right) \\ + \frac{1}{t^3}\left(\frac{e}{a^4} + \ldots\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

also, weil

$$\frac{u(k-z)}{\left(1-\frac{1}{t}\right)(k-z)} = \frac{u}{\frac{1}{t}},$$

$$\frac{1}{k-z} = \frac{1}{k} + \frac{z}{k^2} + \frac{z^2}{k^3} + \frac{z^3}{k^4} + \ldots.$$

ist:

$$19.\quad \frac{u}{1-\frac{1}{t}} = u\begin{Bmatrix} \frac{b}{a}+\frac{c}{a^2}+\frac{d}{a^3}+\frac{e}{a^4}+\dots \\ +\frac{1}{t}\left(\frac{c}{a^2}+\frac{d}{a^3}+\frac{e}{a^4}+\dots\right) \\ +\frac{1}{t^2}\left(\frac{d}{a^3}+\frac{e}{a^4}+\dots\right) \\ +\frac{1}{t^3}\left(\frac{e}{a^4}+\dots\right) \\ +\ \dots\dots\dots\dots \end{Bmatrix} \left\{\frac{t}{k}+\frac{z}{k^2}+\frac{z^2}{k^3}+\frac{z^3}{k^4}+\dots\right\}.$$

Der Coefficient von t^x in der Entwickelung der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist also auch

$$y_x a^x + y_{x+1} a^{x+1} + y_{x+2} a^{x+2} + y_{x+3} a^{x+3} + \dots.$$

Für

$$a = a,\ a' = \frac{b}{a},\ a'' = \frac{c}{a^2},\ a''' = \frac{d}{a^3},\ \dots\dots$$

ist aber nach (10.)

$$e\nabla^p(y_x a^x) = \left\{a+\frac{b}{at}+\frac{c}{a^2t^2}+\frac{d}{a^3t^3}+\dots\right\}^p e(y_x a^x) = z^p e(y_x a^x),$$

und nach (2.) ist

$$e\Delta^p(y_{x+n} a^{x+n}) = \frac{e\Delta^p(y_x a^x)}{t^n}.$$

Also ist

$$e\nabla^p(y_{x+n} a^{x+n}) = \frac{z^p e(y_x a^x)}{t^n},$$

und folglich $\nabla^p(y_{x+n} a^{x+n})$ der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\frac{z^p e(y_x a^x)}{t^n}$, woraus sich wie schon oben in einem ähnlichen Falle leicht ergiebt, daß $\nabla^p(y_{x+n} a^{x+n})$ auch der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\frac{u z^p}{t^n}$ ist.

Nun ist aber bekanntlich

$$\begin{aligned}\nabla(y_{x+n} a^{x+n}) &= a y_{x+n} a^{x+n} + a' y_{x+n+1} a^{x+n+1} + a'' y_{x+n+2} a^{x+n+2} + \dots \\ &= a^{x+n}(a y_{x+n} + b y_{x+n+1} + c y_{x+n+2} + d y_{x+n+3} + \dots),\end{aligned}$$

d. i., wenn wir

$$\nabla_1 y_{x+n} = a y_{x+n} + b y_{x+n+1} + c y_{x+n+2} + d y_{x+n+3} + \dots$$

setzen:

$$\nabla(y_{x+n} a^{x+n}) = a^{x+n} \nabla_1 y_{x+n}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}&\nabla^2(y_{x+n} a^{x+n}) = \\ &a\nabla(y_{x+n} a^{x+n}) + a'\nabla(y_{x+n+1} a^{x+n+1}) + a''\nabla(y_{x+n+2} a^{x+n+2}) + \dots \\ &= a^{x+n}\{a\nabla_1 y_{x+n} + b\nabla_1 y_{x+n+1} + c\nabla_1 y_{x+n+2} + \dots\} \\ &= a^{x+n}\nabla_1{}^2 y_{x+n},\end{aligned}$$

$$\nabla^3(y_{x+n}\,a^{x+n}) =$$

$$a\nabla^2(y_{x+n}\,a^{x+n}) + a'\nabla^2(y_{x+n+1}\,a^{x+n+1}) + a''\nabla^2(y_{x+n+2}\,a^{x+n+2}) + \ldots$$
$$= a^{x+n}\{a\nabla_1{}^2 y_{x+n} + b\nabla_1{}^2 y_{x+n+1} + c\nabla_1{}^2 y_{x+n+2} + \ldots\}$$
$$= a^{x+n}\nabla_1{}^3 y_{x+n};$$

u. s. w. u. s. w.

Also ist allgemein

20. $$\nabla^p(y_{x+n}\,a^{x+n}) = a^{x+n}\nabla_1{}^p y_{x+n}.$$

Daher ist $a^{x+n}\nabla_1{}^p y_{x+n}$ der Coefficient von t^x in der Entwickelung von $\frac{u z^p}{t^n}$, und der Coefficient von t^x in der Entwickelung der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (19.) ist folglich

$$\left\{\frac{b}{a}+\frac{c}{a^2}+\frac{d}{a^3}+\frac{e}{a^4}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_x}{k}+\frac{\nabla_1 y_x}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_x}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_x}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{c}{a}+\frac{d}{a^2}+\frac{e}{a^3}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_{x+1}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+1}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+1}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+1}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{d}{a}+\frac{e}{a^2}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_{x+2}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+2}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+2}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+2}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{e}{a}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_{x+3}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+3}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+3}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+3}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nach dem Obigen ist also

21. $$y_x a^x + y_{x+1}a^{x+1} + y_{x+2}a^{x+2} + y_{x+3}a^{x+3} + \ldots\ldots$$
$$=\left\{\frac{b}{a}+\frac{c}{a^2}+\frac{d}{a^3}+\frac{e}{a^4}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_x}{k}+\frac{\nabla_1 y_x}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_x}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_x}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{c}{a}+\frac{d}{a^2}+\frac{e}{a^4}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_{x+1}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+1}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+1}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+1}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{d}{a}+\frac{e}{a^2}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_{x+2}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+2}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+2}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+2}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\left\{\frac{e}{a}+\ldots\right\}a^x\left\{\frac{y_{x+3}}{k}+\frac{\nabla_1 y_{x+3}}{k^2}+\frac{\nabla_1{}^2 y_{x+3}}{k^3}+\frac{\nabla_1{}^3 y_{x+3}}{k^4}+\ldots\right\}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo

$$\nabla_1 y_x = ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + dy_{x+3} + \ldots\ldots,$$

welches eine sehr allgemeine Transformation der Reihe

$$y_x a^x + y_{x+1}a^{x+1} + y_{x+2}a^{x+2} + y_{x+3}a^{x+3} + \ldots\ldots$$

ist, auf welche wir schon im Artikel Umformung der Reihen (32.) hingewiesen haben. Setzt man $x = 0$, so erhält man die Umformung der gegebenen Reihe

$$y_0 + y_1 a + y_2 a^2 + y_3 a^3 + \ldots + y_x a^x + \ldots\ldots$$

Man könnte diese Umformung der Reihen noch allgemeiner machen, worüber man das unten angeführte Werk von Laplace p. 36. nachsehen kann.

7. Die Theorie der erzeugenden Functionen ist eine Schöpfung des eben genannten großen Geometers. Wir haben hier nur die Grundzüge derselben entwickeln können. Man kann dieselbe aber auch auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen ausdehnen, und überhaupt bietet sie, außer den oben angedeuteten, noch ein reiches Feld der schönsten Anwendungen dar, z. B. auch auf die Interpolation der Reihen. Die Quellen, aus denen diese Theorie studirt werden muß, sind eine Abhandlung von Laplace in den Mém. de l'Académie des Sciences. 1779., vorzüglich die Théorie analytique des probabilités. Trois. éd. Paris. 1820. p. 1—88. und Lacroix Traité du calc. diff. et du calc. int. T. III. Chap. IV. Auch s. m. einen kurzen Aufsatz von F. W. Herschel: Consideration of various Points of Analysis in den Philosophical Transactions. 1814. P. II. p. 440.

Euler'sche Integrale, s. den Artikel Bestimmtes Integral (27.) i. d. Z. und außer den dort angeführten Schriften vorzüglich noch Legendres Traité des fonctions elliptiques. T. II. Paris. 1826. p. 366—530.

Euler's Lehrsatz von den Polyedern, s. Vieleckiger Körper (1.).

Evolute, s. Evolution (1.).

Evolution. 1. Um die convexe Seite der Curve AB (Fig. 6.) denke man sich einen völlig biegsamen Faden gelegt und denselben in B nach der Richtung der Berührenden der Curve ausgespannt. Wird nun dieser Faden, indem man ihn immer gespannt erhält, nach und nach von der Curve AB abgewickelt, so wird sein Endpunkt C offenbar eine neue Curve CD beschreiben, welche man die durch Abwickelung der Curve AB Erzeugte oder die Evolvente von AB nennt, indem umgekehrt AB die Evolute von CD heißt. Die Curve AB wird von der Richtung des Fadens stets berührt, so wie auch auf der Stelle erhellet, daß, wenn P' und P zwei zusammengehörende Punkte der Evolute und Evolente sind, jederzeit $PP' = BP' + BC$ oder, für $BP' = s'$ und $BC = a$, $PP' = a + s'$ ist. Die Linie PP' ist ferner jederzeit auf der Evolvente in dem Punkte P normal, und dem Krümmungshalbmesser derselben in diesem Punkte gleich, welches wir nun beweisen wollen.

2. Man bezeichne zu dem Ende die Coordinaten der Punkte P' und P durch x', y' und x, y, und setze $PP' = \Theta$; so ist bekanntlich

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \Theta^2 .$$

Die Gleichung der Linie PP' ist, weil die Evolute von derselben in P' berührt wird, nach dem Artikel Berührung (3.) i. d. Z.

$$Y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(X - x') ;$$

also auch

$$y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(x - x') ,$$

und folglich

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2\right\}(x - x')^2 = \Theta^2 ;$$

also

$$(x - x')^2 = \frac{\Theta^2 \partial x'^2}{\partial x'^2 + \partial y'^2} ,$$

$$(y - y')^2 = \frac{\Theta^2 \partial y'^2}{\partial x'^2 + \partial y'^2} .$$

Weil aber nach (1.)

$$\Theta = a + s' , \quad \partial\Theta = \partial s' ,$$

und bekanntlich $\partial s'^2 = \partial x'^2 + \partial y'^2$ ist; so ist

$$(x - x')^2 = \frac{\Theta^2 \partial x'^2}{\partial\Theta^2} , \quad (y - y')^2 = \frac{\Theta^2 \partial y'^2}{\partial\Theta^2} ;$$

folglich

$$x - x' = \pm \frac{\Theta \partial x'}{\partial\Theta} , \quad y - y' = \pm \frac{\Theta \partial y'}{\partial\Theta} ,$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, weil für

$$x - x' = \pm \frac{\Theta \partial x'}{\partial\Theta} , \quad y - y' = \mp \frac{\Theta \partial y'}{\partial\Theta}$$

offenbar

$$\frac{y - y'}{x - x'} = - \frac{\Theta \partial y'}{\partial\Theta} \cdot \frac{\partial\Theta}{\Theta \partial x'} = - \frac{\partial y'}{\partial x'}$$

wäre, da doch nach dem Obigen immer

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{\partial y'}{\partial x'}$$

ist. Es fragt sich nun bloß noch, ob man die obern oder die untern Zeichen zu nehmen hat. Specialisiren wir, um dies zu entscheiden, ein Mal das Coordinatensystem, so daß wir BC als Axe, B als Anfang der Abscissen und die positiven Abscissen rechts von B annehmen. Dann ist für die einander entsprechenden Punkte B und C der Evolute und Evolvente offenbar $x' = 0$, $y' = 0$; $x = -a$, $y = 0$; also für diese Punkte nach dem Obigen

$$-a = \pm \frac{\Theta \partial x'}{\partial\Theta} .$$

Läßt man aber x' um Etwas wachsen, d. i. nimmt man $\partial x'$ positiv, so wächst offenbar auch Θ, indem sich dann noch ein Theil des Fadens von der Curve abwickelt, und es ist folglich auch $\partial\Theta$, d. i. der Bruch

$$\frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta}$$

positiv. Setzte man nun

$$-a = \frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta},$$

so wäre eine negative Größe einer positiven gleich, welches ungereimt ist. Man darf also nicht die obern, sondern muß die untern Zeichen nehmen, und es ist folglich nach dem Obigen

$$x = x' - \frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta},\ y = y' - \frac{\Theta\partial y'}{\partial\Theta}.$$

Differentiirt man nun nach x', wobei man also $\partial x'$ constant, $\partial^2 x' = 0$ setzt; so wird

$$\partial x = \partial x' - \Theta\partial\left(\frac{\partial x'}{\partial\Theta}\right) - \frac{\partial x'}{\partial\Theta}\partial\Theta,$$

d. i.

$$\partial x = -\Theta\partial\left(\frac{\partial x'}{\partial\Theta}\right),$$

oder

$$\partial x = \frac{\Theta\partial x'\partial^2\Theta}{\partial\Theta^2}.$$

Differentiirt man die Gleichung

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \Theta^2,$$

so wird

$$(x - x')(\partial x - \partial x') + (y - y')(\partial y - \partial y') = \Theta\partial\Theta,$$

d. i.

$$\Theta\partial\Theta = -\frac{\Theta\partial x'}{\partial\Theta}(\partial x - \partial x') - \frac{\Theta\partial y'}{\partial\Theta}(\partial y - \partial y')$$

$$= \frac{\Theta}{\partial\Theta}(\partial x'^2 + \partial y'^2) - \frac{\Theta}{\partial\Theta}(\partial x\partial x' + \partial y\partial y')$$

$$= \Theta\partial\Theta - \frac{\Theta}{\partial\Theta}(\partial x\partial x' + \partial y\partial y'),$$

weil nach dem Obigen

$$\partial x'^2 + \partial y'^2 = \partial s'^2 = \partial\Theta^2$$

ist. Folglich

$$\partial x\partial x' + \partial y\partial y' = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'},\ \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{\partial x}{\partial y}.$$

Nun war

$$Y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(X - x'),$$

$$y - y' = \frac{\partial y'}{\partial x'}(x - x');$$

folglich durch Subtraction

$$Y - y = \frac{\partial y'}{\partial x'}(X - x),$$

oder

$$Y - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(X - x),$$

welches die Gleichung der Linie PP', und nach dem Artikel Berührung (6.) i. d. Z. die Gleichung einer Normale der Evolvente in dem Punkte (x, y) ist. Daher ist, wie behauptet wurde, PP' die Normale der Evolvente in dem Punkte (x, y).

Setzen wir ferner

$$p = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad p' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

und den Krümmungshalbmesser der Evolvente in dem Punkte $(x, y) = \varrho$; so ist bekanntlich nach dem angeführten Artikel (11.) bloß in Bezug auf die absolute Größe

$$\varrho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'}.$$

Aber

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'}, \quad p^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial y'^2};$$

$$1 + p^2 = \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial \Theta^2}{\partial y'^2};$$

$$\partial p = -\partial\left(\frac{\partial x'}{\partial y'}\right) = \frac{\partial x' \partial^2 y'}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial x' \partial^2 y'}{\partial x \partial y'^2},$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^2}{\Theta \partial^2 \Theta}$$

ist:

$$p' = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^2 \partial^2 y'}{\Theta \partial^2 \Theta \partial y'^2}.$$

Folglich

$$\varrho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'} = \frac{\partial \Theta^3}{\partial y'^3} \cdot \frac{\Theta \partial^2 \Theta \partial y'^2}{\partial \Theta^2 \partial^2 y'},$$

d. i.

$$\varrho = \Theta \cdot \frac{\partial \Theta \partial^2 \Theta}{\partial y' \partial^2 y'}.$$

Aber, wenn man die Gleichung

$$\partial \Theta^2 = \partial x'^2 + \partial y'^2$$

differentiirt, da $\partial x'$ constant ist:

$$\partial \Theta \partial^2 \Theta = \partial y' \partial^2 y';$$

folglich $\varrho = \Theta$, wie behauptet wurde.

3. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß die Evolute der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise aller Punkte der Evolvente ist. Nach dem Artikel Berührung (11.) i. d. Z. ist aber, wenn x', y' die Coordinaten des Mittelpunktes des dem Punkte (x, y) der Evolvente entsprechenden Krümmungskreises sind:

$$x' = x - \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad y' = y + \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

der Evolvente, welche als gegeben angesehen wird, die Größen x, y, so erhält man eine Gleichung zwischen x', y', welches die Gleichung der Evolute ist.

Man kann auch umgekehrt aus der Evolute die Evolvente suchen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}},$$

oder nach dem Obigen

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} = \frac{\varrho \partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}.$$

Aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial x'^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}} = \frac{\partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}}.$$

Folglich

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} = \frac{\varrho \partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}},$$

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial^2 y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\varrho \partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{\varrho \partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}}.$$

Also

$$x = x' - \frac{\varrho \partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}}, \quad y = y' - \frac{\varrho \partial y'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}};$$

oder, weil

$$\varrho = \Theta = s' + a, \quad \partial x'^2 + \partial y'^2 = s'^2$$

ist:

$$x = x' - (s' + a)\frac{\partial x'}{\partial s'}, \quad y = y' - (s' + a)\frac{\partial y'}{\partial s'}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen und der gegebenen Gleichung

$$\psi(x', y') = 0$$

der Evolute die Größen x', y'; so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, welches die gesuchte Gleichung der Evolvente ist.

Daß durch Abwickelung einer und derselben Curve unendlich viele Curven erzeugt werden können, versteht sich von selbst, da die constante Größe a willkührlich angenommen werden kann.

Beispiele zu diesen und den vorhergehenden allgemeinen Formeln zu geben, ist hier nicht unser Zweck, da deren schon mehrere in dem entsprechenden Artikel im zweiten Theile vorgekommen sind. Von der Evolvente des Kreises handelt Eytelwein ausführlich in seinem Handbuche der Statik fester Körper. Theil III. Berlin. 1808. S. 50. Einen Aufsatz von A. v. Ettinghausen über Curven, welche ihren Evoluten ähnlich sind, s. m. in der Zeitschrift für Physik und Mathematik. Bd. IX. Wien 1831. S. 178. Eine mit der Lehre von der Abwickelung zusammenhängende Eigenschaft der Cykloide s. m. im Art. Cykloide in d. Z.

4. Bevor wir zu der Theorie der Evolution doppelt gekrümmter Linien übergehen können, müssen wir zuerst von der Abwickelung krummer Flächen handeln, und beginnen daher sogleich mit der sich auf den ersten Blick als richtig darbietenden Bemerkung, daß nicht alle Flächen sich abwickeln, d. h. ohne Bruch und Faltung in eine Ebene ausbreiten lassen, sondern daß vielmehr die abwickelbaren oder developpablen Flächen eine besondere sehr merkwürdige Gattung krummer Flächen bilden. In viele Details über diese Flächen einzugehen, gestattet hier der Raum nicht, und wir müssen uns daher mit der Entwickelung der allgemeinen Bedingungen der Abwickelbarkeit oder Developpabilität der Flächen begnügen.

Man versteht unter developpablen Flächen aber überhaupt solche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen, deren je zwei nächste Lagen immer in einer Ebene sind, so daß also je zwei nächste Lagen der erzeugenden geraden Linie sich entweder schneiden, oder einander parallel sind. Daß solche Flächen sich abwickeln, d. h. ohne Bruch und Faltung in eine Ebene ausbreiten oder niederlegen lassen, ist leicht zu zeigen. Man kann sich nämlich jede auf die obige Art entstandene Fläche aus lauter triangulären oder parallelogrammatischen Elementen zusammengesetzt denken. Läßt man sich nun das erste Element um seine Durchschnittslinie mit dem zweiten Element drehen, bis es in die Ebene des letztern fällt, dreht man hierauf das System dieser beiden Elemente um die Durchschnittslinie des zweiten und dritten Elements, bis es in die Ebene des dritten Elements fällt, u. s. f.; so wird man offenbar durch Fortsetzung dieses Verfahrens die ganze Fläche nach und nach in eine Ebene niederlegen können. Die cylindrischen und conischen Flächen (s. diese Artikel) sind offenbar besondere Arten dieser allgemeinen Klasse krummer Flächen. Die stetige Folge der Durchschnittspunkte der erzeugenden geraden Linie in ihren verschiedenen Lagen bildet auf jeder developpablen Fläche eine Curve von doppelter Krümmung, welche Monge arête de rebroussement de la surface pro-

posée genannt hat, eine Benennung, die von Littrow deutsch durch Wendungscurve, von Brandes durch Knotenkante oder Knotenfurche wiedergegeben worden ist. (Vergl. Einhüllende Curven und Flächen 11. i. d. Z.). Bei den conischen Flächen geht die Wendungscurve in einen Punkt über; bei den cylindrischen Flächen liegen die Punkte der Wendungscurve sämmtlich in unendlicher Entfernung, d. i. es giebt im eigentlichen Sinne keine Wendungscurve.

Es ist klar, daß die erzeugende gerade Linie in allen ihren Lagen die Wendungscurve berühren muß, so daß man also abwickelbare Flächen auch als solche definiren und betrachten kann, die durch eine sich bewegende gerade Linie beschrieben werden, welche bei dieser Bewegung in allen Lagen stets eine gegebene Curve von doppelter Krümmung, die dann die Wendungscurve der beschriebenen Fläche seyn wird, berührt. Wäre die gegebene Curve eine Curve von einfacher Krümmung, so würde die auf diese Weise beschriebene Fläche offenbar die Ebene selbst seyn.

Auch wenn man sich eine Ebene nach einem gewissen Gesetze, etwa so, daß sie immer auf einer gegebenen doppelt gekrümmten Curve normal ist, bewegt denkt, und sich dann die stetige Folge der Durchschnittslinien der auf einander folgenden verschiedenen Lagen der sich bewegenden Ebene vorstellt, wird man eine deutliche Vorstellung von einer abwickelbaren Fläche erhalten, und auch aus dieser Art der Entstehung solcher Flächen eine allgemeine Gleichung derselben ableiten können, wie wir nachher sehen werden.

5. Kehren wir jetzt zunächst zu unserer vorher zuerst gegebenen Definition abwickelbarer Flächen zurück, so ergiebt sich aus derselben unmittelbar als Grundeigenschaft dieser Flächen, daß sie von jeder sie berührenden Ebene nicht bloß in einem einzigen Punkte, sondern in einer stetigen geradlinigen Folge von Punkten, oder, um uns kürzer auszudrücken, in einer geraden Linie berührt werden, und diese Eigenschaft ist es, von welcher wir zunächst bei unsern fernern Untersuchungen über diese Flächen, um sogleich eine allgemeine Gleichung derselben zu finden, ausgehen wollen.

Sey daher

$$z = f(x, y)$$

die allgemeine Gleichung einer developpablen Fläche, und (x, y, z) ein beliebiger aber bestimmter Punkt in derselben. Die Gleichung der durch diesen Punkt gehenden berührenden Ebene ist nach dem Artikel Berührung (22.) i. d. Z.

$$(x' - x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y' - y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (z' - z) = 0,$$

wo wir wohl nicht erst zu erinnern brauchen, daß die Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind. Die erzeugende gerade Linie in ihrer durch den Punkt (x, y, z) bestimmten

Lage wollen wir in der Folge der Kürze wegen durch PQ bezeichnen, und die Gleichung ihrer Projection auf der Ebene der xy mag

$$y' = Px' + Q$$

seyn, wo also P und Q Functionen von x, y, z, oder, weil z eine Function von x, y ist, Functionen von x, y sind. Für ein ganz beliebiges Δx sey nun

$$(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

irgend ein anderer Punkt in der Linie PQ, so sind $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Coordinaten der Projection dieses Punktes auf der Ebene der xy, und es ist folglich, da diese Projection in der Projection der Linien PQ auf derselben Coordinatenebene liegt, nach dem Vorhergehenden

$$y + \Delta y = P(x + \Delta x) + Q\,.$$

Weil aber offenbar auch

$$y = Px + Q$$

seyn muß; so ist

$$\Delta y = P\Delta x$$

für jedes Δx. Die Gleichung der durch den Punkt

$$(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

gehenden Berührungsebene der developpabeln Fläche ist

$$(x' - x - \Delta x)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} + (y' - y - \Delta y)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}$$
$$- (z' - z - \Delta z) = 0\,.$$

Nach der Natur der developpablen Flächen müssen die beiden durch die Punkte

$$(x, y, z) \text{ und } (x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

gehenden Berührungsebenen in eine Ebene zusammenfallen. Stellt man also die obigen Gleichungen dieser beiden Berührungsebenen auf folgende Art dar:

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z' - x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z = 0$$

und

$$x'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} + y'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} - z'$$
$$-(x+\Delta x)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} - (y+\Delta y)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} + (z+\Delta z) = 0;$$

so ist klar, daß für jedes Δx und $\Delta y = P\Delta x$

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

seyn muß. Aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wenn man bloß bei den ersten Gliedern stehen bleibt:

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta y + \ldots,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Delta y + \ldots;$$

folglich für jedes Δx:

$$0 = \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + P\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\}\Delta x + \ldots,$$

$$0 = \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right\}\Delta x + \ldots;$$

also

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + P\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s,\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = t$$

setzen:

$$r + Ps = 0,\ s + Pt = 0.$$

Eliminirt man P, so ergiebt sich:

$$P = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t};$$

folglich

$$s^2 = rt;$$

eine Gleichung, die bei allen developpablen Flächen Statt findet. Da man P hat, und nach dem Obigen

$$y = Px + Q,\ Q = y - Px$$

ist; so ist hierdurch zugleich auch die Gleichung der Projection der durch den beliebigen Punkt (x, y, z) der krummen Fläche gehenden erzeugenden geraden Linie auf der Ebene der xy, diese Linie also selbst der Lage nach bestimmt, weil man natürlich auf dieselbe Weise auch die Gleichungen ihrer Projectionen auf den andern Coordinatenebenen finden kann. Für

$$P = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t}$$

ist die Gleichung der Projection auf der Ebene der xy:

$$y' = Px' + y - Px,$$

wo immer x, y, z als gegebene Größen angesehen werden.

6. Für jede developpable Fläche findet also, wie wir jetzt gesehen haben, die Gleichung $s^2 = rt$ Statt, und es fragt sich nun, ob man auch umgekehrt behaupten kann, daß eine Fläche, für welche diese Gleichung Statt findet, sich abwickeln läßt. Um

diese Frage genügend beantworten zu können, müssen wir die folgenden analytischen Betrachtungen vorausschicken. Wir nehmen also an, daß $s^2 = rt$ oder, was dasselbe ist,

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

sey, und setzen der Kürze wegen die beiden einander gleichen Brüche

$$-\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)} = p\,.$$

Weil nun bekanntlich

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta y\,,$$

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Delta y$$

ist, so ist klar, daß

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

ist, wenn man $\Delta y = p\Delta x$ setzt. Ferner ist

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\Delta y^2\,,$$

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\Delta x \Delta y + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\Delta y^2\,,$$

und folglich, wenn man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)},\ \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = p^2 = \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}$$

setzt, nach leichter Rechnung:

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}\Delta x^2$$

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}\Delta x^2\,.$$

Weil nun für jedes x und y nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

ist; so ist auch, wie man findet, wenn man zuerst nach x, dann nach y differentiirt:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = 0;$$

folglich, wenn man $\Delta y = p\Delta x$ setzt:

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Man kann hieraus auch ein Paar Relationen ableiten, welche für das Folgende von Wichtigkeit sind. Differentiiren wir nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}p = 0$$

zuerst nach x, dann nach y; so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}p + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0;$$

folglich, wenn man die zweite Gleichung mit p multiplicirt und dann beide Gleichungen addirt:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}p + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p^2\\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}\end{aligned}\right\} = 0.$$

Aber für $\Delta y = p\Delta x$ nach dem Obigen

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left\{\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + 2\frac{\partial^3 z'}{\partial x^2\,\partial y}p + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p^2\right\}\Delta x^2,$$

und, wie wir so eben gesehen haben, für diesen Werth von Δy:

$$\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0;$$

also

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}p + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}p^2 = 0.$$

Folglich auch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} = 0,$$

und daher, weil offenbar im Allgemeinen nicht

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

ist, immer

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 .$$

Nun können wir allgemein beweisen, daß immer

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

ist, wenn man $\Delta y = p\Delta x$ setzt. Wir nehmen dieses Gesetz für $n - 1$ als richtig an, und suchen zu zeigen, daß es auch für n gilt. Denken wir uns $\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ nach Principien der Differentialrechnung entwickelt, so ist, wenn wir der Kürze wegen die Binomial-Coefficienten der $(n-1)$ten und nten Potenz respective durch A, B, C, D, ... und A', B', C', D', ... bezeichnen, nachdem $\Delta y = p\Delta x$ gesetzt worden, offenbar

$$0 = \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right) + A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}p + B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}p^2 + C\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}p^3 + \ldots.$$

für jedes x und y. Folglich, wenn man zuerst nach x, dann nach y differentiirt:

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\right) + A\left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}\right)p + B\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}p^2 + C\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-2}\partial y^3}p^3 + \ldots$$

$$+ A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + 2B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + 3C\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}p^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$0 = \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y} + A\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}p + B\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-2}\partial y^3}p^2 + C\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-3}\partial y^4}p^3 + \ldots.$$

$$+ A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + 2B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + 3C\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}p^2\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \ldots$$

Multiplicirt man nun die zweite Gleichung mit p, und addirt dann beide Gleichungen; so erhält man

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\right) + (1 + A)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}p$$

$$+ (A + B)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}p^2$$

$$+ (B + C)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-2}\partial y^3}p^3$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$+ A\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+ 2B\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}p$$

$$+ 3C\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial y^3}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}p^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich, weil nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

ist, nach einem bekannten Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\right) + A'\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y} p + B'\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1} \partial y^2} p^2 + \ldots.$$

Diese Größe ist aber offenbar der durch Δx^n dividirte Werth von $\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ für $\Delta y = p\Delta x$. Also ist

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

für $\Delta y = p\Delta x$.

Denkt man sich ferner $\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ nach Principien der Differentialrechnung entwickelt, und dann $\Delta y = p\Delta x$ gesetzt; so folgt aus der Voraussetzung die Gleichung:

$$0 = \left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) p^n + A\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x} p^{n-1} + B\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-2} \partial x^2} p^{n-2} + \ldots.$$

Differentiirt man nach y und x, so kommt:

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}\right) p^n + A\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} p^{n-1} + B\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n-1} \partial x^2} p^{n-2} + \ldots.$$

$$+ n\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) p^{n-1}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + (n-1) A\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x} p^{n-2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \ldots$$

$$0 = \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} p^n + A\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n-1} \partial x^2} p^{n-1} + B\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n-2} \partial x^3} p^{n-2} + \ldots.$$

$$+ n\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) p^{n-1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + (n-1) A\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x} p^{n-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \ldots$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung mit p und addirt dann, so kommt

$$0 = \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}\right) p^{n+1} + (1 + A)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} p^n + \ldots$$

$$+ (A + B)\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n-1} \partial x^2} p^{n-1}$$

$$+ (B + C)\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-2} \partial x^3} p^{n-2}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ n\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} p^{n-1}$$

$$+ (n-1) A\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-1} \partial x}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} p^{n-2}$$

$$+ (n-2) B\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-2} \partial x^2}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} p^{n-3}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

woraus wieder ganz eben so wie vorher

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

folgt, für $\Delta y = p\Delta x$.

Nach dem Obigen war aber

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0;\ \partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,\ \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

für $\Delta y = p\Delta x$; also ist allgemein

$$\partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \partial^n\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

für $\Delta y = p\Delta x$.

Weil nun bekanntlich

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{1} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{1.2} + \frac{\partial^3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{1.2.3} + \ldots;$$

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{1} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{1.2} + \frac{\partial^3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{1.2.3} + \ldots$$

ist; so ist

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\ \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

für $\Delta y = p\Delta x$.

Ferner ist bekanntlich

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y;$$

also, da Δx und Δy als constant zu betrachten sind, durch successive Differentiation:

$$\partial^2 z = \partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\Delta x + \partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\Delta y;$$

$$\partial^3 z = \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\Delta x + \partial^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\Delta y;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\partial^n z = \partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\Delta x + \partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\Delta y;$$

wobei wir folgende zwei allgemeine Sätze aus der Differentialrechnung in Erinnerung bringen. Ist nämlich z eine Function zweier veränderlicher Größen und $Z = az$, so ist

$$\partial Z = a\partial_x z + a\partial_y z = a(\partial_x z + \partial_y z);$$

d. i.

$$\partial Z = a\partial Z .$$

Sind ferner z und u Functionen von x und y, so ist für $Z = z + u$:

$$\begin{aligned}\partial Z &= \partial_x(z+u) + \partial_y(z+u)\\ &= \partial_x z + \partial_x u + \partial_y z + \partial_y u\\ &= (\partial_x z + \partial_y z) + (\partial_x u + \partial_y u) ,\end{aligned}$$

d. i.

$$\partial Z = \partial z + \partial u .$$

Auf diese beiden Sätze gründet sich die obige Entwickelung von $\partial^n z$. Weil nun

$$\partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \ \partial^{n-1}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

für $y = p\Delta x$; so ist auch

$$\partial^n z = 0$$

für $y = p\Delta x$. Nur muß hier, wie aus dem Obigen folgt, $n > 1$ seyn. Da nun

$$\Delta z = \frac{\partial z}{1} + \frac{\partial^2 z}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{1.2.3} + \frac{\partial^4 z}{1.2.3.4} + \ldots .$$

ist; so ist

$$\Delta z = \partial z$$

für $y = p\Delta x$.

Mit Hülfe dieser allgemeinen analytischen Sätze läßt sich nun, was von allen Schriftstellern über analytische Geometrie, die uns bekannt geworden sind, unterlassen wird, streng beweisen, daß jede Fläche, für welche $s^2 = rt$ ist, developpabel ist. Daß einen solchen Beweis die mathematische Strenge und Evidenz fordert, liegt vor Augen.

7. Für eine Fläche, deren Gleichung

$$z = f(x, y)$$

ist, sey also $s^2 = rt$ oder

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 .$$

Für zwei beliebige Punkte

$$(x, y, z) \text{ und } (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

dieser Fläche sind die Gleichungen der berührenden Ebenen

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z' - x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z = 0$$

und

$$x'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}+y'\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}-z'$$
$$-(x+\Delta x)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}-(y+\Delta y)\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}+(z+\Delta z)=0.$$

Nimmt man aber den zweiten Punkt in der krummen Fläche so an, daß $\Delta y = p\Delta x$ ist, indem wir wieder der Kürze wegen

$$-\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}=-\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}=-\frac{r}{s}=-\frac{s}{t}=p$$

setzen; so ist nach (6.)

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\ \Delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\ \Delta z=\partial z;$$

folglich die Gleichung der zweiten berührenden Ebene

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z'$$
$$-(x+\Delta x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-(y+\Delta y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z+\partial z=0$$

oder

$$\left.\begin{aligned}x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z'-x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z\\-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y+\partial z\end{aligned}\right\}=0.$$

Aber

$$\partial z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y;$$

folglich die Gleichung der zweiten berührenden Ebene

$$x'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z'-x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z=0,$$

d. i. mit der Gleichung der ersten berührenden Ebene identisch, so daß also diese beiden Ebenen selbst in eine Ebene zusammenfallen. Hieraus folgt also, daß alle Punkte der gegebenen krummen Fläche, deren in der Ebene der xy genommene Coordinaten

$$x+\Delta x,\ y+p\Delta x$$

sind, von einer und derselben Ebene berührt werden, nämlich sämmtlich von der Ebene, welche die krumme Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührt, so daß also die krumme Fläche von dieser Ebene in einer stetigen Folge von Punkten, oder, um uns kurz auszudrücken, in einer Linie berührt wird. Die Gleichung der

Projection dieser Linie auf der Ebene der xy ist, wenn man den Punkt (x, y) auf dieser Ebene als Anfang der Coordinaten annimmt, nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\Delta y = p\Delta x,$$

wo jetzt Δx und Δy selbst die Coordinaten sind. Diese Projection, und also auch die Linie selbst, in welcher die krumme Fläche von der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Berührungsebene berührt wird, da diese Linie natürlich ganz in dieser Berührungsebene liegt, ist folglich eine gerade Linie, so daß also unsere krumme Fläche von jeder sie in irgend einem Punkte berührenden Ebene in einer geraden Linie berührt wird, und daher eine abwickelbare Fläche ist (4.), w. z. b. w.

Für jede developpable Fläche ist also $s^2 = rt$ (5.), und jede Fläche, für welche $s^2 = rt$ ist, ist developpabel.

Die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) gehenden erzeugenden geraden Linie auf der Ebene der xy ist in (5.) allgemein gefunden worden, und ergiebt sich auch aus dem unmittelbar Vorhergehenden sehr leicht auf dieselbe Weise. Ist nämlich

$$y' = Px' + Q$$

diese Gleichung, so ist, da die entsprechende gerade Linie durch den Punkt (x, y) geht;

$$y = Px + Q;$$

also

$$y' - y = P(x' - x),$$

Aber offenbar

$$y' - y = \Delta y,\ x' - x = \Delta x.$$

Folglich $\Delta y = P\Delta x$. Aber nach dem Vorhergehenden $\Delta y = p\Delta x$. Also $P = p$ und demnach unsere Gleichung

$$y' - y = p(x' - x),$$

oder

$$y' = px' + y - px,$$

oder

$$y' = Px' + y - Px,$$

indem man für $P = p$ den obigen Werth $-\frac{r}{s} = -\frac{s}{t}$ setzt, ganz wie in (5.)

8. Wir wollen nun einmal die conischen und cylindrischen Flächen betrachten. Der allgemeinen Gleichung der conischen Flächen (s. diesen Art. i. d. Z.) kann man die Form

$$\frac{z-c}{y-b} = f\left(\frac{x-a}{y-b}\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{x-a}{y-b} = v$$

setzt, die Form

$$z - c = (y-b)\,fv$$

geben. Weil nun

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{y-b}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{x-a}{(y-b)^2}$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (y-b)\frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial fv}{\partial v},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{y-b}\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = r,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (y-b)\frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + fv = -\frac{x-a}{y-b}\frac{\partial fv}{\partial v} + fv,$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -\frac{x-a}{y-b}\frac{\partial^2 fv}{dv^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{x-a}{(y-b)^2}\frac{\partial fv}{\partial v} + \frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{(x-a)^2}{(y-b)^3}\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = t,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{x-a}{(y-b)^2}\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = s,$$

und es ist folglich offenbar $s^2 = rt$, so daß also alle conische Flächen developpabel sind, wie sich auch von selbst versteht. Weil

$$p = -\frac{r}{s} = \frac{y-b}{x-a}$$

ist; so ist die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) der conischen Fläche gehenden erzeugenden geraden Linie:

$$y' - y = \frac{y-b}{x-a}(x' - x).$$

Die allgemeine Gleichung der cylindrischen Flächen (s. diesen Art. i. d. Z.) kann man unter der Form

$$z - by = f(x - ay) = fv;$$

darstellen. In diesem Falle ist also

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 1, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -a;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial fv}{\partial v}, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = r;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = b + \frac{\partial fv}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = b - a\frac{\partial fv}{\partial v}, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = a^2\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = t;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 fv}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -a\frac{\partial^2 fv}{\partial v^2} = s.$$

Da nun auch in diesem Falle offenbar $s^2 = rt$ ist, so sind alle cylindrische Flächen developpabel, wie sich auch von selbst versteht. Weil

$$p = -\frac{r}{s} = \frac{1}{a}$$

ist; so ist die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) gehenden erzeugenden Geraden

$$y' - y = \frac{1}{a}(x' - x).$$

Sind bei den conischen Flächen (X, Y, Z) die Coordinaten irgend eines andern Punktes, so sind

$$y' - y = \frac{y-b}{x-a}(x'-a),$$

$$y' - Y = \frac{Y-b}{X-a}(x' - x)$$

die Gleichungen der beiden Projectionen der entsprechenden Erzeugenden auf der Ebene der xy. Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen x', y'; so erhält man die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Projectionen. Um y' zu eliminiren, erhält man:

$$(x-a)y' = (y-b)x' + bx - ay,$$
$$(X-a)y' = (Y-b)x' + bX - aY;$$

folglich, wenn man dividirt:

$$\frac{x-a}{X-a} = \frac{(y-b)x' + bx - ay}{(Y-b)x' + bX - aY},$$

$$x' = \frac{(bx-ay)(X-a) - (bX-aY)(x-a)}{(x-a)(Y-b) - (X-a)(y-b)}$$
$$= \frac{a\{(xY-yX) - b(x-X) + a(y-Y)\}}{(xY-yX) - b(x-X) + a(y-Y)},$$

d. i. $x' = a$ und folglich

$$(x-a)y' = a(y-b) + bx - ay = b(x-a),$$

d. i. $y' = b$, so daß sich also, da x' und y' constante Größen sind, alle Projectionen der erzeugenden Linie in ihren verschiedenen Lagen, wie es bei den conischen Flächen ihrer Natur nach seyn muß, in einem Punkte schneiden.

Ist ω der Neigungswinkel einer Berührungsebene einer krummen Fläche gegen die Ebene der xy, so ist bekanntlich

$$\text{tang}\,\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Für die Flächen, deren Berührungsebenen gegen die Ebene der xy sämmtlich unter gleichen Winkeln geneigt sind, ist tang $\omega = C$, folglich auch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = C$$

eine constante Größe. Differentiirt man die Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = C,$$

welche für jedes x und y Statt findet, nach x und nach y; so erhält man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$pr + qs = 0,\ ps + qt = 0;\ \frac{p}{q} = -\frac{s}{r} = -\frac{t}{s},\ s^2 = rt,$$

und alle Flächen von der angegebenen Beschaffenheit sind also developpabel.

9. In dem Artikel Berührung (27.) i. d. Z. ist für den Halbmesser der größten und kleinsten Krümmung in einem beliebigen Punkte einer krummen Fläche die Formel

$$\varrho = \frac{\gamma}{2\alpha}\left(\beta \pm \gamma\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma^2}\right)$$

gefunden worden. Auch ist in den dortigen Zeichen

$$p'q' - s^2 = \alpha,$$

so daß nämlich $p' = r$, $q' = t$, $s = s$, folglich

$$rt - s^2 = \alpha$$

ist. Für developpable Flächen ist also nach dem Vorhergehenden $\alpha = 0$, und demnach der Halbmesser der größten Krümmung in jedem Punkte unendlich groß, so daß also, wie auch aus der Entstehung dieser Flächen unmittelbar folgt, dieselben die allgemeine Eigenschaft haben, daß in jedem ihrer Punkte die Curve der größten Krümmung eine gerade Linie ist. Nimmt man in dem obigen Ausdrucke für ϱ das untere Zeichen, so wird

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\gamma\left\{\frac{2\gamma^2}{\beta} + \frac{2\alpha\gamma^4}{\beta^3} - \ldots\right\},$$

und folglich, wenn man $\alpha = 0$ setzt, $\varrho = \frac{\gamma^3}{\beta}$, welches der Halbmesser der kleinsten Krümmung ist, und daher auch in jedem Falle leicht gefunden werden kann.

10. Man setze der Kürze wegen

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = q',\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q;$$

$$\partial q' = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\partial y = r\partial x + s\partial y\,,$$

$$\partial q = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\partial x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\partial y = s\partial x + t\partial y\,.$$

Da nun für jede developpable Fläche

$$s^2 = rt,\ r = \frac{s^2}{t}$$

ist; so ist für jede solche Fläche

$$\partial q' = \frac{s}{t}(s\partial x + t\partial y) = \frac{s}{t}\partial q\,,$$

woraus sich also unmittelbar ergiebt, daß, wenn fq eine unbestimmte Function von q bezeichnet, für jede developpable Fläche $q' = fq$ seyn muß.

Es läßt sich aber auch umgekehrt behaupten, daß jede Fläche, für welche $q' = fq$, d. i. q' eine Function von q ist, developpabel ist. Aus dieser Gleichung folgt nämlich

$$\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right) = r = \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = sf'q\,,$$

$$\left(\frac{\partial q'}{\partial y}\right) = s = \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) = tf'q\,;$$

also

$$f'q = \frac{r}{s} = \frac{s}{t},\ rt = s^2\,,$$

und folglich die Fläche nach (7.) developpabel.

Da ferner

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y = q'\partial x + q\partial y$$

ist; so erhält man durch partikuläre Integration

$$z = q'x + qy - f(x\partial q' + y\partial q)$$

eine Formel, von deren Richtigkeit, wenn sie nicht anderweitig als bekannt vorausgesetzt werden soll, man sich leicht durch Differentiation auf folgende Art überzeugt. Es ist nämlich nach einer im Art. Differentialrechnung (47.) i. d. Z. gebrauchten Bezeichnung;

$$\partial_x z = x\partial_x q' + q'\partial x + y\partial_x q - \partial_x f(x\partial q' + y\partial q)\,,$$
$$\partial_y z = x\partial_y q' + q\partial y + y\partial_y q - \partial_y f(x\partial q' + y\partial q)\,;$$

folglich

$$\begin{aligned}\partial z &= \partial_x z + \partial_y z\\ &= x(\partial_x q' + \partial_y q') + y(\partial_x q + \partial_y q)\\ &\quad + q'\partial x + q\partial y - \{\partial_x f(x\partial q' + y\partial q) + \partial_y f(x\partial q' + y\partial q)\}\\ &= x\partial q' + y\partial q + q'\partial x + q\partial y - \partial f(x\partial q' + y\partial q)\\ &= x\partial q' + y\partial q + q'\partial x + q\partial y - x\partial q' - y\partial q\\ &= q'\partial x + q\partial y\,,\end{aligned}$$

wie es seyn muß. Ist nun die Fläche developpabel, so ist $q' = fq$, folglich

$$\partial q' = \partial_x fq + \partial_y fq = \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\partial x + \frac{\partial fq}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\partial y$$

$$= \frac{\partial fq}{\partial q}\left\{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\partial y\right\} = fq\,.\,\partial q\,;$$

also

$$z = q'x + qy - f(xf'q + y)\,\partial q$$
$$= xfq + qy - f(xf'q + y)\,\partial q\,,$$

woraus man, wenn wieder Fq eine willkührliche Function von q bezeichnet, leicht schließt, daß für alle developpable Flächen

$$xf'q + y = F'q\,,$$
$$z = xfq + qy - Fq$$

seyn muß, ein Satz, den man aber auch umkehren kann.

Ist nämlich für irgend eine Fläche

$$y = -xf'q + F'q\,,$$
$$z = xfq + qy - Fq\,,$$

so läßt sich jederzeit mit Sicherheit behaupten, daß dieselbe developpabel ist. Differentiirt man nämlich die zweite Gleichung in Bezug auf x, so erhält man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = q' = xf'q\,.\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + fq + y\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) - F'q\,.\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

$$= fq + \{y + xf'q - F'q\}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$

d. i., weil wegen der ersten Gleichung

$$y + xf'q - F'q = 0$$

ist:

$$q' = fq\,,$$

folglich die Fläche nach (9.) developpabel. Dieser Satz leistet vortreffliche Dienste bei Erfindung der Gleichungen developpabler Flächen, wie wir jetzt an ein Paar Beispiele zeigen wollen.

Man setze z. B.

$$f'q = aq,\ fq = \tfrac{1}{2}aq^2\,;\ F'q = bq^2,\ Fq = \tfrac{1}{3}bq^3\,;$$

so ist

$$y = -axq + bq^2,\ z = \tfrac{1}{2}axq^2 + qy - \tfrac{1}{3}bq^3$$

oder

$$z = \tfrac{2}{3}bq^3 - \tfrac{1}{2}axq^2\,.$$

Aus der Formel für y findet man leicht durch Auflösung einer quadratischen Gleichung:

$$q = \frac{ax}{2b} + \frac{\sqrt{4by + a^2x^2}}{2b}\,,$$

$$z = \frac{ax'}{12b^2}(a^2x^2 + 6by) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by + a^2x^2)^3}$$

die Gleichung der gesuchten developpablen Fläche, welche, rational gemacht, einer Fläche des fünften Grades entspricht.

Für

$$fq = aq,\ fq = \tfrac{1}{2}aq^2;\ F'q = bq,\ Fq = \tfrac{1}{2}bq^2 + C$$

ist

$$y = bq - axq,\ z = \tfrac{1}{2}axq^2 + qy - \tfrac{1}{2}bq^2 - C$$

oder

$$z = \tfrac{1}{2}(b - ax)q^2 - C,$$

oder, weil

$$q = \frac{y}{b - ax}$$

ist, die Gleichung der krummen Fläche:

$$z + C = \frac{y^2}{2(b - ax)}.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$\frac{z+C}{y} = -\frac{a}{2} : \frac{x - \frac{b}{a}}{y},$$

so ist klar, daß

$$\frac{z+C}{y} = \varphi\left(\frac{x - \frac{b}{a}}{y}\right)$$

ist, und dieselbe also einer conischen Fläche entspricht (Conische Flächen. 1. i. d. Z.). Wir haben diese beiden Exempel, deren Zahl sich leicht vermehren ließe, aus Brandes Lehrbuch der höhern Geometrie. T. II. Leipz. 1823. S. 336. entlehnt.

11. Die Wendungscurve ist die stetige Folge der Durchschnittspunkte der erzeugenden geraden Linien in ihren verschiedenen Lagen. Will man also die Projection der Wendungscurve auf irgend einer der coordinirten Ebenen finden, so muß man die Gleichung der stetigen Folge der Durchschnittspunkte der Projectionen der erzeugenden geraden Linie in ihren verschiedenen Lagen auf derselben coordinirten Ebene suchen. Zu dem Ende ist es nöthig, folgende allgemeine Betrachtungen vorauszuschicken. Sey

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

die Gleichung einer Curve, wo a eine gewisse Größe ist, die in Bezug auf x, y als constant betrachtet wird, welcher man aber doch jeden beliebigen Werth beilegen kann, wodurch, wenn man a sich stetig verändern läßt, offenbar eine Reihe zwar verschiedener, aber doch unter einander ähnlicher oder einem gemeinschaftlichen Gesetze unterworfener Curven erhalten wird, die sich also auch in einer stetigen Reihe von Punkten schneiden werden,

welche wieder eine gewisse Curve bilden, deren Gleichung wir jetzt im Allgemeinen aufsuchen wollen. Von der Curve, welcher die Gleichung

$$V = \varphi(x, y, a) = 0$$

entspricht, geht man zu der nächstfolgenden Curve über, wenn man a sich um ∂a verändern läßt. Dadurch geht die Function V in

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a$$

über, und die Gleichung der zweiten Curve ist überhaupt

$$V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0.$$

Für die Durchschnittspunkte der beiden Curven, deren es offenbar in gewissen Fällen mehrere geben kann, müssen x, y den beiden Gleichungen

$$V = 0,\ V + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0,$$

oder

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\partial a = 0,$$

oder

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

genügen, und werden also durch Elimination aus diesen beiden Gleichungen erhalten. Indeß ist hier gar nicht die Frage nach den absoluten Werthen der Coordinaten dieser Durchschnittspunkte, sondern bloß nach der zwischen den beiden Coordinaten der Durchschnittspunkte jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Curven Statt findenden allgemeinen Relation, d. i. nach der Gleichung der durch die stetige Folge dieser Durchschnittspunkte dargestellten Curve, und diese Gleichung wird offenbar erhalten, wenn man aus den Gleichungen

$$V = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$$

den constanten Parameter a eliminirt.

12. Dieses Princip wollen wir nun auf unsern gegenwärtigen Fall anwenden. Die allgemeine Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) der developablen Fläche gehenden Erzeugenden auf der Ebene der xy ist nach dem Obigen

$$y' - y = p(x' - x),$$

und diese Gleichung enthält, wie man sieht, die beiden constanten Parameter x, y, welche nur bei dem Uebergange von der einen Projection zu der nächst folgenden variabel sind. Nun

denke man sich aber einmal die durch den Punkt (x, y, z) gehende erzeugende Gerade, so gehört diese zu einer ganzen stetigen Folge von Punkten der developpablen Fläche, und man erhält offenbar die folgende Erzeugende, wenn man, indem y ungeändert bleibt, sich bloß x um etwas Unendlichkleines verändern läßt, wodurch denn natürlich auch z eine unendlich kleine Aenderung erleidet, u. s. w. Man sieht also, daß man die ganze stetige Folge der erzeugenden Geraden, und folglich auch die ganze stetige Folge ihrer Projectionen auf der Ebene der xy erhalten wird, wenn man, y ungeändert lassend, x sich stetig verändern läßt, so daß man also in der Gleichung

$$y' - y = p(x' - x),$$

wenn man auf dieselbe das Verfahren in (11.) anwendet, bloß x als variabel zu betrachten braucht. Eliminirt man dann x aus den beiden nach diesem Verfahren erhaltenen Gleichungen, so muß y zugleich mit wegfallen, da die Gleichung der Projection der Wendungscurve natürlich von y nicht abhängig seyn kann. Daß man auf dieselbe Weise auch umgekehrt x als constant, y als variabel betrachten kann, versteht sich von selbst. Das allgemeine Verfahren bleibt dann immer dasselbe. Betrachtet man in obiger Gleichung x als variabel, so sind die beiden Gleichungen, aus denen, um die Projection der Wendungscurve zu erhalten, x eliminirt werden muß:

$$y' - y = p(x' - x),$$

$$p - (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

und y muß dann von selbst mit wegfallen. Betrachtet man y als variabel, so muß man y aus den beiden Gleichungen

$$y' - y = p(x' - x),$$

$$1 + (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

eliminiren, und x muß dann von selbst mit wegfallen. Man hat zu bemerken, daß die beiden Gleichungen

$$p - (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

$$1 + (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

identisch sind. Multiplicirt man nämlich die zweite Gleichung mit p, so kommt:

$$p + (x' - x)p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0.$$

Nach (6.) ist aber

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0, \quad p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right);$$

folglich

$$p - (x' - x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

welches die erste Gleichung ist.

13. Nach (10.) ist

$$z = \frac{ax}{12b^2}(a^2x^2 + 6by) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by + a^2x^2)^3}$$

die Gleichung einer developpablen Fläche. Aus derselben findet man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}}{2b}, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4by + a^2x^2}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{a\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\}}{2b\sqrt{4by + a^2x^2}}.$$

Folglich

$$p = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)} = -\frac{a}{2b}\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\},$$

und demnach die allgemeine Gleichung der Projectionen der erzeugenden Geraden auf der Ebene der xy:

$$y' - y + \frac{a}{2b}\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\}(x' - x) = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem x ungeändert bleibt, in Bezug auf y; so erhält man

$$-1 + \frac{a(x' - x)}{\sqrt{4by + a^2x^2}} = 0; \quad \frac{a(x' - x)}{\sqrt{4by + a^2x^2}} = 1,$$

und dieselbe Gleichung ergiebt sich nach dem Obigen, wenn man, y ungeändert lassend, in Bezug auf x differentiirt. Aus den Gleichungen

$$y' - y + \frac{a}{2b}\{ax + \sqrt{4by + a^2x^2}\}(x' - x) = 0,$$

$$a(x' - x) = \sqrt{4by + a^2x^2}$$

muß man nun, um die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy zu finden, x oder y eliminiren. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$ax + \sqrt{4by + a^2x^2} = ax',$$

Dadurch wird die erste Gleichung

$$y' - y + \frac{a^2}{2b}x'(x' - x) = 0,$$

$$4by' - 4by + 2a^2x'(x' - x) = 0.$$

Aber

$$a^2(x'-x)^2 = 4by + a^2x^2,$$
$$4by = a^2(x'^2 - 2xx').$$

Folglich ist

$$4by' - a^2(x'^2 - 2xx') + 2a^2x'(x'-x) = 0,$$

d. i.

$$4by' + a^2x'^2 = 0,\quad y' = -\frac{a^2}{4b}x'^2$$

die gesuchte Gleichung der Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy.

Um die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xz zu finden, muß man y' aus den Gleichungen

$$z' = \frac{ax'}{12b^2}(a^2x'^2 + 6by') + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by' + a^2x'^2)^3},$$
$$4by' + a^2x'^2 = 0$$

eliminiren, wie leicht erhellet. Dies giebt für diese Projection die Gleichung:

$$z' = -\frac{a^3}{24b^2}x'^3.$$

Die Gleichung der Projection der Wendungscurve auf der Ebene der yz erhält man, wenn man x' aus den beiden Gleichungen

$$y' = -\frac{a^2}{4b}x'^2,\quad z' = -\frac{a^3}{24b^2}x'^3$$

eliminirt. Dies giebt

$$-\frac{y'^2}{9b} = z'^2.$$

Wir wollen nun noch die Wendungscurve der conischen Flächen suchen. Nach (8.) ist die allgemeine Gleichung der Projectionen der Erzeugenden auf der Ebene der xy:

$$(x-a)(y'-y) - (y-b)(x'-x) = 0.$$

Differentiirt man nach x, so erhält man

$$(y'-y) + (y-b) = 0,\quad y' = b,$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Differentiirt man nach y, so erhält man

$$-(x-a) - (x'-x) = 0,\quad x' = a,$$

welches ebenfalls die gesuchte Gleichung ist. Man sieht also, daß die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy ein durch die Coordinaten $x' = a$, $y' = b$ bestimmter Punkt ist.

14. Man kann die Projectionen der Wendungscurve noch auf eine andere Art finden. Da nämlich nach (5.) und (6.) für jede Lage der erzeugenden Linie

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \partial q = 0$$

ist; so ist für jede Lage der erzeugenden Linie

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$$

constant, und nach (10.) ist also

$$y = -xfq + F'q$$

für irgend ein constantes q die Gleichung der Projection einer erzeugenden Linie auf der Ebene der xy. Die stetige Folge dieser Projectionen erhält man, wenn man q variiren läßt. Um also die Projection der Wendungscurve auf der Ebene der xy zu finden, muß man nach den allgemeinen Principien in (11.) die Gleichung

$$y + xfq - F'q = 0$$

nach q differentiiren, wodurch man die Gleichung

$$xf'q - F'q = 0$$

erhält. Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung muß man nun q eliminiren, welches die gesuchte Gleichung der Projection der Wendungscurve giebt. Für die in (13.) betrachtete Curve ist nach (10.)

$$y + axq - bq^2 = 0;$$

folglich, wenn man nach q differentiirt:

$$ax - 2bq = 0, \quad q = \frac{ax}{2b}.$$

Also

$$y + \frac{a^2x^2}{2b} - \frac{a^2x^2}{4b} = y + \frac{a^2x^2}{4b} = 0,$$

$$y = -\frac{a^2}{4b}x^2,$$

wie vorher. Eben so hat man nach (10.)

$$z = \tfrac{2}{3}bq^3 - \tfrac{1}{2}axq^2;$$

folglich, wenn man nach q differentiirt:

$$2bq^2 - axq = 0, \; 2bq - ax = 0, \; q = \frac{ax}{2b};$$

$$z = \frac{a^3x^3}{12b^2} - \frac{a^3x^3}{8b^2} = -\frac{a^3x^3}{24b^2} = -\frac{a^3}{24b^2}x^3,$$

wie vorher.

15. Mehrere der obigen allgemeinen Formeln lassen sich noch unter andern Formen darstellen, welche zum Theil der Aufmerksamkeit nicht unwerth sind, und daher hier noch entwickelt werden sollen. Die Gleichung der Projection der dem Punkte (x, y, z) der developpablen Fläche entsprechenden erzeugenden Geraden ist nach dem Obigen

$$y' - y = p(x' - x)$$

für

$$p = -\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} = -\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}.$$

Für

$$q' = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ist

$$\partial z = q'\partial x + q\partial y.$$

Aber

$$\partial q' = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial y,$$

$$\partial q = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\partial y,$$

oder der Kürze wegen nach einer schon oft gebrauchten Bezeichnung:

$$\partial q' = r\partial x + s\partial y,\ \partial q = s\partial x + t\partial y.$$

Folglich

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = \frac{r\partial x + s\partial y}{s\partial x + t\partial y} = \frac{rs\partial x + s^2\partial y}{s^2\partial x + st\partial y} = \frac{rs\partial x + rt\partial y}{s^2\partial x + st\partial y},$$

weil bekanntlich $s^2 = rt$ ist. Folglich

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = \frac{r(s\partial x + t\partial y)}{s(s\partial x + t\partial y)} = \frac{r}{s} = -p;$$

also

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{\partial q}(x' - x)$$

die Gleichung der Projection der durch den Punkt (x, y, z) der developpablen Fläche gehenden erzeugenden Geraden auf der Ebene der xy. Will man die Gleichung der Projection auf der Ebene der xz haben, so hat man nach dem Obigen:

$$\partial y = \frac{1}{q}\partial z - \frac{q'}{q}\partial x,$$

und die Gleichung der in Rede stehenden Projection ist also:

$$x' - x = -\frac{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(-\frac{q'}{q}\right)}(z' - z) = \frac{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(\frac{q'}{q}\right)}(z' - z).$$

Aber

$$\partial\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{\partial q}{q^2},\ \partial\left(\frac{q'}{q}\right) = \frac{q\partial q' - q'\partial q}{q^2},$$

und folglich vorstehende Gleichung:

$$x' - x = \frac{\partial q}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z) .$$

Um die Gleichung der Projectionen auf der Ebene der yz zu finden hat man:

$$\partial x = \frac{1}{q'}\partial z - \frac{q}{q'}\partial y ,$$

$$y' - y = -\frac{\partial\left(\frac{1}{q'}\right)}{\partial\left(-\frac{q}{q'}\right)}(z' - z) = \frac{\partial\left(\frac{1}{q'}\right)}{\partial\left(\frac{q}{q'}\right)}(z' - z) ,$$

$$\partial\left(\frac{1}{q'}\right) = -\frac{\partial q'}{q'^2},\ \partial\left(\frac{q}{q'}\right) = \frac{q'\partial q - q\partial q'}{q'^2} ;$$

folglich

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z) .$$

Ist also

$$\partial z = q'\partial x + q\partial y ,$$

so sind die Gleichungen der Projectionen der durch den Punkt (x, y, z) der developpablen Fläche gehenden erzeugenden Geraden auf der Ebene der xy, xz, yz respective:

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{\partial q}(x' - x) ,$$

$$x' - x = \frac{\partial q}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z) ,$$

$$y' - y = -\frac{\partial q'}{q'\partial q - q\partial q'}(z' - z) .$$

Jede dieser Gleichungen ist, wie man sogleich sieht, eine unmittelbare Folge aus den beiden andern. Ihrer Form wegen sind dieselben merkwürdig, zur wirklichen Anwendung sind aber die frühern Vorschriften weit bequemer. Das einfache Beispiel, welches Lacroix, dem diese Gleichungen angehören, im Traité du calcul diff. et int. T. I. p. 645. beibringt, läßt sich viel einfacher nach unsern frühern Vorschriften auf folgende Art behandeln. Ist nämlich α der constante Winkel, welchen bei einem geraden Kegel die erzeugende Linie mit der Axe, die wir als Axe der z, die Spitze des Kegels als Anfang der Coordinaten annehmen wollen, einschließt; so ist offenbar

$$z^2 \tang\alpha^2 = x^2 + y^2 ,$$

oder, für $\cot\alpha = k$:

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2} .$$

Folglich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = kx(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -kxy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = k(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - kx^2(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$p = \frac{(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}}{xy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt:

$$p = \frac{1 - x^2(x^2 + y^2)^{-1}}{xy(x^2 + y^2)^{-1}} = \frac{x^2 + y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x},$$

und folglich die Gleichung der Projection der erzeugenden Linie auf der Ebene der xy:

$$y' - y = \frac{y}{x}(x' - x), \quad xy' = yx'.$$

Auf ganz ähnliche Art findet man die andern Projectionen. Für die Wendungscurve muß man diese Gleichung nach x oder y differentiiren. Dies giebt $y' = 0$, $x' = 0$; also auch $z' = 0$. Die Wendungscurve ist folglich ein Punkt, nämlich die Spitze. Lacroix hat a. a. O. mehrere den obigen ähnliche Formeln auch für die Wendungscurve mitgetheilt, die zwar wegen ihrer Form merkwürdig, zur wirklichen Anwendung aber nicht eben bequem sind.

16. Wir kehren jetzt noch auf einen Augenblick zu den verschiedenen Arten zurück, wie man sich nach (4.) die Entstehung einer developpablen Fläche denken kann, um zu zeigen, daß alle diese verschiedenen Ansichten zu derselben allgemeinen Gleichung developpabler Flächen führen. Läßt man dieselben durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen, welche stets eine gegebene doppelt gekrümmte Linie berührt; so seyen

$$x = fz, \quad y = Fz$$

die Gleichungen dieser Curve, und für irgend einen Punkt derselben $z = a$, also

$$x = fa, \quad y = Fa.$$

Die Gleichungen der durch diesen Punkt gehenden Berührenden der gegebenen Curve sind nach dem Art. Berührung (18.) i. d. Z.

$$x - fa = (z - a)f'a,$$

$$y - Fa = (z - a)F'a,$$

wenn $f'a$, $F'a$ die Differentialquotienten von fa, Fa bezeichnen. Eliminirt man a aus diesen beiden Gleichungen, so ist das Resultat der Elimination offenbar die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche. Die auf diese Weise hervorgehende Gleichung ist eine Gleichung zwischen x, y, z, in welcher also x, y als unabhängige veränderliche Größen betrachtet werden können. z ist dann Function von x und y. Um die Elimination von a auszuführen, differentiire man die erste der beiden obigen Gleichungen nach x, die zweite nach y; so kommt:

$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) fa, \quad 1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) Fa;$$

d. i. in der oben eingeführten Bezeichnung:

$$1 = q'fa, \quad 1 = qFa.$$

Denkt man sich aus diesen beiden Gleichungen a eliminirt, so ist klar, daß q' eine Function von q ist, und folglich

$$q' = \varphi q$$

gesetzt werden kann. Also ist

$$\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right) = \varphi' q \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial q'}{\partial y}\right) = \varphi' q \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right),$$

und folglich durch Division

$$\frac{\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial q'}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)}, \quad \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)},$$

d. i. $\frac{r}{s} = \frac{s}{t}$, $rt = s^2$, welches die schon oben gefundene allgemeine Gleichung der developpablen Flächen ist.

Ganz zu demselben Resultat gelangt man, wenn man nach (4.) die developpablen Flächen sich auf die dort näher bezeichnete Art durch Bewegung einer Ebene beschrieben denkt. Größerer Deutlichkeit wegen wollen wir, welches offenbar, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet ist, annehmen, daß die Bewegung der in Rede stehenden Ebene auf eine solche Art gewissermaßen regulirt werde, daß dieselbe bei ihrer Bewegung stets auf einer beliebigen gegebenen doppelt gekrümmten Curve normal ist. Ist nun überhaupt

$$z = Ax + By + C$$

die Gleichung der sich bewegenden Ebene, und für irgend einen Punkt der gegebenen Curve

$$z = a, \quad x = fa, \quad y = Fa;$$

so ist die Lage der Ebene durch die doppelte Bedingung, daß sie durch diesen Punkt gehen, und auf der gegebenen Curve normal seyn soll, vollkommen bestimmt, und A, B, C sind folglich im Allgemeinen Functionen von a, so daß man also

$$z = x\varphi a + y\psi a + \chi a$$

setzen kann. Weil aber

$$\varphi a = A, \quad \psi a = B, \quad \chi a = C$$

ist, so erhellet, wenn man sich nur aus der ersten und dritten, so wie aus der zweiten und dritten Gleichung a eliminirt denkt, daß A und B Functionen von C sind, also, wenn wir jetzt Θ für C schreiben, die willkührlichen Functionszeichen φ, ψ aber auch hier beibehalten, überhaupt

$$z = x\varphi\Theta + y\psi\Theta + \Theta$$

gesetzt werden kann. Differentiirt man diese Gleichung partiell nach x und y, so kommt:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = q' = \varphi\Theta, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q = \psi\Theta,$$

woraus, wenn man sich Θ eliminirt denkt, wieder folgt, daß q' Function von p, folglich, ganz wie vorher, $rt = s^2$ ist. Ferner ist nach dem Obigen

$$\Theta = z - x\varphi\Theta - y\psi\Theta = z - q'x - qy;$$

folglich für alle developpablen Flächen

$$q' = \varphi(z - q'x - qy),$$
$$q = \psi(z - q'x - qy).$$

17. Mehr Untersuchungen über abwickelbare Flächen findet man in den Werken von Brandes (Thl. II. S. 331.) und Littrow (S. 263.) über analytische Geometrie, und daß auch Monge Application de l'Analyse à la Géométrie vorzüglich hierher gehört, versteht sich, wie überall in der analytischen Geometrie, von selbst. Die Hauptgleichung $rt = s^2$ entwickelt auch Lagrange in der Théorie des fonctions. p. 225. Die ersten analytischen Untersuchungen verdankt man Euler: Invenire aequationem generalem pro omnibus solidis, quorum superficiem in planum explicare licet. Nov. Comm. Petrop. T. XVI. Vorzüglich gehört auch hierher: Mémoire sur les proprietés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulierement sur celles des surfaces developpables, avec une application à la théorie des ombres et penombres par Monge. Mém. de Mathém. et de Phys. T. IX. p. 382. Von besonderm Interesse ist die Aufgabe: Die developpable Fläche zu finden, welche zwei ihrer Lage und Gestalt nach gegebene krumme Flächen berührt. Ist eine der beiden Flächen leuchtend, die andere dunkel, so werden die berührenden developpablen Flächen den Schatten und den Halbschatten des dunkeln Körpers begränzen, und die Berührungscurven auf den beiden Flächen werden diejenigen seyn, welche auf der dunkeln Fläche den beleuchteten Theil von dem dunkeln trennen, und die auf der leuchtenden Fläche denjenigen Theil, welcher sein Licht auf die dunkle Fläche sendet, von dem absondern, dessen Strahlen die dunkle Fläche nicht mehr erreichen. In dieser Beziehung ist das Problem auch in der Astronomie von Wichtigkeit. Ueber den Einfluß, welchen die sphäroidische Gestalt des Jupiters auf die Dauer der durch ihn selbst verursachten Verfinsterungen seiner Monde hat, s. m. die Mécanique céleste. T. IV. p. 105. Ein anderes interessantes Problem ist die Aufgabe: Wenn auf einer developpablen Fläche eine Curve verzeichnet ist, die Gestalt dieser Curve zu bestimmen, nachdem die krumme Fläche in eine Ebene developpirt worden ist, und umgekehrt: Wenn eine Curve in einer Ebene

verzeichnet ist, die Gestalt derselben zu bestimmen, wenn die Ebene auf eine gegebene Fläche gewickelt worden ist. Außer Littrow a. a. O. S. 279. s. m. über diese Aufgaben vorzüglich Lacroix Traité. T. I. p. 636. und Mémoires présentés à l'Institut de France. T. I. II. Auf solche speciellere Untersuchungen einzugehen, gestattet hier der Raum nicht, und wir müssen uns daher begnügen, in dem Obigen, größtentheils auf eigenthümliche Weise, die allgemeinen Bedingungen der Developpabilität der Flächen vollständig entwickelt und streng bewiesen, und Anleitung zur Bestimmung der Lage der erzeugenden Geraden und der Wendungscurve gegeben zu haben. M. vergl. auch endlich noch Thl. III. S. 338. dieses Wörterbuchs. Geometrische Untersuchungen über developpable Flächen enthalten die Lehrbücher der descriptiven Geometrie, wie z. B. Lacroix Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes. éd. 4. Paris. 1812. p. 93.

18. Wir gehen nun zu der allgemeinen Theorie der Abwickelung doppelt gekrümmter Linien über, indem wir uns dabei ganz an Monge anschließen. Sey in Fig. 7. ab eine beliebige Curve und AA', A'A'', A''A''', u. s. f. beliebige auf einander folgende unendlich kleine Elemente derselben. Durch A, A', A'', A''',.... denke man sich Ebenen gelegt, welche auf der Curve ab, d. i. auf den durch A, A', A'', A''',.... an dieselbe gezogenen Berührenden senkrecht sind. Die successiven Durchschnittslinien dieser normalen Ebenen seyen KL, K'L', K''L'', K'''L''', u. s. f. Von A denke man sich jetzt in der Ebene ML auf KL das Perpendikel AO gefällt, und ziehe in der folgenden normalen Ebene M'L' die Linie A'O, so ist, weil AA' auf ML und AO auf KL senkrecht ist, nach einem bekannten stereometrischen Elementarsatze auch A'O auf KL senkrecht, und AO ist = A'O, weil AA' als ein unendlich kleiner Kreisbogen betrachtet werden kann. Nimmt man nun in KL einen willkührlichen Punkt B an, so ist, weil BO auf AO und A'O senkrecht, und AO = A'O ist, auch AB = A'B, und der Winkel ABO ist dem Winkel A'BO gleich. Dreht man also den Winkel ABO um BO als eine Axe herum, so wird der Punkt A das Element AA' der Curve ab beschreiben. Verlängert man jetzt A'B, bis dieselbe die Durchschnittslinie K'L' in B' schneidet, und zieht A''B', so wird durch eine ganz ähnliche Drehung sich das Element A'A'', und, wenn man A''B' verlängert, bis dieselbe K''L'' in B'' schneidet, dann A'''B'' zieht, wieder auf ganz ähnliche Art sich das Element A''A''' beschreiben lassen, u. s. f. Denkt man sich nun aber eine Ebene so bewegt, daß sie stets auf der gegebenen Curve ab senkrecht ist, so werden die successiven Durchschnittslinien KL, K'L', K''L'', u. s. f. der verschiedenen auf einander folgenden Lagen dieser Ebene eine gewisse developpable Fläche bilden (4.), und die gebrochene Linie BB'B''B'''.... wird in eine stetige auf dieser developpablen Fläche liegende Curve übergehen, welche nach dem Vorhergehenden offenbar die Eigenschaft hat, daß, wenn man sich um die-

selbe einen Faden gelegt und diesen Faden nach und nach von der Curve $BB'B''B'''\ldots$ abgewickelt denkt, von dem Endpunkte dieses Fadens die gegebene Curve ab beschrieben werden kann, so daß also $BB'B''B'''\ldots$ eine Evolute von ab oder $AA'A''A'''\ldots$, diese aber in Bezug auf jene die Evolvente ist. Daß AB, A'B', A''B'', A'''B''', ... sämmtlich sowohl Berührende der Linie $BB'B''B'''\ldots$, als auch der von der sich bewegenden Ebene beschriebenen developpablen Fläche sind, ist ohne weitere Erinnerung klar. Die Richtung der ersten Berührenden AB ist völlig willkührlich, woraus also erhellet, daß jede Curve eigentlich unendlich viele Evoluten hat, die aber sämmtlich auf einer developpablen Fläche liegen, welche von einer sich bewegenden Ebene beschrieben wird, die bey ihrer Bewegung stets auf der gegebenen Curve senkrecht ist, und diese developpable Fläche ist also der geometrische Ort aller Evoluten der gegebenen Curve, auch wird diese Fläche von der Linie AB in allen ihren Lagen berührt. Daß alle diese Betrachtungen auch für Curven einfacher Krümmung gelten, versteht sich von selbst. In diesem Falle ist der geometrische Ort aller Evoluten der gegebenen Curve offenbar eine auf der Ebene, in welcher dieselbe liegt, senkrechte Cylinderfläche, und unter allen Evoluten ist nur die Durchschnittslinie dieser Cylinderfläche mit der Ebene, in welcher die gegebene Curve liegt, eine Curve von einfacher Krümmung; alle übrigen auf der Cylinderfläche liegende Evoluten sind doppelt gekrümmte Curven.

19. Sind nun

$$x = \varphi z, \quad y = \psi z$$

die Gleichungen einer beliebigen doppelt gekrümmten Curve, so wollen wir jetzt zunächst die Gleichung der developpablen Fläche suchen, auf welcher alle Evoluten derselben liegen. Zu dem Ende sey für irgend einen beliebigen Punkt unserer Curve $z = a$, also $x = \varphi a$, $y = \psi a$. Die Gleichung der durch diesen Punkt gehenden Normalebene unserer Curve ist nach dem Artikel Berührung (18.) i. d. Z.

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a = 0 .$$

Die Gleichung der nächst folgenden Normalebene ist

$$\{x - \varphi(a+\partial a)\}\varphi'(a+\partial a) + \{y - \psi(a+\partial a)\}\psi'(a+\partial a) + z - (a+\partial a) = 0.$$

Für die Durchschnittslinie der beiden Normalebenen gelten dieselben x, y, z in diesen beiden Gleichungen, oder man muß für diese Durchschnittslinie x, y, z in beiden Gleichungen einander gleich setzen, oder diese Gleichungen sind selbst die Gleichungen der in Rede stehenden Durchschnittslinie. Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so ist die Differenz der beiden Functionen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen auch $= 0$. Diese Differenz ist aber, da man sich ∂a unendlich klein denken muß, offenbar das Differential von

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a ,$$

bloß in Bezug auf a genommen, so daß also auch dieses Differential, und folglich auch der Differentialquotient, d. i. das durch ∂a dividirte Differential, $= 0$ ist. Differentiirt man also vorstehende Function nach a, so erhält man als Gleichungen der Durchschnittslinie jeder zwey nächsten Normalebenen auf der Stelle:

$$(x-\varphi a)\varphi' a + (y-\psi a)\psi' a + z - a = 0,$$
$$(x-\varphi a)\varphi'' a + (y-\psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0.$$

Die Linie, welcher diese beiden Gleichungen entsprechen, liegt ganz in der developpablen Fläche, deren Gleichung gesucht wird, und es werden also diese Gleichungen offenbar auch für jeden Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, dieser developpablen Fläche Statt finden. Will man also eine Relation zwischen den Coordinaten x, y, z jedes Punktes der developpablen Fläche, d. i. die Gleichung dieser Flächen haben, so muß man aus vorstehenden zwey Gleichungen a eliminiren, wodurch man die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche erhält.

Der Punkt, in welchem die Durchschnittslinie zweier nächsten Normalebenen von der Durchschnittslinie der beiden folgenden nächsten Normalebenen geschnitten wird, ist derjenige Punkt, für welchen x, y, z ungeändert bleiben, wenn a sich um das unendlich kleine ∂a ändert. Sind also x, y, z die Coordinaten dieses Durchschnittspunktes, so hat man für dieselben nach dem Obigen die Gleichungen

$$(x-\varphi a)\varphi' a + (y-\psi a)\psi' a + z - a = 0,$$
$$(x-\varphi a)\varphi'' a + (y-\psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\{x-\varphi(a+\partial a)\}\varphi'(a+\partial a) + \{y-\psi(a+\partial a)\}\psi'(a+\partial a)\\ \qquad + z - (a+\partial a)\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{x-\varphi(a+\partial a)\}\varphi''(a+\partial a) + \{y+\psi(a+\partial a)\}\psi''(a+\partial a)\\ \qquad - \{1 + [\varphi'(a+\partial a)]^2 + [\psi'(a+\partial a)]^2\end{array}\right\} = 0.$$

Durch ein ganz ähnliches Raisonnement, wie vorher bei der Bestimmung der Gleichung der developpablen Fläche, die erste und dritte Gleichung mittelst Subtraction zu der zweiten führten, führen hier die erste und dritte, und die zweite und vierte Gleichung mittelst Subtraction zu folgenden zwei oder, wenn wir mit denselben die erste Gleichung verbinden, zu folgenden drei Gleichungen:

$$(x-\varphi a)\varphi' a + (y-\psi a)\psi' a + z - a = 0,$$
$$(x-\varphi a)\varphi'' a + (y-\psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0,$$
$$(x-\varphi a)\varphi''' a + (y-\psi a)\psi''' a - 3\{\varphi' a . \varphi'' a + \psi' a . \psi'' a\} = 0.$$

So wie man nämlich die zweite dieser drei Gleichungen nach dem oben gebrauchten Raisonnement aus der ersten erhält, wenn man diese nach a differentiirt, ergiebt sich auch ganz auf dieselbe Weise die dritte aus der zweiten durch Differentiation nach a.

Diese drei Gleichungen gehören also für die Coordinaten jedes Durchschnittspunktes zweier nächsten geraden erzeugenden Linien der developpablen Fläche. Die successive Folge dieser Durchschnittspunkte bildet die Wendungscurve der developpablen Fläche, und man wird also allgemeine Relationen zwischen den Coordinaten jedes Punktes der Wendungscurve, d. i. die Gleichungen derselben erhalten, wenn man aus den drei obigen Gleichungen die Größe a eliminirt. Die Wendungscurve ist keine Evolute der gegebenen Curve, obgleich sie, wie alle Evoluten, in der developpablen Fläche liegt, weil keine Berührende der Wendungscurve durch die gegebene Curve gehen kann, da alle diese Berührenden ihrer ganzen Länge nach in der developpablen Fläche liegen.

20. Seyen nun die Evoluten einer beliebigen durch die Gleichungen

$$x = \varphi z, \quad y = \psi z$$

charakterisirten doppelt gekrümmten Curve zu finden.

Die Berührende der Evolute in dem beliebigen Punkte (x, y, z) derselben geht immer durch einen gewissen Punkt der gegebenen Curve, dessen Coordinaten im Allgemeinen φa, ψa, a seyn mögen. Auf der Stelle überzeugt man sich aber auch, daß die Berührende der Projection der Evolute auf einer der coordinirten Ebenen, z. B. der Ebene der xz, in dem Punkte (x, z) dieser Projection durch den Punkt (φa, a) der Projection der gegebenen Curve auf derselben coordinirten Ebene gehen muß. Da nun nach dem Art. Berührung (3.) i. d. Z. die Gleichung der in Rede stehenden Berührenden der Projection der Evolute

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x)$$

ist, und diese Berührende durch den Punkt (φa, a) geht; so ist

$$a - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\varphi a - x),$$

oder

$$z - a = \frac{\partial z}{\partial x}(x - \varphi a) \ldots\ldots (1)$$

Weil aber die Evolute auf der in (19.) bestimmten developpablen Fläche liegt, so finden zwischen den Coordinaten x, y, z eines jeden Punktes derselben und zwischen a auch die beiden folgenden dort gefundenen Gleichungen Statt:

$$(x - \varphi a)\varphi' a + (y - \psi a)\psi' a + z - a = 0 \ldots\ldots (2),$$

$$(x - \varphi a)\varphi'' a + (y - \psi a)\psi'' a - \{1 + (\varphi' a)^2 + (\psi' a)^2\} = 0 \ldots (3),$$

und man wird folglich die beiden gesuchten Gleichungen der Evolute erhalten, wenn man a aus den Gleichungen (1), (2), (3) eliminirt. Da die Gleichung (1) den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ enthält, so wird, wenn man a aus (2) und (3), dann aus (1)

und (2) oder (1) und (3) eliminirt, die eine der beiden Gleichungen der Evolute jederzeit eine Differentialgleichung der ersten Ordnung seyn, durch deren Integration also eine willkührliche Constante eingeführt wird. Die verschiedenen Werthe, welche sich derselben beilegen lassen, führen dann zu den unendlich vielen Evoluten, welche die gegebene Curve haben kann. Daß man statt der Gleichung (1) auch eine der beiden Gleichungen

$$z - a = \frac{\partial z}{\partial y}(y - \psi a),$$

$$y - \psi a = \frac{\partial y}{\partial x}(x - \varphi a)$$

setzen kann, erhellet aus dem Obigen und aus Berührung (3.).

Die bisherige allgemeine Theorie auf specielle Fälle anzuwenden, erlaubt der Raum nicht, und wir bemerken nur noch, daß sich die Theorie der Evolution noch bedeutend erweitern und verallgemeinern läßt, indem man z. B., um hier bloß von Curven einfacher Krümmung zu reden, sich durch alle Punkte einer solchen Curve gerade Linien gezogen denken kann, welche dieselbe sämmtlich unter einem gegebenen Winkel Θ schneiden, und nun die Gleichung der Curve zu bestimmen sucht, welche von der stetigen Folge der Durchschnittspunkte dieser geraden Linien gebildet wird, wobei man sogleich bemerkt, daß alle diese geraden Linien Berührende der auf diese Weise entstehenden Curve, welche zuweilen die Evolutoide der gegebenen Curve genannt wird, sind. Die Evolutoide geht in die Evolute der gegebenen Curve über, wenn man $\Theta = 90°$ setzt, und die Theorie der Evoluten ist also hiernach ein bloß specieller Fall der Theorie der Evolutoiden. Wir müssen uns jedoch hier mit dieser allgemeinen Notiz begnügen, und verweisen u. A. auf Littrows schon angeführte Analytische Geometrie S. 299. Vorzüglich s. m. aber auch den Artikel Caustische Flächen und Linien (32. ff.) i. d. Z.

Evolutoide, s. Evolution (20.) i. d. Z.

Evolvente, s. Evolution (1.) i. d. Z.

Exponential-Gleichung. Ueber die Gleichung $e^x - x = 0$ s. m. Cauchy Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829. p. 167. 288. Folgende in theoretischer Rücksicht bemerkenswerthe Auflösung der Gleichung

$$a^x + b^{x-n} = c$$

ist mir vom Herrn Hofrath Nürnberger mitgetheilt worden. Multiplicirt man mit b^n, so wird dieselbe

$$a^x b^n + b^x = cb^n,$$

und folglich, wenn man $b^x = a^z$ setzt,

$$a^x b^n + a^z = cb^n.$$

Aber $x \log b = z \log a$, folglich

$$z = \frac{x \log b}{\log a},$$

und daher, wenn man

$$a^x = y, \quad \frac{\log b}{\log a} = m$$

setzt:

$$y^m + b^n y = cb^n,$$

wodurch also die Auflösung der gegebenen Exponential-Gleichung auf die Auflösung einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung zurückgeführt ist. Hat man nämlich y mittelst dieser Gleichung gefunden, so ist

$$x = \frac{\log y}{\log a}.$$

Für die Gleichung $2^x + 4^x = 20$ ist z. B. $a = 2$, $b = 4$, $n = 0$, $c = 20$, $m = 2$, und folglich die aufzulösende algebraische Gleichung

$$y^2 + y = 20,$$

woraus $y = 4$ und $y = -5$. Für den ersten Werth von y erhält man

$$x = \frac{\log 4}{\log 2} = 2.$$

Der zweite Werth von y giebt einen imaginären Werth von x. Daß die wirkliche Auflösung der gegebenen Gleichung nach dieser Methode meistens die Kräfte der Algebra übersteigt, erhellet leicht, wenn man nur die Größe

$$m = \frac{\log b}{\log a},$$

durch welche der Grad der aufzulösenden algebraischen Gleichung bestimmt wird, betrachtet, und namentlich auch darauf Rücksicht nimmt, daß diese Größe, wenn b keine ganze Potenz von a ist, jederzeit ein Bruch ist, in allen solchen Fällen also die erhaltene algebraische Gleichung erst rational gemacht werden muß. Auf die gegebene Exponential-Gleichung kann auch die allgemeinere Gleichung

$$a^{x-p} + b^{x-n} = 0$$

leicht reducirt werden.

Exponential-Größe. Ueber die Entwickelung der Exponentialgrößen in Reihen s. m. die Artikel Binomischer Lehrsatz (29.), Differentialrechnung (33.), Function (12.) i. d. Z. Auch vergl. man die Artikel Taylors Lehrsatz (14. 15. 16. 19—25.), Unbestimmte Coefficienten (21.) und den Artikel Differenzen-Rechnung (5. 10. 11.) i. d. Z. Auch den Artikel Convergenz der Reihen (4. 22.) kann man wegen der Convergenz der Reihen für die Exponential-Größen nachsehen.

Exponential-Rechnung. Gruson, calcul d'exposition inventé par lui. Mém. de Berlin. 1798. p. 151. 1799. et 1800. p. 157.

F.

Facultät. Die Theorie der Facultäten hat in den Fällen, wo der Exponent eine positive ganze Zahl ist, nicht die mindeste Schwierigkeit. In den Fällen aber, wo der Exponent eine gebrochene oder eine negative Zahl ist, gerieth schon Kramp auf Folgerungen, die ihn selbst befremdeten, denen zu Gefallen er aber doch andere, als ausgemacht anerkannte, Lehren aufopfern wollte. Der Grund dieser Erscheinung liegt, wie es uns scheint, nicht gar fern, und ist bloß in der zu eingeschränkten, nur auf den Fall eines positiven ganzen Exponenten passenden, Definition zu suchen, von welcher man bei dieser wichtigen Lehre ausging. In neuester Zeit hat sich unstreitig Crelle das meiste Verdienst um deren bessere Begründung erworben, wie sein Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten nach einer neuen Entwickelungsmethode. Berl. 1823, und sein treffliches Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques. Berl. 1831. bezeugen. Crelle ist in der letztern Schrift, die wir hier vorzüglich vor Augen haben, höchst zweckmäßig von einer sehr allgemeinen Definition ausgegangen, über die wir, um ihr besseres Verständniß vorzubereiten, einige einleitende Worte vorausschicken. Jede Function hat nämlich gewisse allgemeine Grundeigenschaften, aus denen sich alle übrigen Eigenschaften derselben ableiten lassen, und die man daher zur Erklärung der in Rede stehenden Function benutzen muß. Diese Eigenschaften müssen aber völlig allgemein seyn, und dürfen den betreffenden Functionen nicht bloß in speciellen Fällen zukommen. Zwei solche ganz allgemeine Eigenschaften der Potenzen, aus denen alle übrigen abgeleitet werden können, sind z. B. in den beiden folgenden allgemeinen Gleichungen ausgesprochen:

$$z^x . z^y = z^{x+y}, \quad (z^x)^y = z^{xy} .$$

Man könnte und sollte daher, wie auch Crelle in der angeführten trefflichen Schrift gethan hat, in der Analysis die Potenzen ganz allgemein auf folgende Art definiren:

Jede Function $f(z\,x)$ der beiden veränderlichen Größen z, x, welche für jedes z, x, y den beiden Gleichungen

$$f(z, x) . f(z, y) = f(z, x + y), \quad f\{f(z, x), y\} = f(z, xy)$$

genügt, heißt eine Potenz von z; x heißt der Exponent und z nennt man die Wurzel.

Giebt man die Bezeichnung durch das Functionszeichen auf, und bezeichnet die Potenzen kürzer durch z^x, so daß man nämlich dem Symbol der Wurzel das Symbol des Exponenten bloß oben zur rechten Hand beifügt; so nehmen die beiden obigen Bedingungsgleichungen die folgende einfachere Gestalt an:

$$z^x . z^y = z^{x+y}, \quad (z^x)^y = z^{xy} .$$

Aus dieser Definition läßt sich die ganze Theorie der Potenzen mit positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten mit der größten Leichtigkeit und Strenge ableiten, welches aber jetzt natürlich nicht zu unserm Zwecke gehört. Von einer ähnlichen allgemeinen Definition wollen wir mit Crelle nun auch bei der Theorie der Facultäten ausgehen.

1. Jede Function $f(z, x, y)$ der drei veränderlichen Größen z, x, y, welche für jedes z, x, y, k den drei Gleichungen

1. $f(z, x, y+k) = f(z, x, y) . f(z + yx, x, k)$
2. $f(kz, kx, y) = k^y f(z, x, y)$,
3. $f(z, x, 1) = z$

genügt, heißt eine analytische Facultät. z heißt die Basis oder die Grundzahl, x die Differenz und y der Exponent der Facultät. Der Kürze wegen wollen wir, wie auch Crelle thut, die Facultät $f(z, x, y)$ durch

$$(z, + x)^y$$

bezeichnen, da uns diese Bezeichnung vor den übrigen, die man wohl gebraucht hat, manche Vorzüge zu haben scheint. Dann erhalten die drei obigen Bedingungsgleichungen die folgende einfachere Gestalt:

4. $(z, + x)^{y+k} = (z, + x)^y (z + yx, + x)^k$,
5. $(kz, + kx)^y = k^y (z, + x)^y$,
6. $(z, + x)^1 = z$.

2. Setzt man in der Gleichung (4.)

$$y=1, k=1; \; y=2, k=1; \; y=3, k=1; \ldots\ldots ;$$

so erhält man, weil natürlich auch $(z, + x)^1 = (z, + x)^1$ ist, nach und nach:

$(z, + x)^1 = (z, + x)^1$,
$(z, + x)^2 = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1$,
$(z, + x)^3 = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1 (z + 2x, + x)^1$,
$(z, + x)^4 = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1 (z + 2x, + x)^1 (z + 3x, + x)^1$,
u. s. w. u. s. w.

Folglich allgemein

$$(z, + x)^n = (z, + x)^1 (z + x, + x)^1 (z + 2x, + x)^1 \ldots (z + (n-1)x, + x)^1 .$$

Aber nach der Gleichung (6.) für jedes z und x

$$(z, + x)^1 = z .$$

Folglich

$$(z, + x)^n = z(z + x)(z + 2x)(z + 3x) \ldots (z + (n-1)x) ,$$

und daher für jedes ganze positive y:

7. $(z, + x)^y = z(z + x)(z + 2x)(z + 3x) \ldots (z + (y-1)x)$.

Für $x = 0$ ist, wie hieraus unmittelbar folgt,

$$8.\quad (z, + 0)^y = z^y,$$

wenn nämlich y eine positive ganze Zahl ist.

Unter derselben Voraussetzung wird die Gleichung (5.) nach (7.)

$$kz(kz + kx)(kz + 2kx) \ldots (kz + (y-1)kx)$$
$$= k^y z(z + x)(z + 2x) \ldots (z + (y-1)x),$$

d. i. eine identische Gleichung, so daß also, wenn y eine positive ganze Zahl ist, durch

$$(z, + x)^y = z(z + x)(z + 2x) \ldots (z + (y-1)x)$$

in der That allen drei Bedingungsgleichungen genügt wird, wie es erforderlich ist.

Setzt man in der Gleichung (4.) $y = 0$, $k = 1$; so erhält man

$$(z, + x)^1 = (z, + x)^0 . (z, + x)^1,$$

d. i., weil nach der Gleichung (6.)

$$(z, + x)^1 = z$$

ist:

$$z = (z, + x)^0 . z.$$

Folglich

$$9.\quad (z, + x)^0 = 1.$$

Setzt man in der Gleichung (4.) $y = -y$, $k = y$; so erhält man

$$(z, + x)^0 = (z, + x)^{-y} (z - yx, + x)^y.$$

Also nach (9.)

$$10.\quad (z, + x)^{-y} = \frac{1}{(z - yx, + x)^y},$$

und folglich nach (7.), wenn y eine positive ganze Zahl ist:

$$11.\quad (z, + x)^{-y} = \frac{1}{(z-x)(z-2x)(z-3x) \ldots (z-yx)};$$

Folglich für $y = 1$:

$$12.\quad (z, + x)^{-1} = \frac{1}{z - x},$$

und, wenn man $-x$ für x setzt:

$$13.\quad (z, - x)^{-1} = \frac{1}{z + x}.$$

In dem Falle eines negativen ganzen Exponenten wird die Gleichung (5.) nach (11.):

$$\frac{1}{(kz - kx)(kz - 2kx)(kz - 3kx) \ldots (kz - ykx)}$$
$$= \frac{1}{k^y (z-x)(z-2x)(z-3x) \ldots (z-yx)},$$

d. i. ebenfalls identisch.

Für $x = 0$ ergiebt sich aus (11.)

$$14.\quad (z, + 0)^{-y} = \frac{1}{z^y} = z^{-y}.$$

Für $z = 0$ erhält man aus (11.)

$$15.\quad (0, + x)^{-y} = \frac{(-1)^y}{x.2x.3x.4x.....yx}.$$

Sey jetzt $\frac{p}{q}$ ein beliebiger Bruch, wo aber p und q immer ganze Zahlen bezeichnen sollen und q offenbar als positiv angenommen werden kann; so erhält man aus (4.) leicht nach und nach:

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} = (z, + x)^{\frac{2p}{q}}$$

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} = (z, + x)^{\frac{3p}{q}},$$

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{3p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} = (z, + x)^{\frac{4p}{q}},$$

u. s. w. u. s. w.

Also ist allgemein für jedes ganze positive n

$$16.\quad (z, + x)^{\frac{np}{q}} =$$

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} \ldots (z + \frac{(n-1)p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}},$$

und folglich, wenn wir $n = q$ setzen:

$$17.\quad (z, + x)^p =$$

$$(z, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} (z + \frac{2p}{q}x, + x)^{\frac{p}{q}} \ldots (z + \frac{(q-1)p}{q}, + x)^{\frac{p}{q}}.$$

Für $x = 0$ ist folglich

$$(z, + 0)^p = \left\{(z, + 0)^{\frac{p}{q}}\right\}^q.$$

Aber nach (8.) und (14.)

$$(z, + 0)^p = z^p.$$

Also

$$z^p = \left\{(z, + 0)^{\frac{p}{q}}\right\}^q,$$

und folglich

$$18.\quad (z, + 0)^{\frac{p}{q}} = z^{\frac{p}{q}},$$

so daß also nun nach (8.), (14.) und (18.) für jedes positive oder negative, ganze oder gebrochene y immer

$$19.\quad (z, + 0)^y = z^y$$

ist.

Wenn man in (4.) y und k gegen einander vertauscht, so erhält man

$$(z, + x)^{y+k} = (z, + x)^k (z + kx, + x)^y .$$

Also ist immer

$$(z, + x)^y (z + yx, + x)^k = (z, + x)^k (z + kx, + x)^y ,$$

oder

$$20.\quad \frac{(z + kx, + x)^y}{(z, + x)^y} = \frac{(z + yx, + x)^k}{(z, + x)^k} .$$

Setzt man in der Gleichung (5.) zuerst $k = \frac{1}{z}$, dann $k = \frac{1}{x}$; so wird dieselbe

$$\left(1, + \frac{x}{z}\right)^y = \frac{1}{z^y} (z, + x)^y ,$$

$$\left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y = \frac{1}{x^y} (z, + x)^y .$$

Also ist

$$21.\quad (z, + x)^y = z^y \left(1, + \frac{x}{z}\right)^y ,$$

$$22.\quad (z, + x)^y = x^y \left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y .$$

Setzt man in der Gleichung (5.) $-x$ statt x, so wird dieselbe

$$(kz, - kx)^y = k^y (z, - x)^y .$$

Setzt man nun in dieser Gleichung zuerst $k = \frac{1}{z}$, dann $k = \frac{1}{x}$; so wird dieselbe

$$\left(1, - \frac{x}{z}\right)^y = \frac{1}{z^y} (z, - x)^y ,$$

$$\left(\frac{z}{x}, - 1\right)^y = \frac{1}{x^y} (z, - x)^y .$$

Folglich

$$21^*.\quad (z, - x)^y = z^y \left(1, - \frac{x}{z}\right)^y ,$$

$$22^*.\quad (z, - x)^y = x^y \left(\frac{z}{x}, - 1\right)^y .$$

Aus der Gleichung (22.) folgt

$$(z, + x)^y = x^y \frac{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}\left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}}.$$

Setzt man aber in der Gleichung (4.)

$$z = 1,\ x = 1,\ y = \frac{z}{x} - 1,\ k = y;$$

so wird dieselbe

$$(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1+y} =$$

$$(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}\left(1 + \frac{z}{x} - 1, + 1\right)^y = (1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}\left(\frac{z}{x}, + 1\right)^y.$$

Also ist

$$23.\quad (z, + x)^y = x^y \cdot \frac{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1+y}}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}}.$$

Diese merkwürdige und wichtige Gleichung zeigt, daß jede Facultät mit einer beliebigen Basis und Differenz jederzeit durch zwei andere Facultäten ausgedrückt werden kann, deren Grundzahlen und Differenzen die Einheit sind.

Setzt man in der Gleichung (4.)

$$z = 1,\ x = 1,\ k = \frac{z}{x} - 1;$$

so wird dieselbe

$$(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1+y} = (1, + 1)^y\,(1 + y, + 1)^{\frac{z}{x}-1}.$$

Aber nach der Gleichung (5.) für

$$z = \frac{1}{y} + 1,\ x = \frac{1}{y},\ k = y,\ y = \frac{z}{x} - 1:$$

$$(1 + y, + 1)^{\frac{z}{x}-1} = y^{\frac{z}{x}-1} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1, + \frac{1}{y}\right)^{\frac{z}{x}-1}.$$

Folglich nach (23.)

$$24.\quad (z, + x)^y = \frac{(1, + 1)^y \left(\frac{1}{y} + 1, + \frac{1}{y}\right)^{\frac{z}{x}-1} \cdot y^{\frac{z}{x}-1} \cdot x^y}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}}.$$

Für $y = \infty$ folgt hieraus

$$(z, + x)^y = \frac{(1, + 1)^y (1, + 0)^{\frac{z}{x}-1} \cdot y^{\frac{z}{x}-1} x^y}{(1, + 1)^{\frac{z}{x}-1}},$$

d. i. nach (19.)

$$25.\quad (z,+x)^{\underline{y}} = \frac{(1,+1)^{\underline{y}}\, y^{\underline{\frac{z}{x}-1}}\, x^{\underline{y}}}{(1,+1)^{\underline{\frac{z}{x}-1}}},$$

und für $x=1$:

$$26.\quad (z,+1)^{\underline{y}} = \frac{(1,+1)^{\underline{y}}\, y^{\underline{z-1}}}{(1,+1)^{\underline{z-1}}},$$

wobei man aber nicht aus den Augen verlieren darf, daß die beiden vorigen Gleichungen nur für $y=\infty$ gelten.

Setzt man in der ersten Fundamentalgleichung $yx=u$; so wird dieselbe

$$27.\quad (z+u,+x)^{\underline{k}} = \frac{(z,+x)^{\underline{\frac{u}{x}+k}}}{(z,+x)^{\underline{\frac{u}{x}}}},$$

eine Gleichung, mittelst welcher durch zwei Facultäten von gleicher Basis und Differenz jede Facultät von derselben Differenz, aber beliebiger Basis, ausgedrückt werden kann.

Setzt man in der Gleichung (5.) $k=\frac{w}{x}$; so wird dieselbe

$$\left(\frac{wz}{x},+w\right)^{\underline{y}} = \left(\frac{w}{x}\right)^{\underline{y}} (z,+x)^{\underline{y}}.$$

Aber wegen der Gleichung (4.)

$$(v,+w)^{\underline{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}+y}} = (v,+w)^{\underline{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}}\left(v+w\left(\frac{z}{x}-\frac{v}{w}\right),+w\right)^{\underline{y}}$$

$$= (v,+w)^{\underline{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}}\left(\frac{wz}{x},+w\right)^{\underline{y}}.$$

Folglich nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{w}{x}\right)^{\underline{y}} (z,+x)^{\underline{y}} = \frac{(v,+w)^{\underline{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}+y}}}{(v,+w)^{\underline{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}}},$$

und daher

$$28.\quad (z,+x)^{\underline{y}} = \left(\frac{x}{w}\right)^{\underline{y}} \frac{(v,+w)^{\underline{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}+y}}}{(v,+w)^{\underline{\frac{z}{x}-\frac{v}{w}}}},$$

mittelst welcher Gleichung man jede Facultät auf zwei anderer Facultäten von gleichen aber beliebigen Grundzahlen und Differenzen reduciren kann.

Setzt man in der vorigen Gleichung $v=z$, $x=w+k$; so wird dieselbe

$$(z, + w + k)^y = \left(\frac{w+k}{w}\right)^y \cdot \frac{(z, + w)^{\frac{z}{w+k} - \frac{z}{w} + y}}{(z, + w)^{\frac{z}{w+k} - \frac{z}{w}}},$$

und, wenn man x für w setzt:

$$29.\quad (z, + x + k)^y = \left(1 + \frac{k}{x}\right)^y \cdot \frac{(z, + x)^{-\frac{zk}{x(x+k)} + y}}{(z, + x)^{-\frac{zk}{x(x+k)}}},$$

oder, wenn man $x = 1$ und $k - 1$ für k setzt:

$$(z, + k)^y = k^y \cdot \frac{(z, + 1)^{\frac{z}{k} - z + y}}{(z + 1)^{\frac{z}{k} - z}},$$

und wenn man jetzt wieder x für k setzt:

$$30.\quad (z, + x)^y = x^y \cdot \frac{(z, + 1)^{\frac{z}{x} - z + y}}{(z, + 1)^{\frac{z}{x} - z}}.$$

Mittelst der Formeln (29.) und (30.) kann man jede Facultät durch zwei andere von gleichen Grundzahlen und Differenzen, welche zugleich die Grundzahl mit der gegebenen Facultät gemein haben, ausdrücken.

3. Bevor wir weiter gehen, wollen wir zuerst die Facultäten mit positiven ganzen Exponenten noch etwas näher betrachten. Weil aber nach (22.*) jede Facultät

$$(z, - x)^y = x^y \left(\frac{z}{x}, - 1\right)^y$$

ist; so ist es verstattet, diese Untersuchung der Kürze wegen auf die Facultäten von der Form $(z, - 1)^y$ zu beschränken, welche Lacroix nach Vandermonde durch $[z]^y$ bezeichnet, so daß also nach (7.), wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$[z]^n = z(z-1)(z-2) \ldots (z-n+1)$$

ist. Wir wollen der Einfachheit wegen diese Bezeichnung von Vandermonde bei der jetzigen speciellen Untersuchung beibehalten, und versuchen nun zuerst, die Potenz z^n durch Größen von der Form $[z]^n$ auszudrücken.

I. Man setze zu dem Ende

$$z^n = A_0 + A_1 [z-1]^1 + A_2 [z-1]^2 + A_3 [z-1]^3 + \ldots + A_n [z-1]^n,$$

wo es also jetzt auf die Bestimmung der Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ ankommt.

Setzt man nach und nach $z = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$; so erhält man

$$1^n = A_0 ,$$
$$2^n = A_0 + 1.A_1 ,$$
$$3^n = A_0 + 2.A_1 + 2.1A_2 ;$$
$$4^n = A_0 + 3.A_1 + 3.2A_2 + 3.2.1A_3 ,$$
$$5^n = A_0 + 4.A_1 + 4.3A_2 + 4.3.2A_3 + 4.3.2.1A_4 ,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

Wir wollen nun bloß zeigen, wie man A_4 auf eine sehr leichte Art bestimmen kann, weil daraus sich auch unmittelbar das Verfahren, im Allgemeinen A_k zu bestimmen, ergeben wird. Man multiplicire nämlich die oben stehenden fünf Gleichungen von der letzten an nach der Reihe mit

$$1, -\frac{4}{1}, \frac{4.3}{1.2}, -\frac{4.3.2}{1.2.3}, \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$$

und addire die Producte; so wird die Größe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, wenn wir der Kürze wegen Thibauts Bezeichnung der Binomial-Coefficienten gebrauchen,

$$5^n - {}^1_4\mathfrak{B}.4^n + {}^2_4\mathfrak{B}.3^n - {}^3_4\mathfrak{B}.2^n + {}^4_4\mathfrak{B}.1^n .$$

Der Coefficient von A_0 auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist

$$1 - \frac{4}{1} + \frac{4.3}{1.2} - \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = (1-1)^4 = 0 .$$

Der Coefficient von A_1 ist

$$1.4 - \frac{4}{1}.3 + \frac{4.3}{1.2}.2 - \frac{4.3.2}{1.2.3}.1$$
$$= 4\left\{1 - \frac{3}{1} + \frac{3.2}{1.2} - \frac{3.2.1}{1.2.3}\right\} = 4.(1-1)^3 = 0 .$$

Der Coefficient von A_2 ist

$$1.4.3 - \frac{4}{1}.3.2 + \frac{4.3}{1.2}.2.1$$
$$= 4.3\left\{1 - \frac{2}{1} + \frac{2.1}{1.2}\right\} = 4.3.(1-1)^2 = 0 .$$

Der Coefficient von A_3 ist

$$1.4.3.2 - \frac{4}{1}.3.2.1 = 4.3.2\left\{1 - \frac{1}{1}\right\} = 4.3.2.(1-1)^1 = 0 .$$

Der Coefficient von A_4 ist $= 4.3.2.1$. Also ist

$$4.3.2.1A_4 = [4].A_4$$
$$= 5^n - {}^1_4\mathfrak{B}.4^n + {}^2_4\mathfrak{B}.3^n - {}^3_4\mathfrak{B}.2^n + {}^4_4\mathfrak{B}.1^n .$$

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich sehr leicht, daß allgemein

$$31.\quad \overset{k}{[k]}.A_k =$$

$$(k+1)^n - {}^{k}\mathfrak{B}^{1}.k^n + {}^{k}\mathfrak{B}^{2}.(k-1)^n - {}^{k}\mathfrak{B}^{3}.(k-2)^n + \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^{k-1}.{}^{k}\mathfrak{B}^{k-1}.2^n + (-1)^k.{}^{k}\mathfrak{B}^{k}.1^n$$

ist, wodurch also die Aufgabe, die wir uns vorlegten, vollständig aufgelöst ist. Daß $A_0 = 1$ ist, ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar.

II. Man kann aber auch

$$z^n = B_1\overset{1}{[z]} + B_2\overset{2}{[z]} + B_3\overset{3}{[z]} + B_4\overset{4}{[z]} + \ldots + B_n\overset{n}{[z]}$$

setzen. Setzt man wieder $z = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$; so ergiebt sich:

$1^n = 1.B_1$,

$2^n = 2.B_1 + 2.1B_2$,

$3^n = 3.B_1 + 3.2B_2 + 3.2.1B_3$,

$4^n = 4.B_1 + 4.3B_2 + 4.3.2B_3 + 4.3.2.1B_4$,

$5^n = 5.B_1 + 5.4B_2 + 5.4.3B_3 + 5.4.3.2B_4 + 5.4.3.2.1B_5$,

u. s. w. u. s. w.

Multiplicirt man nun diese Gleichungen, um B_s zu finden, von der letzten an nach der Reihe mit

$$1, -\frac{5}{1}, \frac{5.4}{1.2}, -\frac{5.4.3}{1.2.3}, \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4},$$

und addirt die Producte; so wird die Größe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens

$$5^n - {}^{5}\mathfrak{B}^{1}.4^n + {}^{5}\mathfrak{B}^{2}.3^n - {}^{5}\mathfrak{B}^{3}.2^n + {}^{5}\mathfrak{B}^{4}.1^n .$$

Der Coefficient von B_1 wird

$$1.5 - \frac{5}{1}.4 + \frac{5.4}{1.2}.3 - \frac{5.4.3}{1.2.3}.2 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.1$$

$$= 5\left\{1 - \frac{4}{1} + \frac{4.3}{1.2} - \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\right\} = 5.(1-1)^4 = 0 .$$

Der Coefficient von B_2 wird

$$1.5.4 - \frac{5}{1}.4.3 + \frac{5.4}{1.2}.3.2 - \frac{5.4.3}{1.2.3}.2.1$$

$$= 5.4\left\{1 - \frac{3}{1} + \frac{3.2}{1.2} - \frac{3.2.1}{1.2.3}\right\} = 5.4.(1-1)^3 = 0 .$$

Der Coefficient von B_3 wird

$$1.5.4.3 - \frac{5}{1}.4.3.2 + \frac{5.4}{1.2}.3.2.1$$

$$= 5.4.3\left\{1 - \frac{2}{1} + \frac{2.1}{1.2}\right\} = 5.4.3.(1-1)^2 = 0 .$$

Der Coefficient von B_4 wird

$$.5.4.3.2 - \frac{5}{1}.4.3.2.1 = 5.4.3.2\left\{1 - \frac{1}{1}\right\} = 5.4.3.2.(1-1)^1 = 0.$$

Der Coefficient von B_4 ist 5. 4. 3. 2. 1. Also ist

$$5.4.3.2.1\,B_5 = [5]^5 . B_5$$
$$= 5^n - {}^5\mathfrak{B}^1 . 4^n + {}^5\mathfrak{B}^2 . 3^n - {}^5\mathfrak{B}^3 . 2^n + {}^5\mathfrak{B}^4 . 1^n ,$$

und auf diese Weise allgemein

$$32.\ [k]^k . B_k =$$
$$k^n - {}^k\mathfrak{B}^1 . (k-1)^n + {}^k\mathfrak{B}^2 . (k-2)^n - {}^k\mathfrak{B}^3 . (k-3)^n + \ldots .$$
$$\ldots . + (-1)^{k-2} . {}^k\mathfrak{B}^{k-2} . 2^n + (-1)^{k-1} . {}^k\mathfrak{B}^{k-1} . 1^n ,$$

wodurch also auch unsere zweite Aufgabe vollständig aufgelöst ist.

III. Es ist allgemein

$$[z + y]^{n+1} = [z + y]^n . (z + y - n)$$
$$= [z + y]^n . (z - n) + [z + y]^n . y .$$

Aber offenbar

$$[z + y]^1 = [z]^1 + [y]^1 .$$

Also

$$[z + y]^2 = [z]^1 . (z - 1) + [y]^1 . (z - 1)$$
$$+ [z]^1 . y + [y]^1 . y$$
$$= [z]^1 . (z - 1) + z . [y]^1$$
$$+ [z]^1 . y + [y]^1 . (y - 1)$$
$$= [z]^2 + 2[z]^1 [y]^1 + [y]^2 .$$

Folglich

$$[z + y]^3 = [z]^2 . (z - 2) + 2[z]^1 [y]^1 . (z - 2) + [y]^2 . (z - 2)$$
$$+ [z]^2 . y + 2[z]^1 [y]^1 . y + [y]^2 . y$$
$$= [z]^2 . (z - 2) + 2[z]^1 [y]^1 . (z - 1) + [y]^2 . z$$
$$+ [z]^2 . y + 2[z]^1 [y]^1 . (y - 1) + [y]^2 . (y - 2)$$
$$= [z]^3 + 3[z]^2 [y]^1 + 3[z]^1 [y]^2 + [y]^3 .$$

Sey nun nach dem Gesetze, welches man hier schon bemerkt, allgemein

$$[z + y]^n =$$
$$C_0 [z]^n + C_1 [z]^{n-1} [y]^1 + C_2 [z]^{n-2} [y]^2 + \ldots + C_{n-1} [z]^1 [y]^{n-1} + C_n [y]^n ;$$

so wird nach der obigen allgemeinen Relation:

$$
\begin{aligned}
[z+y]^{n+1} = {} & C_0 [z]^{n} . (z-n) \\
& + C_1 [z]^{n-1} [y]^{1} . (z-n) + C_0 [z]^{n} . y \\
& + C_2 [z]^{n-2} [y]^{2} . (z-n) + C_1 [z]^{n-1} [y]^{1} . y \\
& + C_3 [z]^{n-3} [y]^{3} . (z-n) + C_2 [z]^{n-2} [y]^{2} . y \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& + C_{n-1} [z]^{1} [y]^{n-1} . (z-n) + C_{n-2} [z]^{2} [y]^{n-2} . y \\
& + C_n [y]^{n} . (z-n) + C_{n-1} [z]^{1} [y]^{n-1} . y \\
& \qquad + C_n [y]^{n} . y .
\end{aligned}
$$

Setzt man nun nach und nach

$$
\begin{aligned}
z - n &= z - n \\
&= (z - n + 1) - 1 \\
&= (z - n + 2) - 2 \\
&= (z - n + 3) - 3 \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&= (z - n + (n-1)) - (n-1) \\
&= (z - n + n) - n ;
\end{aligned}
$$

so wird

$$
\begin{aligned}
[z+y]^{n+1} = {} & C_0 [z]^{n} . (z-n) \\
& + C_1 [z]^{n-1} [y]^{1} . (z-n+1) + C_0 [z]^{n} . y \\
& + C_2 [z]^{n-2} [y]^{2} . (z-n+2) + C_1 [z]^{n-1} [y]^{1} . (y-1) \\
& + C_3 [z]^{n-3} [y]^{3} . (z-n+3) + C_2 [z]^{n-2} [y]^{2} . (y-2) \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& + C_{n-1} [z]^{1} [y]^{n-1} . (z-1) + C_{n-2} [z]^{2} [y]^{n-2} . (y-n+2) \\
& + C_n [y]^{n} . z \qquad + C_{n-1} [z]^{1} [y]^{n-1} . (y-n+1) \\
& \qquad + C_n [y]^{n} . (y-n) \\
= {} & C_0 [z]^{n+1} \\
& + C_1 [z]^{n} [y]^{1} + C_0 [z]^{n} [y]^{1} \\
& + C_2 [z]^{n-1} [y]^{2} + C_1 [z]^{n-1} [y]^{2} \\
& + C_3 [z]^{n-2} [y]^{3} + C_2 [z]^{n-2} [y]^{3} \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& + C_{n-1} [z]^{2} [y]^{n-1} + C_{n-2} [z]^{2} [y]^{n-1} \\
& + C_n [z]^{1} [y]^{n} + C_{n-1} [z]^{1} [y]^{n} \\
& \qquad + C_n [y]^{n+1} ,
\end{aligned}
$$

d. i.

$$[z + y]^{n+1} =$$

$$C_0 [z]^{n+1} + (C_0 + C_1)[z]^{n}[y]^{1} + (C_1 + C_2)[z]^{n-1}[y]^{2} + \ldots$$

$$\ldots + (C_{n-1} + C_n)[z]^{1}[y]^{n} + C_n [y]^{n+1}.$$

Die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder von $[z + y]^{1}$ sind 1, 1, und es erhellet also aus dem Vorhergehenden, daß die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder von

$$[z + y]^{1}, [z + y]^{2}, [z + y]^{3}, [z + y]^{4}, \ldots.$$

aus den numerischen Coefficienten 1, 1 ganz eben so nach und nach entstehen, wie die Binomial-Coefficienten. Daher ist allgemein für jedes ganze positive n:

$$33.\quad [z + y]^{n} = [z]^{n} + {}^{n}\mathfrak{B}[z]^{n-1}[y]^{1} + {}^{n}\mathfrak{B}[z]^{n-2}[y]^{2} + \ldots.$$

$$\ldots. + {}^{n}\mathfrak{B}[z]^{1}[y]^{n-1} + {}^{n}\mathfrak{B}[y]^{n},$$

eine Formel, welche wegen ihrer Analogie mit dem binomischen Lehrsatze sehr merkwürdig ist.

4. Wir wollen nun auch die Sinus und Cosinus durch Facultäten auszudrücken suchen, bedienen uns dabei aber wieder der gleich zu Anfange dieses Artikels nach Crelle eingeführten allgemeinen Bezeichnung der Facultäten. Nach den im Artikel Cyklometrie (42.) i. d. Z. und auf andere Art Thl. I. S. 633. bewiesenen merkwürdigen Ausdrücken ist

$$\sin x = x.\frac{(\pi - x)(2\pi - x)(3\pi - x)\ldots(\pi + x)(2\pi + x)(3\pi + x)\ldots.}{\pi.2\pi.3\pi\ldots\pi.2\pi.3\pi\ldots.},$$

$$\cos x = \frac{(\pi - 2x)(3\pi - 2x)(5\pi - 2x)\ldots(\pi + 2x)(3\pi + 2x)5\pi + 2x)\ldots}{\pi.3\pi.5\pi\ldots\pi.3\pi.5\pi\ldots.}.$$

Also in der bekannten Bezeichnung der Facultäten:

$$\left.\begin{aligned} 34.\quad \sin x &= x.\frac{(\pi - x, +\pi)^{n}(\pi + x, +\pi)^{n}}{(\pi, +\pi)^{n}(\pi, +\pi)^{n}} \\ 35.\quad \cos x &= \frac{(\pi - 2x, +2\pi)^{n}(\pi + 2x, +2\pi)^{n}}{(\pi, +2\pi)^{n}(\pi, +2\pi)^{n}} \end{aligned}\right\} \text{für } n = \infty.$$

Nun ist aber nach den beiden Gleichungen (25.) und (5.)

$$(\pi - x, +\pi)^{n} = \frac{(1, +1)^{n}n^{-\frac{x}{\pi}}\pi^{n}}{(1, +1)^{-\frac{x}{\pi}}}, \quad (\pi + x, +\pi)^{n} = \frac{(1, +1)^{n}n^{\frac{x}{\pi}}\pi^{n}}{(1, +1)^{\frac{x}{\pi}}};$$

$$(\pi-2x,+2\pi)^n=\frac{(1,+1)^n n^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}.(2\pi)^n}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}},\quad (\pi+2x,+2\pi)^n=\frac{(1,+1)^n n^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}.(2\pi)^n}{(1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}};$$

$$(\pi,+n)^n=\pi^n(1,+1)^n,\quad (\pi,+2\pi)^n=\frac{(1,+1)^n n^{-\frac{1}{2}}.(2\pi)^n}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Folglich nach gehöriger Substitution:

$$36.\quad \sin x=\frac{x}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}},$$

$$37.\quad \cos x=\frac{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{-\frac{1}{2}}}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}}.$$

Nach der Gleichung (4.) ist auch

$$36^*.\quad (1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}=(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}},$$

$$37^*.\quad (1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}=(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2},+1)^{\frac{x}{\pi}}.$$

Folglich auch

$$38.\quad \cos x=\frac{1}{(\frac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}}(\frac{1}{2},+1)^{\frac{x}{\pi}}}.$$

Weil ferner bekanntlich $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$ ist; so folgt aus (36.)

$$39.\quad \cos x=\frac{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}}{(1,+1)^{-\frac{2x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{2x}{\pi}}}.$$

Weil ferner $\operatorname{tang} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ist, so folgt aus (36.) und (38.)

$$40.\quad \operatorname{tang} x=x.\frac{(\frac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}}(\frac{1}{2},+1)^{\frac{x}{\pi}}}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}}.$$

Für $x=\frac{1}{2}\pi$ ist $\sin x=1$; also nach (36.)

$$1=\frac{\frac{1}{2}\pi}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

olglich

$$41.\quad \tfrac{1}{2}\pi=(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Aber nach (4.) und (6.)

$$(1, + 1)^{\frac{1}{2}} = (1, + 1)^{-\frac{1}{2}+1} = (1, + 1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}, + 1)^1 = \tfrac{1}{2}(1, +1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich nach (41.)

$$\pi = 4\{(1, + 1)^{\frac{1}{2}}\}^2 = \{(1, + 1)^{-\frac{1}{2}}\}^2 .$$

Also

$$42.\quad \pi^{\frac{1}{2}} = 2(1, + 1)^{\frac{1}{2}} = (1, + 1)^{-\frac{1}{2}} .$$

5. Setzt man in (36.) πx für x, so erhält man

$$\sin \pi x = \frac{\pi x}{(1, + 1)^{-x}(1, + 1)^x} .$$

Aber nach (4.)

$$(1, + 1)^{x-1} = (1, + 1)^x (1 + x, + 1)^{-1} ,$$

und nach (12.)

$$(1 + x, + 1)^{-1} = \frac{1}{1+x-1} = \frac{1}{x} .$$

Also

$$(1, + 1)^{x-1} = \frac{(1, + 1)^x}{x}, \quad (1, + 1)^x = x(1, + 1)^{x-1} .$$

Folglich

$$43.\quad \sin \pi x = \frac{\pi}{(1, + 1)^{x-1}(1, + 1)^{-x}},$$

$$44.\quad (1, + 1)^{x-1}(1, + 1)^{-x} = \frac{\pi}{\sin \pi x} .$$

Folglich für $x = \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{3}{y}, \ldots$:

$$(1, + 1)^{-\frac{1}{y}}(1, + 1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{y}},$$

$$(1, + 1)^{-\frac{2}{y}}(1, + 1)^{-\frac{y-2}{y}} = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{y}},$$

$$(1, + 1)^{-\frac{3}{y}}(1, + 1)^{-\frac{y-3}{y}} = \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{y}},$$

u. s. w. u. s. w.

Ist nun y ungerade, so sind $\frac{y-1}{2}$ und $\frac{y+1}{2}$ ganze Zahlen, und $\frac{y+1}{2}$ ist $= \frac{y-1}{2} + 1$. Setzt man in diesem Falle die obigen Gleichungen bis zu der Gleichung

$$(1,+1)^{-\frac{y-1}{2y}}\,(1,+1)^{-\frac{y+1}{2y}} = \frac{\pi}{\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}}$$

fort, und multiplicirt sämmtliche Gleichungen in einander, so erhält man

$$45.\quad (1,+1)^{-\frac{1}{y}}\,(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\,(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}}\cdot\ldots\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}},$$

vorausgesetzt, daß y eine ungerade Zahl ist.

Ist aber y eine gerade Zahl, so sind $\frac{y-2}{2}$ und $\frac{y+2}{2}$ ganze Zahlen, und $\frac{y+2}{2}$ ist $= \frac{y-2}{2} + 2$. Setzt man nun in diesem Falle die obigen Gleichungen bis zur Gleichung

$$(1,+1)^{-\frac{y-2}{2y}}\,(1,+1)^{-\frac{y+2}{2y}} = \frac{\pi}{\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}},$$

fort, fügt noch die Gleichung $(1,+1)^{-\frac{y}{2y}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}}$ (42.), indem man bemerkt, daß $\frac{y}{2} = \frac{y-2}{2} + 1$ ist, hinzu, und multiplicirt dann die sämmtlichen Gleichungen in einander, so erhält man:

$$46.\quad (1,+1)^{-\frac{1}{y}}\,(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\,(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}}\cdot\ldots\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}}\pi^{\frac{1}{2}},$$

vorausgesetzt, daß y eine gerade Zahl ist.

Nach dem Cotesischen Lehrsatze ist aber

$$x^{2n+1} - a^{2n+1} = (x-a)(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\times\ (x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\times\ (x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times\ (x^2 - 2ax\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + a^2)$$

$$x^{2n} - a^{2n} = (x^2 - a^2)(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n} + a^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n} + a^2).$$

Also, wenn man respective mit $x - a$ und $x^2 - a^2$ dividirt:

$$x^{2n} + x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 + \ldots + xa^{2n-1} + a^{2n}$$
$$= (x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + a^2)$$
$$x^{2n-2} + x^{2n-4}a^2 + x^{2n-6}a^4 + \ldots + x^2a^{2n-4} + a^{2n-2}$$
$$= (x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n} + a^2)$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{2n} + a^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x^2 - 2ax\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n} + a^2),$$

und folglich, wenn man $a = x = 1$ setzt:

$$2n+1 = 2^n\left(1-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right),\quad n = 2^{n-1}\left(1-\cos\frac{2\pi}{2n}\right)$$
$$\times\left(1-\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)\qquad\left(1-\cos\frac{4\pi}{2n}\right)$$
$$\times\left(1-\cos\frac{6\pi}{2n+1}\right)\qquad\left(1-\cos\frac{6\pi}{2n}\right)$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$
$$\times\left(1-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)\qquad\left(1-\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n}\right),$$

woraus sogleich

$$\frac{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}{2^n} = \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1},$$

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}} = \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

folgt. Setzen wir nun $2n+1=y$, so ist $n=\frac{y-1}{2}$, also

$$47.\quad \sin\frac{\pi}{y}\sin\frac{2\pi}{y}\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\sin\frac{(y-1)\pi}{2y} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}},$$

vorausgesetzt, daß y eine ungerade Zahl ist. Für $2n=y$, $n=\frac{1}{2}y$, $n-1=\frac{y-2}{2}$ folgt eben so leicht

$$48.\quad \sin\frac{\pi}{y}\sin\frac{2\pi}{y}\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\sin\frac{(y-2)\pi}{2y} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}},$$

wenn y eine gerade Zahl ist. Nach (45.) und (46.) ist also

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{\pi^{\frac{y-1}{2}}2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}},$$

wenn y ungerade ist, und

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{y-2}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}},$$

wenn y gerade ist, d. i. für jedes gerade oder ungerade y

$$49.\quad (1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

6. Hieraus leitet Crelle a. a. O. p. 118 — p. 120. noch einen andern merkwürdigen Satz auf folgende Art ab. Nach (4.) ist nämlich

$$(1,+1)^{k-1} = (1,+1)^{k}(1+k,+1)^{-1},$$

und nach (12.)

$$(1+k,+1)^{-1} = \frac{1}{1+k-1} = \frac{1}{k};$$

also

$$(1, + 1)^{k-1} = \frac{(1, + 1)^k}{k},$$

und, wenn man yk für k setzt,

$$(1, + 1)^{yk-1} = \frac{(1, + 1)^{yk}}{yk};$$

also durch Division

$$\frac{(1, + 1)^{k-1}}{(1, + 1)^{yk-1}} = \frac{(1, + 1)^k y}{(1, + 1)^{yk}},$$

oder

$$50. \quad \frac{(1, + 1)^k}{(1, + 1)^{k-1}} = \frac{(1, + 1)^{yk} y^{-1}}{(1, + 1)^{yk-1}},$$

und folglich auch, da man

$$(1, + 1)^{k-1} = (1, + 1)^{k-\frac{y}{y}}$$

setzen kann:

$$\frac{(1, + 1)^k \, (1, + 1)^{k-\frac{1}{y}} \, (1, + 1)^{k-\frac{2}{y}} \ldots (1, + 1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1, + 1)^{k-\frac{1}{y}} \, (1, + 1)^{k-\frac{2}{y}} \, (1, + 1)^{k-\frac{3}{y}} \ldots (1, + 1)^{k-\frac{y}{y}}}$$

$$= \frac{(1, + 1)^{yk} y^{-1}}{(1, + 1)^{yk-1}} = \frac{(1, + 1)^{yk} y^{-yk-1}}{(1, + 1)^{yk-1} y^{-yk}},$$

wobei aber zu bemerken ist, daß diese Gleichung, so wie die Gleichung (50.), für $k = 0$ im Allgemeinen nicht gilt, indem sonst nach (50.), wenn man $k = 0$ setzt, im Allgemeinen $1 = y^{-1}$ seyn müßte. Bezeichnen wir nun die Nenner der beiden Brüche auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in vorstehender Gleichung durch $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$; so ist, wie leicht erhellet,

$$\frac{f(k + \frac{1}{y}, y)}{f(k, y)} = \frac{\varphi(k + \frac{1}{y}, y)}{\varphi(k, y)}, \quad \frac{f(k, y)}{\varphi(k, y)} = \frac{f(k + \frac{1}{y}, y)}{\varphi(k + \frac{1}{y}, y)},$$

oder, wenn wir den Bruch auf der linken Seite des Gleichheitszeichens durch $F(k, y)$ bezeichnen,

$$F(k, y) = F(k + \frac{1}{y}, y)$$

für jedes k, nur nicht für $k = 0$, wie aus dem Obigen folgt. Hieraus schließt Crelle, daß

$$F(k, y) = A,$$

also

$$f(k, y) = A\varphi(k, y),$$

d. i.

$$(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1, +1)^{k-\frac{2}{y}}(1, +1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{k-\frac{y}{y}} = A.(1, +1)^{yk-1}y^{-yk},$$

seyn müsse, wo A eine von k unabhängige Größe bezeichnet, für jedes k, nur nicht für $k = 0$, wie aus dem Obigen folgt. Für $k = \frac{1}{y}$ erhält man hieraus leicht nach (9.)

$$1, +1)^{-\frac{1}{y}}(1, +1)^{-\frac{2}{y}}(1, +1)^{-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = Ay^{-1},$$

d. i. nach (49.)

$$Ay^{-1} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}, \quad A = (2\pi)^{\frac{y-1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich nach dem Obigen

$$(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1, +1)^{k-\frac{2}{y}}(1, +1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots(1, +1)^{k-\frac{y}{y}} = (1, +1)^{yk-1}y^{-yk+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{y-1}{2}},$$

oder, wenn man $k + \frac{1}{y}$ für k setzt:

51. $$(1, +1)^{k}(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1, +1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots(1, +1)^{k-\frac{y-1}{y}} = (1, +1)^{yk}y^{-yk-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{y-1}{2}},$$

oder

52. $$(1, +1)^{yk} = \frac{y^{yk+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1, +1)^{k}(1, +1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots(1, +1)^{k-\frac{y-1}{y}},$$

welches nach (49.) auch für $k = 0$ gilt.

Setzt man $k = x - \frac{1}{y}$, so wird

$$(1, + 1)^{yx-1} =$$

$$\frac{y^{yx-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1, + 1)^{x-\frac{1}{y}}(1, + 1)^{x-\frac{2}{y}}(1, + 1)^{x-\frac{3}{y}}\ldots(1,+1)^{x-1},$$

oder, wenn man n für y setzt und die Ordnung der Factoren umkehrt:

$$(1, + 1)^{x-1}(1, + 1)^{x-1+\frac{1}{n}}(1, + 1)^{x-1+\frac{2}{n}}\ldots(1,+1)^{x-1+\frac{n-1}{n}}$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx+\frac{1}{2}}(1, + 1)^{nx-1}.$$

Nun erhellet aber aus der Gleichung (76.) in dem Artikel Bestimmtes Integral und dem Obigen leicht, daß für jedes x das dortige

$$\Gamma(x) = (1, + 1)^{x-1},$$

und folglich nach dem obigen Satze

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx+\frac{1}{2}}\Gamma(nx)$$

ist, welches der a. a. O. (96.) nach Cauchy bewiesene, von Legendre gefundene, schöne Satz ist. M. s. über diesen Satz auch noch Legendre Traité des fonctions elliptiques. T. II. Paris 1826. p. 444.

7. Wir gehen nun zur numerischen Berechnung der Facultäten über, und folgen dabei vorzüglich einem schönen Aufsatze von Bessel, welcher im Königsberger Archiv für Naturwissenschaften St. III. S. 241. abgedruckt ist. Dabei ist zuerst aus den oben bewiesenen Gleichungen noch folgende Gleichung zu entwickeln. Aus der Gleichung (20.) erhält man leicht:

$$(z, + x)^y = \frac{(z, + x)^k}{(z + yx, + x)^k}(z + kx, + x)^y.$$

Aber nach (21.)

$$(z + kx, + x)^y = (z + kx)^y \cdot \left(1, + \frac{x}{z + kx}\right)^y.$$

Läßt man nun k zunehmen, indem alles Uebrige ungeändert bleibt, so wird sich $\frac{x}{z+kx}$ immer mehr und mehr der Gränze Null, die Facultät

$$\left(1, + \frac{x}{z + kx}\right)^y$$

sich also immer mehr und mehr der Facultät $(1, + 0)^y$, d. i. weil nach (19.)

$$(1, + 0)^y = 1$$

ist, der Einheit nähern. Bezeichnen wir nun im Folgenden durch n immer eine unendlich große Zahl; so ist

$$53.\quad (z + nx, + x)^y = (z + nx)^y ,$$

und folglich nach dem Obigen, immer unter der Voraussetzung, daß $n = \infty$ ist:

$$54.\quad (z, + x)^y = \frac{(z, + x)^n}{(z + yx, + x)^n}(z + nx)^y .$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so kommt, weil

$$1\{(z+nx)^y\} = y1(z + nx) = y1x + y.1\left(n + \frac{z}{x}\right)$$

$$= y1x + y1n + y1\left(1 + \frac{z}{nx}\right) = y1x + y1n$$

ist:

$$55.\quad 1\{(z, + x)^y\} = y1x + y1n + 1\{(z, + x)^n\} - 1\{(z + yx, + x)^n\} .$$

Aber nach (7.)

$$(z, + x)^n = z(z + x)(z + 2x)(z + 3x)..(z + (n - 1)x)$$

$$= x^n.\frac{z}{x}\left(\frac{z}{x} + 1\right)\left(\frac{z}{x} + 2\right)...\left(\frac{z}{x} + n - 1\right),$$

$$(z + yx, + x)^n = (z + yx)(z + yx + x)(z + yx + 2x)..(z + yx + (n-1)x)$$

$$= x^n\left(\frac{z}{x} + y\right)\left(\frac{z}{x} + y + 1\right)\left(\frac{z}{x} + y + 2\right)..\left(\frac{z}{x} + y + n - 1\right)$$

Folglich

$$56\quad 1\{(z, + x)^y\} = y1x + y1n + 1\frac{z}{x} + 1\left(\frac{z}{x} + 1\right) + .. + 1\left(\frac{z}{x} + n - 1\right)$$

$$- 1\left(\frac{z}{x} + y\right) - 1\left(\frac{z}{x} + y + 1\right) - ... - 1\left(\frac{z}{x} + y + n - 1\right).$$

Setzen wir nun allgemein

$$(x + n - \tfrac{1}{2})1n - n - 1x - 1(x+1) - .. - 1(x + n - 1) = \Omega x$$

so ist

$$1\frac{z}{x} + 1\left(\frac{z}{x} + 1\right) + 1\left(\frac{z}{x} + 2\right) + .. + 1\left(\frac{z}{x} + n - 1\right)$$

$$= \left(\frac{z}{x} + n - \tfrac{1}{2}\right)1n - n - \Omega\frac{z}{x},$$

$$\left(\frac{z}{x} + y\right) + 1\left(\frac{z}{x} + y + 1\right) + 1\left(\frac{z}{x} + y + 2\right) + .. + 1\left(\frac{z}{x} + y + n - 1\right)$$

$$= \left(\frac{z}{x} + y + n - \tfrac{1}{2}\right)1n - n - \Omega\left(\frac{z}{x} + y\right),$$

und folglich nach gehöriger Substitution:

$$57.\quad 1\{(z,+x)^y\} = ylx + \Omega\left(\frac{z}{x}+y\right) - \Omega\frac{z}{x}.$$

8. Man sieht hieraus, daß es bei der Berechnung der Facultäten lediglich auf die Berechnung der durch Ω bezeichneten Functionen ankommt, worüber Folgendes zu bemerken ist. Aus dem allgemeinen Ausdrucke von Ωx folgt für $x=1$:

$$\Omega 1 = (n+\tfrac{1}{2})\ln - n - 1\{1.2.3\ldots n\}.$$

Aber, weil n eine unendlich große Zahl bezeichnet, nach dem im Artikel Bestimmtes Integral (36.) i. d. Z. bewiesenen Satze

$$1\{1.2.3\ldots n\} = n\ln n + \tfrac{1}{2}1(2\pi n) - n$$
$$= n\ln n + \tfrac{1}{2}1(2\pi) + \tfrac{1}{2}\ln - n.$$

Folglich nach gehöriger Substitution:

$$58.\quad \Omega 1 = -\tfrac{1}{2}1(2\pi).$$

Aus der Gleichung (57.) folgt für $x=1$:

$$59.\quad \Omega(z+y) = \Omega z + 1\{(z,+1)^y\}.$$

Setzt man nun $z=1$ und für y die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ...; so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (58.):

$$60.\quad \Omega 2 = -\tfrac{1}{2}1(2\pi)$$
$$\Omega 3 = -\tfrac{1}{2}1(2\pi) + 1(1.2)$$
$$\Omega 4 = -\tfrac{1}{2}1(2\pi) + 1(1.2.3)$$
$$\Omega 5 = -\tfrac{1}{2}1(2\pi) + 1(1.2.3.4)$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

$\Omega\frac{1}{2}$ kann man auf folgende Art finden. Nach (57.) ist, wenn man $-y$ für y und $x=1$ setzt;

$$\Omega(z-y) = \Omega z + 1\{(z,+1)^{-y}\}.$$

Aber nach (10.)

$$(z,+1)^{-y} = \frac{1}{(z-y,+1)^y}.$$

Also

$$61.\quad \Omega(z-y) = \Omega z - 1\{(z-y,+1)^y\}.$$

Folglich, wenn man $z=1$, $y=\frac{1}{2}$ setzt:

$$62.\quad \Omega\tfrac{1}{2} = \Omega 1 - 1\{(\tfrac{1}{2},+1)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Setzt man nun in (37*.) $x=\frac{1}{2}\pi$, so erhält man

$$(1,+1)^0 = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2},+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Aber nach (9.) und (42.)

$$(1,+1)^0 = 1,\quad (1+1)^{-\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Also

$$63.\quad (\tfrac{1}{2},+1)^{\frac{1}{2}} = \pi^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich nach (58.) und (62.)

64. $\Omega\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}l(2\pi) + \frac{1}{2}l\pi = -\frac{1}{2}l2.$

Setzt man nun in (59.) $z = \frac{1}{2}$ und $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$; so erhält man:

65. $\Omega\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Omega\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1.3}{2.2}\right)$

$\Omega\frac{7}{2} = -\frac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1.3.5}{2.2.2}\right)$

$\Omega\frac{9}{2} = -\frac{1}{2}l2 + l\left(\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\right)$

u. s. w. u. s. w.

Setzt man in der Gleichung (61.) $z = \frac{1}{2}$ und $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$; so erhält man:

66. $\Omega(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}l2 - l\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Omega(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}l2 - l\left(\frac{1.3}{2.2}\right)$

$\Omega(-\frac{5}{2}) = -\frac{1}{2}l2 - l\left(-\frac{1.3.5}{2.2.2}\right)$

$\Omega(-\frac{7}{2}) = -\frac{1}{2}l2 - l\left(\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\right)$

u. s. w. u. s. w.

Also ist auch

67. $\Omega\frac{5}{2} + \Omega(-\frac{3}{2}) = -l2,$

$\Omega\frac{9}{2} + \Omega(-\frac{7}{2}) = -l2,$

$\Omega\frac{13}{2} + \Omega(-\frac{11}{2}) = -l2,$

$\Omega\frac{17}{2} + \Omega(-\frac{15}{2}) = -l2,$

u. s. w. u. s. w.

Ist y eine positive ganze Zahl, so werden die Gleichungen (59.) und (61.)

68. $\Omega(z+y) = \Omega z + l\{z(z+1)(z+2)\ldots(z+y-1)\}$

69. $\Omega(z-y) = \Omega z - l\{(z-1)(z-2)\ldots(z-y)\}.$

Mittelst dieser Formeln findet man aus Ωz sehr leicht $\Omega(z\pm y)$, wenn y eine positive ganze Zahl ist. z ist ganz beliebig.

Nach (4.) ist, wenn wir respective 1, 1, $-x$, -1, für z, x, y, k setzen:

$$(1, +1)^{-x,-1} = (1, +1)^{-x}(1-x, +1)^{-1}.$$

Aber nach (12.)

$$(1-x,+1)^{-1} = \frac{1}{1-x-1} = -\frac{1}{x}.$$

Also

$$(1,+1)^{-x-1} = -\frac{(1,+1)^{-x}}{x}, \quad (1,+1)^{-x} = -x(1,+1)^{-x-1}.$$

Folglich nach (43.)

$$70. \quad \sin\pi x = -\frac{\pi}{x(1,+1)^{x-1}(1,+1)^{-x-1}}.$$

Also

$$1(-2x\sin\pi x) = 1(2\pi) - 1\{(1,+1)^{x-1}\} - 1\{(1,+1)^{-x-1}\}.$$

Aber nach (57.)

$$1\{(1,+1)^{x-1}\} = (x-1)11 + \Omega(1+x-1) - \Omega 1$$
$$= \Omega x - \Omega 1$$

$$1\{(1,+1)^{-x-1}\} = -(x+1)11 + \Omega(1-x-1) - \Omega 1$$
$$= \Omega(-x) - \Omega 1.$$

Folglich

$$1(-2x\sin\pi x) = 1(2\pi) - \Omega x - \Omega(-x) + 2\Omega 1,$$

d. i. nach (58.)

$$71. \quad \Omega x + \Omega(-x) = -1(-2x\sin\pi x).$$

Hat man also Ωx, so kann man mittelst dieser Gleichung leicht $\Omega(-x)$ finden.

Nach (36.) und (38.) ist, wenn man πx für x setzt:

$$\sin\pi x = \frac{\pi x}{(1,+1)^{-x}(1,+1)^{x}},$$

$$\cos\pi x = \frac{1}{(\frac{1}{2},+1)^{-x}(\frac{1}{2},+1)^{x}}.$$

Folglich nach (57.) und (58.)

$$1\frac{\sin\pi x}{x} = 1\pi - 1\{(1,+1)^{-x}\} - 1\{(1,+1)^{x}\}$$
$$= 1\pi - \Omega(1-x) + \Omega 1 - \Omega(1+x) + \Omega 1$$
$$= -\Omega(1+x) - \Omega(1-x) - 12,$$

und nach (57.) und (64.)

$$1\cos\pi x = -1\{(\tfrac{1}{2},+1)^{-x}\} - 1\{(\tfrac{1}{2},+1)^{x}\}$$
$$= -\Omega(\tfrac{1}{2}-x) + \Omega\tfrac{1}{2} - \Omega(\tfrac{1}{2}+x) + \Omega\tfrac{1}{2}$$
$$= -\Omega(\tfrac{1}{2}+x) - \Omega(\tfrac{1}{2}-x) - 12.$$

Also

$$72. \quad \Omega(1+x) + \Omega(1-x) = 1\frac{x}{2\sin\pi x},$$

$$73. \quad \Omega(\tfrac{1}{2}+x) + \Omega(\tfrac{1}{2}-x) = -1(2\cos\pi x).$$

Folglich auch

74. $\Omega(1+x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2 \sin \pi x} + \frac{1}{2}\{\Omega(1+x) - \Omega(1-x)\}$,

75. $\Omega(1-x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2 \sin \pi x} - \frac{1}{2}\{\Omega(1+x) - \Omega(1-x)\}$,

76. $\Omega(\frac{1}{2}+x) = -\frac{1}{2} l(2 \cos \pi x) - \frac{1}{2}\{\Omega(\frac{1}{2}-x) - \Omega(\frac{1}{2}+x)\}$,

77. $\Omega(\frac{1}{2}-x) = -\frac{1}{2} l(2 \cos \pi x) + \frac{1}{2}\{\Omega(\frac{1}{2}-x) - \Omega(\frac{1}{2}+x)\}$,

d. i., wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{1}{2}\{\Omega(1+x) - \Omega(1-x)\} = U$$
$$\frac{1}{2}\{\Omega(\frac{1}{2}-x) - \Omega(\frac{1}{2}+x)\} = U'$$

setzen:

78. $\Omega(1+x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2 \sin \pi x} + U$,

79. $\Omega(1-x) = \frac{1}{2} l \frac{x}{2 \sin \pi x} - U$,

80. $\Omega(\frac{1}{2}+x) = -\frac{1}{2} l(2 \cos \pi x) - U'$,

81. $\Omega(\frac{1}{2}-x) = -\frac{1}{2} l(2 \cos \pi x) + U'$.

9. Nach dem Taylorschen Lehrsatze erhält man sehr leicht

$$U = \frac{\partial \Omega x}{\partial x} \cdot \frac{x}{1} + \frac{\partial^3 \Omega x}{\partial x^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^5 \Omega x}{\partial x^5} \cdot \frac{x^5}{1..5} + \frac{\partial^7 \Omega x}{\partial x^7} \cdot \frac{x^7}{1..7} + \cdots,$$

$$U' = -\frac{\partial \Omega x}{\partial x} \cdot \frac{x}{1} - \frac{\partial^3 \Omega x}{\partial x^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{\partial^5 \Omega x}{\partial x^5} \cdot \frac{x^5}{1..5} - \frac{\partial^7 \Omega x}{\partial x^7} \cdot \frac{x^7}{1..7} - \cdots,$$

wenn man in den Differentialquotienten der ersten Reihe $x = 1$, in den Differentialquotienten der zweiten Reihe dagegen $x = \frac{1}{2}$ setzt. Weil nun nach dem Obigen

$$\Omega x = (x+n-\tfrac{1}{2}) \ln - n - lx - l(x+1) - \ldots - l(x+n-1)$$

ist; so folgt

$$\frac{\partial \Omega x}{\partial x} = \ln - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \ldots - \frac{1}{x+n-1},$$

$$\frac{\partial^3 \Omega x}{1.2\,\partial x^3} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+2)^3} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^3},$$

$$\frac{\partial^5 \Omega x}{1..4\,\partial x^5} = -\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5} - \frac{1}{(x+2)^5} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^5},$$

u. s. w. u. s. w.

Also

82. $$U = \frac{1}{1} x \left\{ \ln - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n} \right\}$$
$$- \frac{1}{3} x^3 \left\{ 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \right\}$$
$$- \frac{1}{5} x^5 \left\{ 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \ldots + \frac{1}{n^5} \right\}$$
$$- \frac{1}{7} x^7 \left\{ 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \ldots + \frac{1}{n^7} \right\}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$83.\quad U' = \frac{1}{1}x\left\{-\ln + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{3}(2x)^3\left\{1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^3}\right\}$$
$$+\frac{1}{5}(2x)^5\left\{1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^5}\right\}$$
$$+\frac{1}{7}(2x)^7\left\{1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^7}\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Um die Convergenz dieser Reihen für U und U' zu beurtheilen, setze man der Kürze wegen $\Omega x = f(x)$ und bezeichne die Differentialquotienten nach Lagrange; so ist allgemein

$$\frac{f^{(2\alpha+1)}(x)}{1.2.3..2\alpha} = -\frac{1}{x^{2\alpha+1}} - \frac{1}{(x+1)^{2\alpha+1}} - \frac{1}{(x+2)^{2\alpha+1}} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^{2\alpha+1}},$$

und folglich

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3.\ldots.(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(1+ix) =$$
$$-\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\left\{\frac{1}{(1+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(2+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(3+ix)^{2\alpha+1}} + \ldots + \frac{1}{(n+ix)^{2\alpha+1}}\right\},$$

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3..(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}\left(\tfrac{1}{2}+ix\right) =$$
$$-\frac{(2x)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\left\{\frac{1}{(1+2ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(3+2ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(5+2ix)^{2\alpha+1}} + \ldots + \frac{1}{(2n-1+2ix)^{2\alpha+1}}\right\},$$

wo im ersten Falle $1+ix$ eine Mittelgröße (s. Mittel i. d. Z.) zwischen 1 und $1+x$, im zweiten Falle dagegen $\frac{1}{2}+ix$ eine Mittelgröße zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}+x$ bezeichnet.

Ist nun im ersten Falle x positiv und $\gtreqless 1$, so ist $1+ix > 1$, und es ist klar, daß

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3..(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(1+ix)$$

sich der Null nähert, wenn α wächst, auch der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur α groß genug annimmt, so daß also die für U gefundene Reihe jederzeit convergirt, wenn x positiv und $\gtreqless 1$ ist, wobei der Artikel Differentialrechnung (32.) i. d. Z. zu vergleichen ist. Ist aber in demselben Falle x negativ und sein absoluter Werth $\gtreqless 1$, so ist $1+ix$ zwar $> 1+x$, aber < 1. Da also in diesem Falle sich nicht behaupten läßt, daß die Reihe

$$\frac{1}{(1+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(2+ix)^{2\alpha+1}} + \frac{1}{(3+ix)^{2\alpha+1}} + \ldots + \frac{1}{(n+ix)^{2\alpha+1}}$$

abnimmt, wenn α wächst; so läßt sich auch nicht behaupten, daß

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3\ldots(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(1+ix)$$

sich der Null nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man α wachsen läßt. Also läßt sich in diesem Falle auch nicht im Allgemeinen die Convergenz der für U gefundenen Reihe behaupten.

Im zweiten Falle sey zuerst $x \leqq \frac{1}{2}$ und positiv, so ist $2x \leqq 1$, und

$$\tfrac{1}{2} + ix > \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} + ix < \tfrac{1}{2} + x;$$

also $1 + 2ix > 1$, woraus man also sieht, daß unter der Voraussetzung, daß x positiv und $\leqq \frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{1.2.3..(2\alpha+1)} f^{(2\alpha+1)}(\tfrac{1}{2} + ix)$$

sich der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man α wachsen läßt, die für U' gefundene Reihe also convergirt. Unter der Voraussetzung daß x negativ und sein absoluter Werth $\leqq \frac{1}{2}$ ist, ist zwar der absolute Werth von $2x$ nicht größer als die Einheit, aber

$$\tfrac{1}{2} + ix > \tfrac{1}{2} + x,\ \tfrac{1}{2} + ix < \tfrac{1}{2},$$

folglich $1 + 2ix < 1$, so daß man also in diesem Falle nicht allgemein die Convergenz der für U' gefundenen Reihe behaupten kann. Man darf also in der für U gefundenen Reihe bloß x positiv und $\leqq 1$, in der für U' gefundenen Reihe dagegen bloß x positiv und $\leqq \frac{1}{2}$ setzen, wenn man von der Convergenz der in Rede stehenden Reihen völlig versichert seyn will. Es ist aber auch nicht nöthig, x negativ zu setzen, weil man in einem solchem Falle nicht die Formeln (78.) und (80.) zur Berechnung von $\Omega(1 + x)$ und $\Omega(\frac{1}{2} + x)$, sondern die Formeln (79.) und (81.) anwendet, durch welche man $\Omega(1 - x)$ und $\Omega(\frac{1}{2} - x)$ auch durch U und U' ausgedrückt erhält, in denen nun aber x positiv ist.

10. Bezeichnet man nun die Summen der negativen Potenzen der natürlichen Zahlen für $n = \infty$ durch $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$; so ist

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{1}x\{\ln - (S_1 - 1) - 1\} - \tfrac{1}{3}x^3\{(S_3 - 1) + 1\} \\ &\quad - \tfrac{1}{5}x^5\{(S_5 - 1) + 1\} - \tfrac{1}{7}x^7\{(S_7 - 1) + 1\} - \ldots. \\ &= -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x7 - \ldots. \\ &\quad + \tfrac{1}{1}x\{\ln - (S_1 - 1)\} - \tfrac{1}{3}x^3(S_3 - 1) - \tfrac{1}{5}x^5(S_5 - 1) - \ldots. \end{aligned}$$

Aber, wie aus der bekannten logarithmischen Reihe (Differentialrechnung, 39. i. d. Z.) leicht folgt:

$$\tfrac{1}{2}l\frac{1-x}{1+x} = -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 - \ldots.$$

für jedes x, dessen absoluter Werth < 1 ist. Folglich ist

84. $$U = \tfrac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} + \tfrac{1}{1} x\{\ln - (S_1 - 1)\} - \tfrac{1}{3} x^3 (S_3 - 1)$$
$$- \tfrac{1}{5} x^5 (S_5 - 1) - \tfrac{1}{7} x^7 (S_7 - 1) - \ldots\ldots$$

für jedes positive x, welches < 1 ist.

Nach dem Artikel Bestimmtes Integral (41.) i. d. Z. ist aber

$$S_1 = C' + \ln ,$$

wo

$$C' = 0,\ 57721\ 56649\ 02$$

ist. Also ist

$$- C' = \ln - S_1,\ 1 - C' = \ln - (S_1 - 1) .$$

Folglich

85. $$U = \tfrac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} + \tfrac{1}{1} x (1 - C') - \tfrac{1}{3} x^3 (S_3 - 1)$$
$$- \tfrac{1}{5} x^5 (S_5 - 1) - \tfrac{1}{7} x^7 (S_7 - 1) - \ldots\ldots$$

Setzt man nun aus dem Artikel Bestimmtes Integral (41.) i. d. Z. für S_3, S_5, S_7, ... ihre numerischen Werthe; so erhält man für jedes positive x, welches < 1 ist:

86. $$U = \tfrac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} + x.\ 0{,}42278\ 43350\ 98$$
$$- x^3.\ 0{,}06735\ 23010\ 53$$
$$- x^5.\ 0{,}00738\ 55510\ 11$$
$$- x^7.\ 0{,}00119\ 27539\ 12$$
$$- x^9.\ 0{,}00022\ 31547\ 58$$
$$- x^{11}.\ 0{,}00004\ 49262\ 37$$
$$- x^{13}.\ 0{,}00000\ 94402\ 57$$
$$- x^{15}.\ 0{,}00000\ 20392\ 16$$
$$- \ldots\ldots\ldots$$

Was nun ferner die Reihe für U' betrifft, so wollen wir zuerst einen andern Ausdruck für den Coefficienten

$$- \ln + 2\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

ihres ersten Gliedes suchen. Derselbe ist

$$= - \ln + 2\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$- \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

d. i. nach dem Obigen oder nach dem Artikel Bestimmtes Integral (41.) i. d. Z.

$$= - \ln + 2\{C' + l(2n)\} - C' - \ln$$
$$= - 2\ln + C' + 2l2 + 2\ln = C' + 2l2 ,$$

wo die Constante C' den oben angegebenen Werth hat. Nun erhellet ferner leicht, daß

$$2^\alpha\left\{1+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}+\ldots\right\}=(2^\alpha-1)\,S_\alpha$$

ist, wofür Bessel, wie offenbar verstattet ist, um die Reihe schneller convergirend zu machen,

$$(2^\alpha-1)(S_\alpha-1-2^{-\alpha})+2^\alpha-2^{-\alpha}$$

setzt. Dies giebt nach (83.)

$$\begin{aligned}
U' &= \frac{1}{1}x\left\{C'+212-\tfrac{3}{2}+2-\tfrac{1}{2}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{3}x^3\left\{(2^3-1)\left(S_3-1-\frac{1}{2^3}\right)+2^3-\frac{1}{2^3}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{5}x^5\left\{(2^5-1)\left(S_5-1-\frac{1}{2^5}\right)+2^5-\frac{1}{2^5}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{7}x^7\left\{(2^7-1)\left(S_7-1-\frac{1}{2^7}\right)+2^7-\frac{1}{2^7}\right\}\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{2x}{1}+\frac{(2x)^3}{3}+\frac{(2x)^5}{5}+\frac{(2x)^7}{7}+\ldots\\
&\quad-\frac{1}{1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{x}{2}\right)^7-\ldots.\\
&\quad+\frac{1}{1}x\left(C'+212-\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{3}x^3\left(S_3-\frac{9}{8}\right)\\
&\quad+\frac{31}{5}x^5\left(S_5-\frac{33}{32}\right)+\frac{127}{7}x^7\left(S_7-\frac{129}{128}\right)+\ldots
\end{aligned}$$

Die Summe der beiden ersten Reihen ist

$$=-\tfrac{1}{2}l\frac{1-2x}{1+2x}+\tfrac{1}{2}l\frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}=\tfrac{1}{2}l\frac{1+2x}{1-2x}+\tfrac{1}{2}l\frac{2-x}{2+x}=\tfrac{1}{2}l\frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)},$$

für jedes x, dessen absoluter Werth $<\frac{1}{2}$ ist (Differentialrechnung. 39. i. d. Z.). Also ist

87. $$U'=\tfrac{1}{2}l\frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)}+\tfrac{1}{1}x(C'+212-\tfrac{3}{2})+\tfrac{7}{3}x^3(S_3-\tfrac{9}{8})$$
$$+\frac{31}{5}x^5\left(S_5-\frac{33}{32}\right)+\frac{127}{7}x^7\left(S_7-\frac{129}{128}\right)+\ldots.,$$

für jedes positive x, welches $<\frac{1}{2}$ ist.

Setzt man nun für C', S_3, S_5, ... ihre aus dem Obigen bekannten numerischen Werthe, so erhält man:

88. $U' = \frac{1}{2}l\frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)} + x.\ 0{,}46351\ 00250\ 21$

$+ x^3.\ 0{,}17979\ 94407\ 06$
$+ x^5.\ 0{,}03520\ 20816\ 63$
$+ x^7.\ 0{,}00973\ 86754\ 43$
$+ x^9.\ 0{,}00313\ 79843\ 47$
$+ x^{11}.\ 0{,}00109\ 93049\ 02$
$+ x^{13}.\ 0{,}00041\ 14623\ 37$
$+ x^{15}.\ 0{,}00015\ 43504\ 29$
$+ \ldots\ldots\ldots$

für jedes positive x, welches $< \frac{1}{2}$ ist.

Ist M der Modulus des Briggischen Systems, so hat man zur unmittelbaren Berechnung der Briggischen Logarithmen der Facultäten:

89. $MU = \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x} + x.\ 0{,}18361\ 29037\ 68$

$- x^3.\ 0{,}02925\ 07326\ 91$
$- x^5.\ 0{,}00320\ 75040\ 54$
$- x^7.\ 0{,}00051\ 80063\ 42$
$- x^9.\ 0{,}00009\ 69148\ 80$
$- x^{11}.\ 0{,}00001\ 95112\ 17$
$- x^{13}.\ 0{,}00000\ 40998\ 52$
$- x^{15}.\ 0{,}00000\ 08856\ 20$
$- \ldots\ldots\ldots$

für jedes positive x, welches < 1 ist, und

90. $MU' = \frac{1}{2}\log\frac{(1+2x)(2-x)}{(1-2x)(2+x)} + x.\ 0{,}20129\ 98466\ 08$

$+ x^3.\ 0{,}07808\ 59049\ 48$
$+ x^5.\ 0{,}01528\ 80598\ 18$
$+ x^7.\ 0{,}00422\ 94530\ 06$
$+ x^9.\ 0{,}00136\ 28092\ 86$
$+ x^{11}.\ 0{,}00047\ 74220\ 53$
$+ x^{13}\ 0{,}00017\ 86958\ 23$
$+ x^{15}.\ 0{,}00006\ 70335\ 40$
$+ \ldots\ldots$

für jedes positive x, welches $< \frac{1}{2}$ ist.

11. Für alle x von beträchtlicher Größe findet man die Omegas am besten auf folgende Art. Nach dem Obigen ist

$$\Omega x = (x+n-\tfrac{1}{2})\ln - n - lx - l(x+1) - \ldots - l(x+n-1)\ ,$$

wo n unendlich groß ist. Nach dem Artikel Bestimmtes Integral (37.) i. d. Z. ist aber

$$1 1 + 1 2 + 1 3 + 1 4 + \ldots + 1 x =$$

$$1\sqrt{2\pi} + (x+\tfrac{1}{2})1x - x + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6.x^5} - \ldots,$$

$$1 1 + 1 2 + 1 3 + 1 4 + \ldots + 1(x+n-1) =$$

$$1\sqrt{2\pi} + (x+n-\tfrac{1}{2})1(x+n-1) - (x+n-1),$$

da n und also auch $x + n - 1$ unendlich groß ist. Die durch $\overset{1}{B}, \overset{3}{B}, \overset{5}{B}, \ldots$ bezeichneten Größen sind die Bernoullischen Zahlen. Also ist

$$1(x+1) + 1(x+2) + 1(x+3) + \ldots + 1(x+n-1)$$

$$(x+n-\tfrac{1}{2})1(x+n-1) - (x+n-1) - (x+\tfrac{1}{2})1x + x$$

$$- \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} + \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} - \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} + \frac{\overset{7}{B}}{7.8x^7} - \ldots,$$

und folglich

$$\Omega x = (x+n-\tfrac{1}{2})1n - n - 1x - (x+n-\tfrac{1}{2})1(x+n-1)$$

$$+ (x+n-1) + (x+\tfrac{1}{2})1x - x + \Sigma,$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} - \frac{\overset{7}{B}}{7.8x^7} + \ldots = \Sigma$$

setzen. Also auch, da

$$1(x+n-1) = 1n + 1\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)$$

ist:

$$\Omega x = x - 1 - (x+n-\tfrac{1}{2})1\left(1 + \frac{x-1}{n}\right) + (x-\tfrac{1}{2})1x$$

$$- x + \Sigma.$$

Aber

$$1\left(1 + \frac{x-1}{n}\right) = \frac{x-1}{n} - \frac{(x-1)^2}{2n^2} + \frac{(x-1)^3}{3n^3} - \ldots,$$

und folglich, weil $n^2, n^3, n^4, \ldots$ gegen $x + n - \frac{1}{2}$ unendlich groß, also die Größen

$$\frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)^2}{2n^2}, \quad \frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)^3}{3n^3}, \quad \frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)^4}{4n^4}, \ldots$$

als verschwindend zu betrachten sind:

$$\Omega x = x - 1 - \frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)}{n} + (x-\tfrac{1}{2})1x - x + \Sigma.$$

Aber

$$\frac{(x+n-\frac{1}{2})(x-1)}{n} = (x-1)\left\{1 + \frac{2x-1}{2n}\right\} = x - 1,$$

da n unendlich groß ist. Also, wenn man für Σ wieder seinen obigen Ausdruck setzt:

$$91.\quad \Omega x = (x-\tfrac{1}{2})lx - x + \frac{\frac{1}{6}B}{1.2x} - \frac{\frac{3}{4}B}{3.4x^3} + \frac{\frac{5}{6}B}{5.6x^5} - \ldots,$$

eine Formel, die zur Berechnung von Ωx sehr bequem ist, wenn x nur einigermaßen groß ist.

12. Nach (57.) ist

$$l\{(1, +1)^{x-1}\} = (x-1)l1 + \Omega(1+x-1) - \Omega 1;$$

folglich nach (58.)

$$l\{(1, +1)^{x-1}\} = \Omega x + \tfrac{1}{2}l(2\pi);$$

also

$$92.\quad \Omega x = l\left\{\frac{(1, +1)^{x-1}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$$

und, wenn M wie oben den Modulus des briggischen Systems bezeichnet:

$$93.\quad M\Omega x = \log\left\{\frac{(1, +1)^{x-1}}{\sqrt{2\pi}}\right\}.$$

Bessel hat a. a. O. eine Tafel für $M\Omega x$ oder der Briggischen Logarithmen von $(1+1)^{x-1}.(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ für alle Hundertheile zwischen $x = 1$ und $x = 2$, nebst den ersten, zweiten und dritten Differenzen geliefert, welche nach den oben gegebenen Formeln berechnet ist. Da diese schöne Tafel sich an einem Orte befindet, wo sie nicht gleich Jedem zugänglich seyn möchte, so wird es gewiß den meisten Lesern angenehm seyn, wenn ich dieselbe am Ende dieses Artikels mittheile, da die Function Ωx überhaupt in der Analysis, besonders aber für die Berechnung der Facultäten von der größten Wichtigkeit ist.

Außer den oben und Thl. II. S. 175. angeführten Schriften über die Facultäten s. m. noch Kramp Arithmétique universelle. Cologne. 1808. Chap. XXV., Arbogast Calcul des derivations. p. 364., und eine Abhandlung von Kramp in den Annales de Mathématiques. T. III.; auch einen kurzen Aufsatz von Clausen in Crelles Journal. B. VII. S. 234. Beitrag zur Theorie der Facultäten von Müller daf. B. XI. S. 361.

Tafel der transcendenten Function

$$M\Omega x.$$

x	MΩx	Differ. I.	II.	III.
1,00	— 0,39908 99342	— 247 12693	+ 7 04106	— 10030
1,01	— 0,40156 12035	— 240 08587	6 94076	— 9770
1,02	— 0,40396 20622	— 233 14511	6 84306	— 9517
1,03	— 0,40629 35133	— 226 30205	6 74789	— 9275
1,04	— 0,40855 65338	— 219 55416	6 65514	— 9042
1,05	— 0,41075 20754	— 212 89902	6 56472	— 8813
1,06	— 0,41288 10656	— 206 33450	6 47659	— 8597
1,07	— 0,41494 44086	— 199 85771	6 39062	— 8389
1,08	— 0,41694 29857	— 193 46709	6 30673	— 8183
1,09	— 0,41887 76566	— 187 16036	6 22490	— 7987
1,10	— 0,42074 92602	— 180 93546	6 14503	— 7799
1,11	— 0,42255 86148	— 174 79043	6 06704	— 7616
1,12	— 0,42430 65191	— 168 72339	5 99088	— 7438
1,13	— 0,42599 37530	— 162 73251	5 91650	— 7267
1,14	— 0,42762 10781	— 156 81601	5 84383	— 7102
1,15	— 0,42918 92382	— 150 97218	5 77281	— 6940
1,16	— 0,43069 89600	— 145 19737	5 70341	— 6789
1,17	— 0,43215 09537	— 139 49596	5 63552	— 6635
1,18	— 0,43354 59133	— 133 86044	5 56917	— 6489
1,19	— 0,43488 45177	— 128 29127	5 50428	— 6352
1,20	— 0,43616 74304	— 122 78699	5 44076	— 6212
1,21	— 0,43739 53003	— 117 34623	5 37864	— 6080
1,22	— 0,43856 87626	— 111 96759	5 31784	— 5954
1,23	— 0,43968 84385	— 106 64975	5 25830	— 5825
1,24	— 0,44075 49360	— 101 39145	5 20005	— 5709
1,25	— 0,44176 88505	— 96 19140	5 14296	— 5589
1,26	— 0,44273 07645	— 91 04844	5 08707	— 5476
1,27	— 0,44364 12389	— 85 96137	5 03231	— 5363
1,28	— 0,44450 08626	— 80 92906	4 97868	— 5260
1,29	— 0,44531 01532	— 75 95038	4 92608	— 5153
1,30	— 0,44606 96570	— 71 02430	4 87455	— 5052
1,31	— 0,44677 99000	— 66 14975	4 82403	— 4953
1,32	— 0,44744 13975	— 61 32572	4 77450	— 4859
1,33	— 0,44805 46547	— 56 55122	4 72591	— 4764
1,34	— 0,44862 01669	— 51 82531	4 67827	— 4674
1,35	— 0,44913 84200	— 47 14704	4 63153	— 4587
1,36	— 0,44960 98904	— 42 51551	4 58566	— 4499
1,37	— 0,45003 50455	— 37 92985	4 54067	— 4419
1,38	— 0,45041 43440	— 33 38918	4 49648	— 4334
1,39	— 0,45074 82358	— 28 89270	4 45314	— 4258
1,40	— 0,45103 71628	— 24 43956	4 41056	— 4179
1,41	— 0,45128 15584	— 20 02900	4 36877	— 4104
1,42	— 0,45148 18484	— 15 66028	4 32773	— 4033
1,43	— 0,45163 84507	— 11 33250	4 38740	— 3961
1,44	— 0,45175 17757	— 7 04510	4 24779	— 3889
1,45	— 0,45182 22267	— 2 79731	4 20890	— 3824
1,46	— 0,45185 01998	+ 1 41159	4 17066	— 3759
1,47	— 0,45183 60839	5 58225	4 13307	— 3692
1,48	— 0,45178 02614	9 71532	4 09615	— 3630
1,49	— 0,45168 31082	13 81149	4 05985	— 3570
1,50	— 0,45154 49935			

x	MΩx	Differr. I.	II.	III.
1,50	— 0,45154 49935	+ 17 87132	+ 4 02415	— 3509
1,51	— 0,45136 62803	21 89547	3 98906	— 3451
1,52	— 0,45114 73256	25 88453	3 95455	— 3396
1,53	— 0,45088 84803	29 83908	3 92059	— 3336
1,54	— 0,45059 00895	33 75967	3 88723	— 3286
1,55	— 0,45025 24928	37 64690	3 85437	— 3232
1,56	— 0,44987 60238	41 50127	3 82205	— 3179
1,57	— 0,44946 10111	45 32332	3 79026	— 3130
1,58	— 0,44900 77779	49 11358	3 75896	— 3080
1,59	— 0,44851 66421	52 87254	3 72816	— 3031
1,60	— 0,44798 79167	56 60070	3 69785	— 2986
1,61	— 0,44742 19097	60 29855	3 66799	— 2937
1,62	— 0,44681 89242	63 96654	3 63862	— 2894
1,63	— 0,44617 92588	67 60516	3 60968	— 2849
1,64	— 0,44550 32072	71 21484	3 58119	— 2806
1,65	— 0,44479 10588	74 79603	3 55313	— 2767
1,66	— 0,44404 30985	78 34916	3 52547	— 2721
1,67	— 0,44325 96069	81 87463	3 49826	— 2683
1,68	— 0,44244 08606	85 37289	3 47143	— 2643
1,69	— 0,44158 71317	88 84432	3 44500	— 2605
1,70	— 0,44069 96885	92 28932	3 41895	— 2566
1,71	— 0,43977 57953	95 70827	3 39329	— 2529
1,72	— 0,43881 87126	99 10156	3 36800	— 2495
1,73	— 0,43782 76970	102 46956	3 34305	— 2457
1,74	— 0,43680 30014	105 81261	3 31848	— 2421
1,75	— 0,43574 48753	109 13109	3 29427	— 2393
1,76	— 0,43465 35644	112 42536	3 27034	— 2354
1,77	— 0,43352 93108	115 69570	3 24680	— 2321
1,78	— 0,43237 23539	118 94250	3 22359	— 2294
1,79	— 0,43118 29288	122 16609	3 20065	— 2257
1,80	— 0,42996 12679	125 36674	3 17808	— 2231
1,81	— 0,42870 76005	128 54482	3 15577	— 2197
1,82	— 0,42742 21523	131 70059	3 13380	— 2170
1,83	— 0,42610 51464	134 83439	3 11210	— 2140
1,84	— 0,42475 68025	137 94649	3 09070	— 2112
1,85	— 0,42337 73376	141 03719	3 06958	— 2083
1,86	— 0,42196 69657	144 10677	3 04875	— 2058
1,87	— 0,42052 58980	147 15552	3 02817	— 2028
1,88	— 0,41905 43428	150 18369	3 00789	— 2005
1,89	— 0,41755 25059	153 19158	2 98784	— 1977
1,90	— 0,41602 05901	156 17942	2 96807	— 1952
1,91	— 0,41445 87959	159 14749	2 94855	— 1928
1,92	— 0,41286 73210	162 09604	2 92927	— 1903
1,93	— 0,41124 63606	165 02531	2 91024	— 1879
1,94	— 0,40959 61075	167 93555	2 89145	— 1856
1,95	— 0,40791 67520	170 82700	2 87289	— 1832
1,96	— 0,40620 84820	173 69989	2 85457	— 1811
1,97	— 0,40447 14831	176 55446	2 83646	— 1787
1,98	— 0,40270 59385	179 39092	2 81859	— 1765
1,99	— 0,40091 20293	182 20951	2 80094	— 1746
2,00	— 0,39908 99342	185 01045	2 78348	— 1723
2,01	— 0,39723 98297	187 79393	2 76625	— 1702
2,02	— 0,39536 18904	190 56018	2 74923	— 1682
2,03	— 0,39345 62886	193 30941	2 73241	— 1664
2,04	— 0,39152 31945	196 04182	2 71577	— 1641
2,05	— 0,38956 27763			

Fermats Lehrsätze, s. den Artikel Zahl III. IV. 3. 20. VI. 2. 6. VIII. 4. X.

Figur. M. s. den Artikel Vieleck und die Artikel Reciprocität und Verwandtschaft i. d. Z.

Fluens. Spehr de quantitate fluente tractatus, in quo explicantur fundamenta calculi differentialis nonnisi ex notione fluentis deducta. Bruns. 1824.

Folgen der Zeichen in einer Gleichung s. den Art. Gleichung (16.) i. d. Z.

Function. Die meisten und wichtigsten Zusätze bedarf dieser Artikel in der Lehre von der Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in einfache Brüche, wozu wir also zunächst übergehen, und nachher noch einiges Andere zur Vervollständigung dieses wichtigen Artikels beifügen wollen.

I. Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in einfache Brüche.

1. Jede gebrochene rationale Function läßt sich, wenn $f(x)$ und $F(x)$ zwei beliebige ganze rationale Functionen von x bezeichnen, unter der Form

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

darstellen. Ist der höchste Exponent von x in $f(x)$ kleiner wie der höchste Exponent von x in $F(x)$, so heißt der vorstehende Bruch eine ächte gebrochene rationale Function von x; sonst eine unächte. Jede unächte gebrochene rationale Function läßt sich durch gemeine Division jederzeit in eine ganze rationale Function und in eine ächte gebrochene rationale Function zerlegen, so daß wir also bloß die letztern zu betrachten brauchen und folglich immer annehmen können, daß $f(x)$ von einem niedrigern Grade sey wie $F(x)$.

In der Algebra (s. den Artikel Gleichung i. d. Z.) wird gezeigt, daß $F(x)$ sich immer als ein Product von der Form

$$(x-x_1)^m(x-x_2)^{m'}(x-x_3)^{m''}(x-x_4)^{m'''}\ldots.$$

darstellen läßt, wo die Summe

$$m + m' + m'' + m''' + m'''' + \ldots.$$

dem Grade der Function $F(x)$ gleich ist, und $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots.$ sämmtlich unter einander ungleich sind. Zugleich ist der Einfachheit wegen angenommen worden, daß der Coefficient der höchsten Potenz von x in $F(x)$ die Einheit sey, welches offenbar verstattet ist, da man, wenn a der Coefficient dieser Potenz von x in $F(x)$ wäre, Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{f(x)}{F(x)}$

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

mit a dividiren könnte, wodurch $F(x)$ unter der verlangten Form dargestellt werden würde.

2. Zunächst wollen wir nun den Fall einer nähern Betrachtung unterwerfen, wenn

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n),$$

also vom nten Grade ist, und $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ sämmtlich unter einander ungleich sind. Zu dem Ende sey

$$F(x) = (x-x_1)F_1(x),$$

wo also

$$F_1(x) = (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)$$

ist, und folglich für $x = x_1$ nicht $= 0$ wird, weil nach der Voraussetzung $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ sämmtlich unter einander ungleich sind. Setzen wir nun

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

so wird, wenn wir auf beiden Seiten mit

$$F(x) = (x-x_1)F_1(x)$$

multipliciren:

$$f(x) = A_1F_1(x) + (x-x_1)f_1(x);$$

folglich für $x = x_1$:

$$f(x_1) = A_1F_1(x_1), \quad A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)},$$

wodurch die Constante A_1 vollständig bestimmt ist, da $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ ist. Hat man auf diese Weise A_1 bestimmt, so erhält man ferner aus der obigen Gleichung

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A_1F_1(x)}{x-x_1},$$

wodurch also auch $f_1(x)$ bestimmt ist. Ueber diese Function sind nun aber noch folgende Bemerkungen zu machen. Setzt man nämlich im Zähler des vorstehenden Bruchs $x = x_1$, so wird derselbe

$$= f(x_1) - A_1F_1(x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)}F_1(x_1) = 0;$$

folglich ist, wie in der Lehre von den Gleichungen gezeigt wird, die Function

$$f(x) - A_1F_1(x)$$

durch $x - x_1$, ohne Rest theilbar, also $f_1(x)$ eine ganze rationale Function. Was den Grad dieser Function betrifft, so ist dieselbe, weil $f(x)$ höchstens vom $(n-1)$ten, $F_1(x)$ vom $(n-1)$ten, also

$$f(x) - A_1F_1(x)$$

vom $(n-1)$ten Grade ist, offenbar nur vom $(n-2)$ten Grade, und man sieht also, daß man immer

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

setzen kann, so daß nämlich A_1 eine constante Größe, $f_1(x)$ eine ganze rationale Function vom $(n-2)$ten, $F_1(x)$ eine ganze rationale Function vom $(n-1)$ten Grade ist. Setzen wir also jetzt

$$\begin{aligned} F(x) &= (x-x_1)F_1(x)\,, \\ F_1(x) &= (x-x_2)F_2(x)\,, \\ F_2(x) &= (x-x_3)F_3(x)\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_{n-2}(x) &= (x-x_{n-1})F_{n-1}x\,, \\ F_{n-1}(x) &= x-x_n\,, \end{aligned}$$

wo

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_{n-1}(x)$$

respective ganze rationale Functionen vom

$$(n-1)\text{ten},\ (n-2)\text{ten},\ (n-3)\text{ten},\ \ldots.\ 1\text{sten}$$

Grade sind; so kann man, mittelst mehrfacher Anwendung des obigen allgemeinen Verfahrens, setzen:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}\,, \\ \frac{f_1(x)}{F_1(x)} &= \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{f_2(x)}{F_2(x)}\,, \\ \frac{f_2(x)}{F_2(x)} &= \frac{A_3}{x-x_3} + \frac{f_3(x)}{F_3(x)}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{f_{n-3}(x)}{F_{n-3}(x)} &= \frac{A_{n-2}}{x-x_{n-2}} + \frac{f_{n-2}(x)}{F_{n-2}(x)}\,, \\ \frac{f_{n-2}(x)}{F_{n-2}(x)} &= \frac{A_{n-1}}{x-x_{n-1}} + \frac{f_{n-1}(x)}{F_{n-1}(x)}\,, \end{aligned}$$

so daß nämlich

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_{n-1}(x)$$

respective ganze rationale Functionen des

$$(n-2)\text{ten},\ (n-3)\text{ten},\ (n-4)\text{ten},\ \ldots.\ 0\text{ten}$$

Grades, und

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \ldots\ A_{n-1}$$

constante Größen sind. $f_{n-1}(x)$ ist als eine Function des 0ten Grades natürlich eine constante Größe, und kann folglich $= A_n$ gesetzt werden, so daß also, weil $F_{n-1}(x) = x - x_n$ ist, die gebrochene Function

$$\frac{f_{n-1}(x)}{F_{n-1}(x)} = \frac{A_n}{x-x_n}$$

ist. Addirt man nun, dies vorausgesetzt, die obigen Gleichungen

zu einander, und hebt auf beiden Seiten auf, was sich aufheben läßt; so erhält man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

und es ist also hierdurch in aller Strenge erwiesen, daß sich unter den obigen Voraussetzungen die gebrochene rationale Function

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

jederzeit als ein Aggregat einfacher Brüche von der Form

$$\frac{A_k}{x-x_k}$$

darstellen läßt.

Nachdem wir so die Möglichkeit der Zerlegung der Function

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

in einfache Brüche von der obigen Form völlig streng und allgemein nachgewiesen haben, kommt es nun darauf an, die constanten Zähler $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ selbst zu bestimmen. Zu dem Ende sey allgemein

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{f_k(x)}{F_k(x)},$$

wo wir jetzt

$$F(x) = (x-x_k)F_k(x)$$

setzen wollen. Multipliciren wir nun auf beiden Seiten mit $F(x)$; so ergiebt sich

$$f(x) = A_k F_k(x) + (x-x_k)f_k(x);$$

also für $x = x_k$:

$$f(x_k) = A_k F_k(x_k),$$

und folglich

$$A_k = \frac{f(x_k)}{F_k(x_k)}.$$

Differentiiren wir aber die Gleichung

$$F(x) = (x-x_k)F_k(x),$$

so erhalten wir, bei Anwendung der Bezeichnung der Differentialquotienten von Lagrange:

$$F'(x) = (x-x_k)F'_k(x) + F_k(x),$$

und folglich für $x = x_k$:

$$F_k(x_k) = F'(x_k);$$

also

$$A_k = \frac{f(x_k)}{F'(x_k)}.$$

Daß $F_k(x_k)$, und folglich auch $F'(x_k)$, nicht $= 0$ ist, ist

klar, weil nach der Voraussetzung $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sämmtlich unter einander ungleich sind. Nach diesen Bestimmungen erhält man also in dem, hier in Betrachtung gezogenen, Falle zur Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in einfache Brüche folgende ganz allgemeine Formel:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x_1)}{F'(x_1).(x-x_1)} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2).(x-x_2)} + \frac{f(x_3)}{F'(x_3).(x-x_3)} \cdots + \frac{f(x_n)}{F'(x_n).(x-x_n)},$$

vorausgesetzt, daß

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

ist, und $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ sämmtlich unter einander ungleich sind. Die Anwendung dieser Formel ist ganz leicht, und braucht hier nicht an speciellen Fällen erläutert zu werden.

3. Wir wollen vielmehr sogleich zu dem Falle übergehen, wo die ganze rationale Function des n ten Grades

$$F(x) = (x-x_1)^m(x-x_2)^{m'}(x-x_3)^{m''}(x-x_4)^{m'''}\ldots.$$

ist, und $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots.$ alle unter einander ungleich sind. Auch ist, wie sich von selbst versteht, immer

$$n = m + m' + m'' + m''' + \ldots.$$

Setzen wir

$$F(x) = (x-x_1)^m F_1(x),$$

so ist nach der Voraussetzung $F_1(x)$ eine Function von x, welche für $x = x_1$ nicht $= 0$ wird. Ferner setze man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-x_1)^{m-1}F_1(x)};$$

so wird, wenn man auf beiden Seiten mit $F(x)$ multiplicirt:

$$f(x) = A_1 F_1(x) + (x-x_1)f_1(x),$$

und folglich für $x = x_1$:

$$f(x_1) = A_1 F_1(x_1), \quad A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)},$$

wodurch, weil $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ ist, die Constante A_1 völlig bestimmt ist. Hat man auf diese Weise A_1 gefunden, so ergiebt sich zur Bestimmung von $f_1(x)$ die Gleichung:

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A_1 F_1(x)}{x-x_1}.$$

Da

$$f(x_1) - A_1 F_1(x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)} \cdot F_1(x_1) = 0$$

ist; so ist $f_1(x)$, wie aus der Theorie der Gleichungen folgt, eine ganze rationale Function von x, und zugleich erhellet, daß diese Function höchstens vom Grade $n-2$ ist. Man kann also die Constante A_1 und die ganze rationale Function $f_1(x)$ immer so bestimmen, daß der obigen Gleichung genügt wird, und dieselbe also jederzeit zulässig ist. Durch successive Anwendung dieses Verfahrens erhält man nun nach und nach:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-x_1)^{m-1} F_1(x)}$$

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-x_1)^{m-2} F_1(x)}$$

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-x_1)^{m-3} F_1(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-2}} + \cdots + \frac{A_m}{x-x_1} + \frac{f_m(x)}{F_1(x)},$$

wo die ganzen rationalen Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_m(x)$$

respective höchstens vom

$$(n-2)\text{ten},\ (n-3)\text{ten},\ (n-4)\text{ten},\ \ldots\ (n-m-1)\text{ten}$$

Grade sind. $F_1(x)$ ist vom $(n-m)$ten Grade, also, weil $f_m(x)$ höchstens vom $(n-m-1)$ten Grade ist, jederzeit

$$\frac{f_m(x)}{F_1(x)}$$

eine ächte gebrochene rationale Function. Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-2}} + \cdots + \frac{A_m}{x-x_1} = \Sigma \frac{A_m}{x-x_1};$$

so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A_m}{x-x_1} + \frac{f_m(x)}{F_1(x)},$$

und der letzte Bruch jederzeit eine ächte gebrochene rationale Function.

Wäre $F_1(x) = 1$, also

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-x_1)^m};$$

so würde man wie vorher erhalten

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{A_{m-1}}{(x-x_1)^2} + \frac{f_{m-1}(x)}{x-x_1},$$

wo $f_{m-1}(x)$ höchstens vom $\{n-(m-1)-1\}$ten, d. i., weil in diesem Falle $n = m$ ist, höchstens vom 0ten Grade, folglich eine Constante, und also, wenn wir $f_{m-1}(x) = A_m$ setzen,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A_m}{x-x_1}$$

ist.

Der Kürze wegen wollen wir nun

$$F(x) = (x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c \ldots\ldots (x-x_k)^q$$

und

$$F(x) = (x-x_1)^a F_1(x),$$
$$F_1(x) = (x-x_2)^b F_2(x),$$
$$F_2(x) = (x-x_3)^c F_3(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{k-2}(x) = (x-x_{k-1})^p F_{k-1}(x),$$
$$F_{k-1}(x) = (x-x_k)^q$$

setzen; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A_a}{x-x_1} + \frac{f_a(x)}{F_1(x)},$$
$$\frac{f_a(x)}{F_1(x)} = \Sigma \frac{B_b}{x-x_2} + \frac{f_b(x)}{F_2(x)},$$
$$\frac{f_b(x)}{F_2(x)} = \Sigma \frac{C_c}{x-x_3} + \frac{f_c(x)}{F_3(x)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{f_o(x)}{F_{k-2}(x)} = \Sigma \frac{P_p}{x-x_{k-1}} + \frac{f_p(x)}{F_{k-1}(x)},$$
$$\frac{f_p(x)}{F_{k-1}(x)} = \Sigma \frac{Q_q}{x-x_k}.$$

Folglich ist in diesem Falle

$$\frac{f(x)}{F(x)} =$$
$$\Sigma \frac{A_a}{x-x_1} + \Sigma \frac{B_b}{x-x_2} + \Sigma \frac{C_c}{x-x_3} + \ldots + \Sigma \frac{Q_q}{x-x_k}.$$

4. Nachdem wir nun die Möglichkeit der Zerlegung der Function

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

völlig streng und allgemein bewiesen haben, gehen wir zur Bestimmung der constanten Zähler der einzelnen Brüche über. Wenn wir wieder

$$F_1(x) = (x-x_2)^b (x-x_3)^c (x-x_4)^d \dots (x-x_k)^l$$

setzen; so ist, wie wir vorher gesehen haben,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{A_\alpha}{x-x_1} + \frac{X}{F_1(x)},$$

wo X bekanntlich eine ganze rationale Function von x, und der letzte Bruch eine ächte gebrochene rationale Function von x ist. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die Reihe

$$A_1 + A_2(x-x_1) + A_3(x-x_1)^2 + \dots + A_\alpha(x-x_1)^{\alpha-1}$$

durch

$$S\{A_1 A_2 A_3 \dots A_\alpha\},$$

wobei man zu bemerken hat, daß für $x = x_1$ diese Reihe sich auf ihr erstes Glied reducirt; so ist offenbar

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{S\{A_1 A_2 A_3 \dots A_\alpha\}}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{X}{F_1(x)},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = S\{A_1 A_2 A_3 \dots A_\alpha\} + \frac{X(x-x_1)^\alpha}{F_1(x)}.$$

Also, wenn wir $x = x_1$ setzen:

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)},$$

wobei man immer zu bemerken hat, daß $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ ist.

Weil nun

$$f(x_1) - A_1 F_1(x_1) = 0$$

ist; so ist

$$\frac{f(x) - A_1 F_1(x)}{x-x_1} = \varphi_1(x)$$

eine ganze rationale Function, und man findet leicht aus dem Vorhergehenden

$$\frac{\varphi_1(x)}{F_1(x)} = S\{A_2 A_3 A_4 \dots A_\alpha\} + \frac{X(x-x_1)^{\alpha-1}}{F_1(x)};$$

also, wenn man $x = x_1$ setzt, und nie aus den Augen läßt, daß $F_1(x_1)$ nicht $= 0$ ist:

$$A_2 = \frac{\varphi_1(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Weil also

$$\varphi_1(x_1) - A_2 F_1(x_1) = 0$$

ist; so ist

$$\frac{\varphi_1(x_1) - A_2 F_1(x)}{x-x_1} = \varphi_2(x)$$

wieder eine ganze rationale Function, und aus dem Obigen folgt leicht

$$\frac{\varphi_2(x)}{F_1(x)} = S\{A_3 A_4 A_5 \dots A_n\} + \frac{X(x-x_1)^{n-2}}{F_1(x)};$$

also, wenn man $x = x_1$ setzt:

$$A_3 = \frac{\varphi_2(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Endlich kommt man auf

$$\frac{\varphi_{n-3}(x) - A_{n-2} F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_{n-2}(x),$$

wo $\varphi_{n-2}(x)$ eine ganze rationale Function ist, und

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{F_1(x)} = S\{A_{n-1} A_n\} + \frac{X(x-x_1)^2}{F_1(x)};$$

also für $x = x_1$:

$$A_{n-1} = \frac{\varphi_{n-2}(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Weil nun

$$\varphi_{n-2}(x_1) - A_{n-1} F_1(x_1) = 0$$

ist; so ist

$$\frac{\varphi_{n-2}(x) - A_{n-1} F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_{n-1}(x)$$

eine ganze rationale Function, und aus dem Obigen folgt leicht:

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{F_1(x)} = S\{A_n\} + \frac{X(x-x_1)}{F_1(x)};$$

also, weil $S\{A_n\} = A_n$ ist, für $x = x_1$:

$$A_n = \frac{\varphi_{n-1}(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Hierdurch erhält man also zur Bestimmung von A_1, A_2, A_3, $\dots$ A_n folgende Gleichungen:

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{F_1(x_1)}, \quad \frac{f(x) - A_1 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_1(x);$$

$$A_2 = \frac{\varphi_1(x_1)}{F_1(x_1)}, \quad \frac{\varphi_1(x) - A_2 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_2(x);$$

$$A_3 = \frac{\varphi_2(x_1)}{F_1(x_1)}, \quad \frac{\varphi_2(x) - A_3 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_3(x);$$

$$A_4 = \frac{\varphi_3(x_1)}{F_1(x_1)}, \quad \frac{\varphi_3(x) - A_4 F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_4(x);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{n-1} = \frac{\varphi_{n-2}(x_1)}{F_1(x_1)}, \quad \frac{\varphi_{n-2}(x) - A_{n-1} F_1(x)}{x - x_1} = \varphi_{n-1}(x);$$

$$A_n = \frac{\varphi_{n-1}(x_1)}{F_1(x_1)}.$$

Die Functionen

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \dots\ \varphi_{n-1}(x)$$

sind sämmtlich ganze rationale Functionen, und müssen durch gemeine algebraische Division successive berechnet werden.

Die Differentialrechnung läßt sich bei diesem Problem auf folgende Art anwenden. Es ist allgemein

$$\varphi_\varrho(x) = \frac{\varphi_{\varrho-1}(x) - A_\varrho F_1(x)}{x - x_1}.$$

Folglich

$$A_\varrho + (x-x_1)\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)}.$$

Also, wenn man differentiirt:

$$\frac{x-x_1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)}.$$

Differentiirt man nun diese Gleichung von Neuem und mehrere Male hinter einander; so erhält man mit der größten Leichtigkeit:

$$\frac{x-x_1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

$$\frac{x-x_1}{1.2\partial x^2}\partial^2.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.2\partial x^2}\partial^2.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

$$\frac{x-x_1}{1.2.3\partial x^3}\partial^3.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} + \frac{1}{1.2\partial x^2}\partial^2.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1.2.3\partial x^3}\partial^3.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

u. s. w. u. s. w.

Folglich ist allgemein, wenn man nach der Differentiation $x = x_1$ setzt:

$$\frac{1}{1\dots(\alpha-1)\partial x^{\alpha-1}}\partial^{\alpha-1}.\frac{\varphi_\varrho(x)}{F_1(x)} = \frac{1}{1\dots\alpha\,\partial x^\alpha}\partial^\alpha.\frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)},$$

und folglich, immer nach der Differentiation $x = x_1$ gesetzt:

$$\begin{aligned}
A_\varrho &= \frac{\varphi_{\varrho-1}(x)}{F_1(x)} \\
&= \frac{1}{1.\partial x}\partial.\frac{\varphi_{\varrho-2}(x)}{F_1(x)} \\
&= \frac{1}{1.2\,\partial x^2}\partial^2.\frac{\varphi_{\varrho-3}(x)}{F_1(x)} \\
&= \frac{1}{1.2.3\,\partial x^3}\partial^3.\frac{\varphi_{\varrho-4}(x)}{F_1(x)} \\
&\quad\dots\dots \\
&= \frac{1}{1\dots(\varrho-2)\,\partial x^{\varrho-2}}\partial^{\varrho-2}.\frac{\varphi_1(x)}{F_1(x)} \\
&= \frac{1}{1\dots(\varrho-1)\,\partial x^{\varrho-1}}\partial^{\varrho-1}.\frac{f(x)}{F_1(x)}.
\end{aligned}$$

Ist also

$$F(x) = (x-x_1)^a . F_1(x) ,$$

wo $F_1(x)$ nicht $= 0$ ist für $x = x_1$; so ist der Zähler des Bruchs

$$\frac{A_\varrho}{(x-x_1)^{a-\varrho+1}}$$

in der Zerlegung der gebrochenen Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ nach dem Obigen:

$$A_\varrho = \frac{1}{1.2..(\varrho-1)\,\partial x^{\varrho-1}} \partial^{\varrho-1} . \frac{f(x)}{F_1(x)} ,$$

wenn man nach der Differentiation $x = x_1$ setzt.

5. Eine neue Methode zur Bestimmung der constanten Zähler der Partialbrüche ergiebt sich auf folgende Art. Nach dem Vorhergehenden ist nämlich allgemein

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^a} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{a-1}} + .. + \frac{A_a}{x-x_1} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)} ,$$

wo $\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}$ eine ächte gebrochene rationale Function von x ist. Setzen wir nun $x + \Theta$ für x, entwickeln $f(x)$ nach Potenzen von Θ, und setzen dann x_1 für x, so erhält man für $f(x_1 + \Theta)$ einen Ausdruck von der Form

$$\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + \ldots ,$$

wo α_1, α_2, α_3, α_4, ... Functionen von x_1 sind. Setzt man ferner auch $x + \Theta$ für x in dem Nenner $F(x)$, entwickelt $F(x)$ nach Potenzen von Θ, und setzt dann x_1 für x; so erhält man, weil

$$F(x) = (x-x_1)^a . F_1(x) ,$$

also

$$F(x+\Theta) = (x + \Theta - x_1)^a . F_1(x + \Theta) ,$$

und folglich

$$F(x_1 + \Theta) = \Theta^a . F_1(x_1 + \Theta)$$

ist, für $F(x_1 + \Theta)$ offenbar einen Ausdruck von der Form

$$\beta_1\Theta^a + \beta_2\Theta^{a+1} + \beta_3\Theta^{a+2} + \beta_4\Theta^{a+3} + \ldots ,$$

wo β_1, β_2, β_3, β_4, ... Functionen von x_1 sind. Setzt man also in der obigen Gleichung $x_1 + \Theta$ für x, so wird dieselbe

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + \ldots}{\beta_1\Theta^a + \beta_2\Theta^{a+1} + \beta_3\Theta^{a+2} + \beta_4\Theta^{a+3} + \ldots}$$

$$= \frac{A_1}{\Theta^a} + \frac{A_2}{\Theta^{a-1}} + \frac{A_3}{\Theta^{a-2}} + \ldots + \frac{A_a}{\Theta} + \frac{\varphi(x_1+\Theta)}{F_1(x_1+\Theta)} ,$$

oder

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + \ldots}{\beta_1 + \beta_2\Theta + \beta_3\Theta^2 + \beta_4\Theta^3 + \ldots}$$

$$= A_1 + A_2\Theta + A_3\Theta^2 + A_4\Theta^3 + \ldots + A_a\Theta^{a-1} + \Theta^a . \frac{\varphi(x_1+\Theta)}{F_1(x_1+\Theta)} ,$$

woraus ferner leicht folgt:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2\Theta + \alpha_3\Theta^2 + \alpha_4\Theta^3 + \ldots\ldots \\
&= \beta_1 A_1 + \beta_1 A_2\Theta + \beta_1 A_3\Theta^2 + \ldots + \beta_1 A_a\Theta^{a-1} \\
&\quad + \beta_2 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_2 A_{a-1} \\
&\quad + \beta_3 A_1 + \ldots + \beta_3 A_{a-2} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \beta^a A_1
\end{aligned} \Big\} + X_1\Theta^a,$$

wo X_1 eine gewisse von x_1 und Θ abhängende Größe bezeichnet, die, wie leicht erhellet, für $\Theta = 0$ nicht unendlich wird. Setzt man nun in dieser für jedes Θ geltenden Gleichung $\Theta = 0$, so erhält man $\alpha_1 = \beta_1 A_1$. Hebt man dann die gleichen Größen auf beiden Seiten auf, dividirt auf beiden Seiten durch Θ, und setzt dann wieder $\Theta = 0$, so erhält man $\alpha_2 = \beta_1 A_2 + \beta_2 A_1$. Auch ist klar, wie man nach dieser Schlußweise, die in der Analysis oft angewandt wird, und hier als bekannt vorausgesetzt werden kann, weiter gehen kann. Man erhält dadurch überhaupt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1 A_1 \\
\alpha_2 &= \beta_1 A_2 + \beta_2 A_1 \\
\alpha_3 &= \beta_1 A_3 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_1 \\
\alpha_4 &= \beta_1 A_4 + \beta_2 A_3 + \beta_3 A_2 + \beta_4 A_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_a &= \beta_1 A_a + \beta_2 A_{a-1} + \beta_3 A_{a-2} + \beta_4 A_{a-3} + \ldots + \beta_a A_1
\end{aligned}$$

und diese Gleichungen reichen zur Bestimmung der Zähler

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_a$$

völlig hin. Wie die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$ sich bestimmen lassen, erhellet aus dem Obigen.

6. Die vorigen Gleichungen lassen sich aber vermittelst der Differentialquotienten, welche wir wieder nach Lagrange bezeichnen wollen, noch auf einen andern merkwürdigen Ausdruck bringen. Aus dem Taylorschen Lehrsatze erhellet nämlich auf der Stelle die Richtigkeit folgender Ausdrücke:

$$\alpha_1 = f(x_1),\ \alpha_2 = \frac{f'(x_1)}{1},\ \alpha_3 = \frac{f''(x_1)}{1.2},\ \alpha_4 = \frac{f'''(x_1)}{1.2.3},\ \ldots;$$

$$\beta_1 = \frac{F^{(a)}(x_1)}{1\ldots a},\ \beta_2 = \frac{F^{(a+1)}(x_1)}{1\ldots(a+1)},\ \beta_3 = \frac{F^{(a+2)}(x_1)}{1\ldots(a+2)},\ \ldots.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die in (5.) bewiesenen Gleichungen; so werden dieselben:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \frac{A_1 F^{(a)}(x_1)}{1\ldots a} \\
\frac{f'(x_1)}{1} &= \frac{A_2 F^{(a)}(x_1)}{1\ldots a} + \frac{A_1 F^{(a+1)}(x_1)}{1\ldots(a+1)} \\
\frac{f''(x_1)}{1.2} &= \frac{A_3 F^{(a)}(x_1)}{1\ldots a} + \frac{A_2 F^{(a+1)}(x_1)}{1\ldots(a+1)} + \frac{A_1 F^{(a+2)}(x_1)}{1\ldots(a+2)}
\end{aligned}$$

$$\frac{f'''(x_1)}{1.2.3} = \frac{A_1 F^{(a)}(x_1)}{1 \ldots a} + \frac{A_2 F^{(a+1)}(x_1)}{1 \ldots (a+1)} + \frac{A_3 F^{(a+2)}(x_1)}{1 \ldots (a+2)} + \frac{A_4 F^{(a+3)}(x_1)}{1 \ldots (a+3)}$$

u. s. w. u. s. w.

Diese Gleichungen sind deshalb vorzüglich bemerkenswerth, weil man mittelst derselben die Zähler $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ durch unmittelbare Differentiation des Zählers und des Nenners der gegebenen gebrochenen Function finden kann. Sie würden sich zur Berechnung noch etwas bequemer einrichten lassen, wenn man auf beiden Seiten mit $1 \ldots a$ multiplicirte.

7. Wir wollen nun die vorigen Zerlegungen aus einem noch allgemeinern Gesichtspunkte betrachten, und gebrauchen bei dieser Untersuchung eine Bezeichnung, die zuerst von Crelle in seinem trefflichen Mémoire sur la decomposition des fractions algébriques. Berlin 1832. mit großem Vortheil angewandt worden ist. Bezeichnet nämlich X eine beliebige ganze rationale Function von x, und ist der Grad dieser Function $= n$; so soll dies in der Folge immer durch ${}^{n}X$ angezeigt werden, so daß man nämlich den höchsten Exponenten von x dem Functionszeichen oben links beifügt, wenn nämlich überhaupt die Bestimmung des Grades der Function auf die Untersuchung Einfluß hat. y, z, X, Y, Z sollen beliebige ganze rationale Functionen von x bezeichnen; jedoch sollen z und Z keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Auch wollen wir annehmen, daß

$$\frac{X}{{}^{r\varrho}Z^{\varrho} \cdot {}^{s}Z}$$

stets eine ächte gebrochene rationale Function von x sey, und werden daher die besondere Andeutung des Grades der Function X der Kürze wegen in der Folge unterlassen. Endlich soll immer $n = r\varrho + s$ gesetzt werden, so daß also, für $\varrho = 1$, $n = r + s$ ist. Unter diesen Voraussetzungen können wir nun behaupten und mittelst des Vorhergehenden streng beweisen, daß sich immer

$$\frac{X}{{}^{r\varrho}Z^{\varrho} \cdot {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-t}y}{{}^{r\varrho}Z^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r\varrho-1}Z^{\varrho-1} \cdot {}^{s}Z}$$

setzen läßt. Zu dem Ende setzen wir

$${}^{r}Z = (x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c \ldots (x-x_k)^q,$$

wo also

$$a + b + c + d + \ldots + q = r$$

ist, und nehmen an, daß $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ sämmtlich unter einander ungleich seyen. Z wird nach der Voraussetzung nicht $= 0$, wenn man

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_k$$

setzt. Zuerst wollen wir annehmen, daß $\varrho = 1$, folglich

$$n = a + b + c + d + \ldots + q + s$$

sey. Setzen wir der Kürze wegen

$$P_a = (x-x_1)^a (x-x_2)^b (x-x_3)^c (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$
$$P_b = (x-x_2)^b (x-x_3)^c (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$
$$P_c = (x-x_3)^c (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$
$$P_d = (x-x_4)^d \ldots (x-x_k)^q,$$
u. s. w. u. s. w.

so folgt aus unsern frühern Untersuchungen in völliger Allgemeinheit, daß immer

$$\frac{X}{r_Z \cdot {}^sZ} =$$
$$\frac{A_1}{(x-x_1)^a} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{a-1}} + \ldots + \frac{A_a}{x-x_1} + \frac{n-a-1Y_1}{P_b \cdot {}^sZ},$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\frac{X}{r_Z \cdot {}^sZ} = \frac{a-1V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{n-a-1Y_1}{P_b \cdot {}^sZ}$$

ist. Wendet man dies mehrere Mal hinter einander an, so erhält man:

$$\frac{X}{r_Z \cdot {}^sZ} = \frac{a-1V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{n-a-1Y_1}{P_b \cdot {}^sZ}$$
$$= \frac{a-1V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{b-1V_2}{(x-x_2)^b} + \frac{n-a-b-1Y_2}{P_c \cdot {}^sZ}$$
$$= \frac{a-1V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{b-1V_2}{(x-x_2)^b} + \frac{c-1V_3}{(x-x_3)^c} + \frac{n-a-b-c-1Y_3}{P_d \cdot {}^sZ}$$
u. s. w. u. s. w.

und folglich, weil

$$n-a-b-c-\ldots-q-1 = s-1$$

ist, endlich

$$\frac{X}{r_Z \cdot {}^sZ} =$$
$$\frac{a-1V_1}{(x-x_1)^a} + \frac{b-1V_2}{(x-x_2)^b} + \frac{c-1V_3}{(x-x_3)^c} + \ldots + \frac{q-1V_k}{(x-x_k)^q} + \frac{s-1Y_k}{{}^sZ},$$

woraus, wenn man sich die Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ohne den letzten zu einander addirt denkt, auf der Stelle

$$\frac{X}{r_Z \cdot {}^sZ} = \frac{r-1y}{r_Z} + \frac{s-1Y}{{}^sZ},$$

wo Y statt Y_k gesetzt ist, folgt. Dividiren wir nun auf beiden Seiten durch ${}^r z^{\varrho-1}$; so erhalten wir auf der Stelle

$$\frac{X}{r_{Z\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{r-1y}{r_{Z\varrho}} + \frac{s-1Y}{r_{Z\varrho-1} \cdot {}^sZ},$$

wobei aber die Voraussetzung zum Grunde liegt, daß der Exponent der höchsten Potenz von x in der Function X, d. i. der Grad dieser Function, kleiner wie $r+s$ ist. Da nun in diesem Falle

$$n = r + s,\ s - 1 = n - r - 1$$

ist, so ist, wenn der Grad der Function X kleiner wie $r + s$ ist, immer

$$\frac{X}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}Y}{r_{Z^\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{r_{Z^{\varrho-1}} \cdot {}^sZ}.$$

Ist aber, wenn wir den Grad von X jetzt durch m bezeichnen, $m \gtrless r + s$, aber $m < r\varrho + s$, d. i. $m < n$; so kann man offenbar

$$\frac{X}{r_Z \cdot {}^sZ} = {}^{m-r-s}X_1 + \frac{{}^{r+s-1}X_2}{r_Z \cdot {}^sZ},$$

folglich

$$\frac{X}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{{}^{m-r-s}X_1}{r_{Z^{\varrho-1}}} + \frac{{}^{r+s-1}X_2}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ},$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\frac{{}^{r+s-1}X_2}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}Y}{r_{Z^\varrho}} + \frac{{}^{s-1}X_3}{r_{Z^{\varrho-1}} \cdot {}^sZ};$$

also

$$\frac{X}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}Y}{r_{Z^\varrho}} + \frac{{}^{m-r-s}X_1}{r_{Z^{\varrho-1}}} + \frac{{}^{s-1}X_3}{r_{Z^{\varrho-1}} \cdot {}^sZ}$$

$$= \frac{{}^{r-1}Y}{r_{Z^\varrho}} + \frac{{}^{m-r-s}X_1 \cdot {}^sZ + {}^{s-1}X_3}{r_{Z^{\varrho-1}} \cdot {}^sZ},$$

und folglich, weil

$$m \gtrless r + s,\ m - r \gtrless s,\ m - r > s - 1$$

ist,

$$\frac{X}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}Y}{r_{Z^\varrho}} + \frac{{}^{m-r}Y}{r_{Z^{\varrho-1}} \cdot {}^sZ}$$

setzen. Weil aber $m < n$ ist, so ist

$$m - r < n - r,\ m - r \lesseqgtr n - r - 1;$$

und folglich immer

$$\frac{X}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}Y}{r_{Z^\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{r_{Z^{\varrho-1}} \cdot {}^sZ},$$

da $n - r - 1$ der höchste Grad ist, bis zu welchem der Zähler des letzten Bruchs steigen kann; und auf diesen höchsten Grad kommt es bei der gegenwärtigen Untersuchung immer bloß an. Daß der letzte Bruch in obiger Gleichung eine ächte gebrochene rationale Function ist, ist klar. Der Grad des Nenners ist nämlich

$$r(\varrho - 1) + s = r\varrho + s - r = n - r,$$

und also

$$n - r - 1 < r(\varrho - 1) + s.$$

Es ist also in allen Fällen

$$\frac{X}{r_{Z^\varrho} \cdot {}^sZ} = \frac{{}^{r-1}Y}{r_{Z^\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{r_{Z^{\varrho-1}} \cdot {}^sZ},$$

wie bewiesen werden sollte.

Durch mehrfache Anwendung dieser Zerlegung erhält man:

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho}\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1}\,.\,{}^{s}Z},$$

$$\frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1}\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^{r}z^{\varrho-2}\,.\,{}^{s}Z},$$

$$\frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^{r}z^{\varrho-2}\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^{r}z^{\varrho-2}} + \frac{{}^{n-3r-1}Y_2}{{}^{r}z^{\varrho-3}\,.\,{}^{s}Z},$$

. . . . . .

$$\frac{{}^{n-(\varrho-1)r-1}Y_{\varrho-2}}{{}^{r}z\,.\,{}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y_{\varrho-1}}{{}^{r}z} + \frac{{}^{n-\varrho r-1}Y_{\varrho-1}}{{}^{s}Z},$$

d. i., weil

$$n - \varrho r - 1 = r\varrho + s - \varrho r - 1 = s - 1$$

ist, wenn man auf beide Seiten addirt, und aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho}\,.\,{}^{s}Z} =$$

$$\frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^{r}z^{\varrho-2}} + \ldots + \frac{{}^{r-1}y_{\varrho-1}}{{}^{r}z} + \frac{{}^{s-1}Y_{\varrho-1}}{{}^{s}Z},$$

wo also der letzte Bruch immer eine ächte gebrochene rationale Function von x ist.

8. Diese Gleichungen führen zu der folgenden ganz elementaren und sehr allgemeinen Methode zur Zerlegung der gebrochenen Functionen, welche von Crelle a. a. O. p. 62. gegeben worden ist. Da nämlich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{X - {}^{r-1}y\,.\,{}^{s}Z}{{}^{r}z} = {}^{n-r-1}Y$$

und ${}^{n-r-1}Y$ eine ganze rationale Function von x ist, so muß ${}^{r}z$ in dem Zähler des ersten Bruchs aufgehen. ${}^{r-1}y$ ist eine ganze rationale Function des $(r-1)$ten Grades, und wir können also

$${}^{r-1}y = \alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3} + \ldots + \alpha_r$$

setzen, wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ constante, aber noch unbestimmte Coefficienten sind. Multiplicirt man nun diesen allgemeinen Ausdruck von ${}^{r-1}y$ mit der gegebenen Function ${}^{s}Z$, zieht das Product von der ebenfalls gegebenen Function X ab, und dividirt in die erhaltene Differenz mit ${}^{r}z$ hinein; so wird man eine gewisse ganze rationale Function als Quotient, und eine eben solche Function als Rest erhalten, wobei sich von selbst versteht, daß diese beiden Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ abhängen. Auch erhellet auf der Stelle, daß, weil der Divisor vom rten Grade ist, der Rest vom $(r-1)$ten Grade seyn muß, und daher durch ${}^{r-1}R$ bezeichnet werden kann. Weil nun aber ${}^{r}z$ in $X - {}^{r-1}y\,.\,{}^{s}Z$ aufgeht, so muß für jedes x oder identisch

$${}^{r-1}R = 0$$

seyn. Also sind die Coefficienten aller Potenzen von x in diesem Reste = 0 zu setzen, wodurch man, da der Rest aus r Gliedern besteht und alle in Rede stehenden Coefficienten α_1, α_2, α_3, ... α_r enthalten, zwischen diesen Größen r Gleichungen erhält, aus denen sich dieselben also bestimmen lassen, wodurch ^{r-1}y gefunden wird. Der durch die Division von $X - {}^{r-1}y \,.\, {}^{s}Z$ durch ^{r}z gefundene Quotient ist die Function $^{n-r-1}Y$. Führt man also in diesen Quotienten für α_1, α_2, α_3, ... α_r ihre vorher gefundenen Werthe ein, so erhält man $^{n-r-1}Y$, und hat nun in der Gleichung

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \,.\, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1} \,.\, {}^{s}Z}$$

die unbekannten Größen vollständig bestimmt. Dasselbe Verfahren, auf die bekannte Function

$$\frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z^{\varrho-1} \,.\, {}^{s}Z}$$

angewandt, führt ferner zu der Zerlegung

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \,.\, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^{r}z^{\varrho-2} \,.\, {}^{s}Z},$$

und, wenn man dieses Verfahren nun wieder auf die bekannte Function

$$\frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^{r}z^{\varrho-2} \,.\, {}^{s}Z}$$

anwendet, so erhält man die Zerlegung

$$\frac{X}{{}^{r}z \,.\, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^{r}z^{\varrho-2}} + \frac{{}^{n-3r-1}Y_2}{{}^{r}z^{\varrho-3} \,.\, {}^{s}Z}.$$

Wie man so weiter gehen, und endlich zu der Zerlegung

$$\frac{X}{{}^{r}z^{\varrho} \,.\, {}^{s}Z} = \frac{{}^{r-1}y}{{}^{r}z^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}y_1}{{}^{r}z^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}y_2}{{}^{r}z^{\varrho-2}} + \ldots + \frac{{}^{r-1}y_{\varrho-1}}{{}^{r}z} + \frac{{}^{s-1}Y_{\varrho-1}}{{}^{s}Z},$$

die das eigentliche Resultat ist, welches man sucht, gelangen kann, ist klar. Dabei bietet sich aber eine wohl zu beachtende Abkürzung der Rechnung dar. Weil nämlich bei allen Divisionen, die man zu verrichten hat, das Product $^{r-1}y_\mu \,.\, {}^{s}Z$ stets dasselbe bleibt, indem man immer

$${}^{r-1}y_\mu \,.\, {}^{s}Z = (\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3} + \ldots + \alpha_r) \,.\, {}^{s}Z$$

zu setzen hat; so genügt es, den Bruch

$$\frac{(\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3} + \ldots + \alpha_r) \,.\, {}^{s}Z}{{}^{r}z}$$

ein für alle Mal durch Division in die in ihm enthaltene ganze und ächte gebrochene Function zu zerlegen, dasselbe Geschäft bei den einzelnen Divisionen dann bloß bei den Brüchen

$$\frac{X}{{}^{r}z}, \quad \frac{{}^{n-r-1}Y}{{}^{r}z}, \quad \frac{{}^{n-2r-1}Y_1}{{}^{r}z}, \quad \frac{{}^{n-3r-1}Y_2}{{}^{r}z}, \ldots$$

zu verrichten, und daraus dann, welches immer leicht möglich

seyn wird, die gesuchten Quotienten und Reste abzuleiten. Diese Methode ist, wie Crelle sehr richtig bemerkt, ganz elementar, gewährt eine leichte Rechnung, und verdient allerdings sehr, in die Elemente aufgenommen zu werden, da dieselbe sich auch leicht auf eine ganz elementare Weise darstellen lassen würde.

Wir wollen diese Methode nur auf ein einziges Exempel anwenden. Die gegebene gebrochene Function sey

$$\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)}.$$

Da nun hier

$$X = x - x^3,\ {}^rz = 1 + x^2,\ r = 2,\ {}^sZ = 1 + x^4,\ s = 4$$

ist; so hat man

$${}^{r-1}y = \alpha_1 x + \alpha_2$$

zu setzen, wodurch man

$${}^{r-1}y.{}^sZ = \alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^4 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

erhält, und muß nun ein für alle Mal mit

$${}^rz = x^2 + 1$$

in

$$\alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^4 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

dividiren. Dies giebt den Quotienten

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2$$

und den Rest

$$2\alpha_1 x + 2\alpha_2,$$

zwei Größen, die bei der folgenden Rechnung fortwährend gebraucht werden. Dividirt man jetzt zunächst mit

$${}^rz = x^2 + 1 \text{ in } X = -x^3 + x;$$

so ergiebt sich als Quotient $-x$ und als Rest $2x$. Dividirt man also mit

$${}^rz \text{ in } X - {}^{r-1}y.{}^sZ;$$

so erhält man als Quotient

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - 1)x + \alpha_2,$$

und als Rest

$$-2(\alpha_1 - 1)x - 2\alpha_2.$$

Folglich hat man zur Bestimmung von α_1 und α_2 die Gleichungen

$$-2(\alpha_1 - 1) = 0,\ -2\alpha_2 = 0,$$

woraus $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0$.

Führt man diese Werthe in den obigen Quotienten ein, so wird derselbe $= -x^3$, und man hat folglich

$$\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{-x^3}{(1+x^2)^3(1+x^4)}.$$

Nun dividirt man mit $x^2 + 1$ in $-x^3$. Dies giebt als Quotient $-x$ und als Rest x.

Folglich hat man jetzt den Quotienten

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - 1)x + \alpha_2$$

und den Rest

$$-(2\alpha_1 - 1)x - 2\alpha_2 .$$

Also

$$-(2\alpha_1 - 1) = 0, \quad -2\alpha_2 = 0 ,$$

woraus $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$. Führt man diese Werthe in den obigen Quotienten ein, so wird derselbe:

$$-\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}(x^3 + x)$$

und es ist folglich

$$\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{x}{2(1+x^2)^3} + \frac{-x^3 - x}{2(1+x^2)^2(1+x^4)}$$

Dividirt man nun wieder mit $x^2 + 1$ in $-x^3 - x$, so erhält man als Quotient $-x$ und als Rest 0. Folglich hat man jetzt den Quotienten

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - 1)x + \alpha_2$$

und den Rest

$$-2\alpha_1 x - 2\alpha_2 .$$

Also

$$-2\alpha_1 = 0, \quad -2\alpha_2 = 0; \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0 .$$

Führt man diese Werthe in den obigen Quotienten ein, so wird derselbe $-x$, und folglich

$$\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} = \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{x}{2(1+x^2)^3} + \frac{-x}{2(1+x^2)(1+x^4)} .$$

Dividirt man jetzt endlich mit $x^2 + 1$ in x, so ist der Quotient 0 und der Rest $-x$. Folglich hat man jetzt den Quotienten

$$-\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

und den Rest

$$-(2\alpha_1 + 1)x - 2\alpha_1 .$$

Also

$$-(2\alpha_1 + 1) = 0, \quad -2\alpha_2 = 0 ,$$

woraus $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$. Führt man dies in den obigen Quotienten ein, so wird derselbe

$$\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(x^3 - x) .$$

Folglich

$$\frac{x - x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)} =$$

$$\frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{x}{2(1+x^2)^3} - \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{x^3 - x}{4(1+x^4)} ,$$

ganz eben so, wie auch **Euler** in der **Introd. in Anal. inf. T. I. p. 174.** findet. Man sieht aus diesem Exempel, wie leicht die obige Methode zum Zweck führt.

9. **Leibnitz** hat zuerst die Zerlegung der gebrochenen Functionen in einfache Brüche und deren Gebrauch in der Integralrechnung gelehrt. Seine Methode beruhet auf ganz allgemeinen Formeln und findet sich in den **Act. Erud. 1702. p. 210 — 19.** und **1703. p. 19 — 26.**, scheint aber wenig bekannt zu seyn, und mag daher in etwas veränderter Darstellung hier noch einen Platz finden. Uebrigens ist **Leibnitz** schon lange vor der Bekanntmachung in den **Actis Erud.** im Besitz seiner Methode gewesen, wie aus einem seiner an **Joh. Bernoulli** geschriebenen Briefe (**Commercium epistol. Leibn. et Joh. Bern. T. II. Epist. CLXV. Leibn. ad Bern. 1706. Oct.**) erhellet, wo er sagt: **Quod de rationalibus Quadraturis nuper edidi, iam tum habui; reductione enim fractionum compositarum ad simplices pro seriebus numericis inventa, pronum fuit idem adhibere figurarum Quadraturis. Eoque omnia iam triginta annorum aetatem habent.**

I. Wir wollen annehmen, daß die Größen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

sämmtlich unter einander ungleich seyen, und wollen das Product, welches man erhält, wenn man von der Größe x_k alle Größen der obigen Reihe, die Größe x_k selbst ausgenommen, abzieht, und sämmtliche so erhaltene Differenzen in einander multiplicirt, durch $\varphi(k, n)$ bezeichnen. Dann ist immer

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)} =$$

$$\frac{1}{\varphi(1,n).(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(2,n).(x-x_2)} + \frac{1}{\varphi(3,n).(x-x_3)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n,n).(x-x_n)}.$$

Es ist nämlich

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{x-x_2-(x-x_1)}{(x_1-x_2)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(1;2).(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(2,2).(x-x_2)}.$$

Folglich

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{1}{\varphi(1,2).(x-x_1)(x-x_3)} + \frac{1}{\varphi(2,2).(x-x_2)(x-x_3)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(1,2).(x_1-x_2)(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(1,2).(x_3-x_1)(x-x_3)}$$

$$+ \frac{1}{\varphi(2,2).(x_2-x_3)(x-x_2)} + \frac{1}{\varphi(2,2).(x_3-x_2)(x-x_3)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(1,3).(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi(2,3).(x-x_2)} + \frac{1}{\varphi(3,3).(x-x_3)}$$

weil offenbar

$$\varphi(1,2).(x_1-x_3)=\varphi(1,3),\ \varphi(2,2).(x_2-x_3)=\varphi(2,3)$$

und nach dem Vorhergehenden, wenn man $x=x_3$ setzt, offenbar

$$\frac{1}{\varphi(1,2).(x_3-x_1)}+\frac{1}{\varphi(2,2).(x_3-x_2)}=\frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{1}{\varphi(3,3)}$$

ist.

Ferner ist nun

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$$

$$=\frac{1}{\varphi(1,3).(x-x_1)(x-x_4)}+\frac{1}{\varphi(2,3).(x-x_2)(x-x_4)}+\frac{1}{\varphi(3,3).(x-x_3)(x-x_4)}$$

$$=\frac{1}{\varphi(1,3).(x_1-x_4)(x-x_3)}+\frac{1}{\varphi(1,3).(x_4-x_1)(x-x_4)}$$

$$+\frac{1}{\varphi(2,3).(x_2-x_4)(x-x_2)}+\frac{1}{\varphi(2,3).(x_4-x_2)(x-x_4)}$$

$$+\frac{1}{\varphi(3,3).(x_3-x_4)(x-x_3)}+\frac{1}{\varphi(3,3).(x_4-x_3)(x-x_4)}$$

$$=\frac{1}{\varphi(1,4).(x-x_1)}+\frac{1}{\varphi(2,4).(x-x_2)}+\frac{1}{\varphi(3,4).(x-x_3)}+\frac{1}{\varphi(4,4).(x-x_4)},$$

weil offenbar

$$\varphi(1,3).(x_1-x_4)=\varphi(1,4),\varphi(2,3).(x_2-x_4)=\varphi(2,4),\varphi(3,3).(x_3-x_4)=\varphi(3,4),$$

und, wenn man $x=x_4$ setzt, nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{\varphi(1,3).(x_4-x_1)}+\frac{1}{\varphi(2,3).(x_4-x_2)}+\frac{1}{\varphi(3,3).(x_4-x_3)}$$

$$=\frac{1}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}=\frac{1}{\varphi(4,4)}$$

ist.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und Leibnitzens Satz ist also hierdurch allgemein bewiesen.

Sind also $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sämmtlich unter einander ungleich, so läßt sich, wenn C eine constante Größe bezeichnet, der Bruch

$$\frac{C}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}$$

stets in einfache Brüche von der Form

$$\frac{c_k}{x-x_k}$$

zerlegen.

II. Bezeichnen wir den kten Binomial-Coefficienten der nten Potenz durch ${}^{k}_{n}\mathfrak{B}$; so ist immer

$$\frac{1}{(x-x_1)^a(x-x_2)^b} =$$

$$\frac{1}{(x_1-x_2)^b.(x-x_1)^a} - \frac{b\mathfrak{B}^1}{(x_1-x_2)^{b+1}.(x-x_1)^{a-1}} + \frac{b+1\mathfrak{B}^2}{(x_1-x_2)^{b+2}.(x-x_1)^{a-2}} - \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^{a-1}.\frac{b+a-2\mathfrak{B}^{a-1}}{(x_1-x_2)^{b+a-1}.(x-x_1)}$$

$$+\frac{1}{(x_2-x_1)^a.(x-x_2)^b} - \frac{a\mathfrak{B}^1}{(x_2-x_1)^{a+1}.(x-x_2)^{b-1}} + \frac{a+1\mathfrak{B}^2}{(x_2-x_1)^{a+2}.(x-x_2)^{b-2}} - \ldots$$

$$\ldots. + (-1)^{b-1}.\frac{a+b-2\mathfrak{B}^{b-1}}{(x_2-x_1)^{a+b-1}.(x-x_2)}.$$

Der Beweis dieses Satzes hat keine Schwierigkeit. Es ist nämlich nach I.

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_2)}.$$

Folglich

$$\frac{1}{(x-x_1)^2(x-x_2)} = \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x_1-x_2)^2(x-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)^2(x-x_2)}.$$

Folglich

$$\frac{1}{(x-x_1)^3(x-x_2)} =$$

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^3} - \frac{1}{(x_1-x_2)^2(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x_2-x_1)^2(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^3} - \frac{1}{(x_1-x_2)^2(x-x_1)^2} + \frac{1}{(x_1-x_2)^3(x-x_1)}$$

$$+ \frac{1}{(x_2-x_1)^3(x-x_2)}.$$

Wie man so weiter gehen kann, ist klar. Die letzten Brüche werden immer nach I. zerlegt. Man sieht also, daß der zu beweisende Satz für

$$a = 1,\ b = 1;$$
$$a = 2,\ b = 1;$$
$$a = 3,\ b = 1;$$
$$\ldots\ldots$$
$$a = a,\ b = 1$$

gilt. Also ist

$$\frac{1}{(x-x_1)^a(x-x_2)} =$$

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_1)^a} - \frac{1}{(x_1-x_2)^2.(x-x_1)^{a-1}} + \frac{1}{(x_1-x_2)^3.(x-x_1)^{a-2}} - \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^{a-1}.\frac{1}{(x_1-x_2)^a.(x-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)^2.(x-x_2)}.$$

Hieraus leitet man nun ferner mit Hülfe einiger sehr bekannten Sätze von den Binomial-Coefficienten leicht ab, daß der Satz für

$$a = a,\ b = 2;$$
$$a = a,\ b = 3;$$
$$a = a,\ b = 4;$$
$$\cdots\cdots$$
$$a = a,\ b = b,$$

d. i. allgemein gilt. Die Rechnung hat gar keine Schwierigkeit, würde aber, wenn wir sie hier ausführen wollten, zu viel Raum wegnehmen.

Weil nun

$$\frac{1}{(x-x_1)^a(x-x_2)^b(x-x_3)^c} = \frac{1}{(x-x_1)^a(x-x_2)^b} \cdot \frac{1}{(x-x_3)^c}$$

ist, und die Function

$$\frac{1}{(x-x_1)^a(x-x_1)^b}$$

nach dem Vorigen sich in Brüche von der Form

$$\frac{C}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen läßt, so läßt

$$\frac{1}{(x-x_1)^a(x-x_2)^b(x-x_3)^c}$$

sich in Brüche von der Form

$$\frac{C}{(x-\alpha)^\mu(x-\beta)^\nu},$$

folglich nach dem Vorigen auch in Brüche von der Form

$$\frac{C}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen, und so überzeugt man sich leicht, daß sich überhaupt die gebrochene Function

$$\frac{C}{(x-x_1)^a(x-x_2)^b(x-x_3)^c\ldots.}$$

in einfache Brüche von der Form

$$\frac{k}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen läßt.

III. Wir wollen jetzt die erste, zweite, dritte, u. s. w. Klasse der Combinationen mit Wiederholungen durch

$$\overset{1}{K}, \overset{2}{K}, \overset{3}{K}, \overset{4}{K}, \ldots..$$

bezeichnen, und die Elemente, auf welche sich diese Combinationsklassen beziehen, unter die obigen Symbole derselben schreiben.

Ist dann $\alpha < n$, so ist immer, die Größen $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ mögen alle oder zum Theil unter einander gleich, oder alle unter einander ungleich seyn:

$$\frac{x^\alpha}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}$$

$$= \frac{1}{(x-x_{\alpha+1})\ldots(x-x_n)}$$

$$- \frac{1}{(x-x_\alpha)\ldots(x-x_n)} \cdot \overset{1}{K}(-x_1, -x_2, \ldots -x_\alpha)$$

$$+ \frac{1}{(x-x_{\alpha-1})\ldots(x-x_n)} \cdot \overset{2}{K}(-x_1, -x_2, \ldots -x_{\alpha-1})$$

$$- \frac{1}{(x-x_{\alpha-2})\ldots(x-x_n)} \cdot \overset{3}{K}(-x_1, -x_2, \ldots -x_{\alpha-2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \cdot \overset{\alpha-1}{K}(-x_1, -x_2)$$

$$+ (-1)^\alpha \cdot \frac{1}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} \cdot \overset{\alpha}{K}(-x_1) .$$

Wir überlassen dem Leser, den Beweis dieses Satzes, der auf einigen sehr bekannten combinatorischen Hülfssätzen beruhet, selbst zu suchen.

IV. Da sich nun jede ächte gebrochene rationale Function in lauter Brüche von der Form

$$\frac{Cx^\alpha}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)},$$

wo $\alpha < n$ ist, und $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ alle oder zum Theil einander gleich, oder alle unter einander ungleich seyn können; so folgt aus I, II, III unmittelbar, daß jede ächte gebrochene rationale Function sich in lauter Brüche von der Form

$$\frac{k}{(x-\alpha)^\mu}$$

zerlegen läßt.

Man sieht also, daß sich aus Leibnitzens Sätzen ein sehr strenger und allgemeiner Beweis für die Möglichkeit der Zerlegbarkeit jeder ächten gebrochenen Function in Brüche von der obigen Form ergiebt. Auch sind diese Sätze an sich nicht ohne Interesse. Daß sich jede ächte gebrochene Function in Brüche von der angegebenen Form zerlegen läßt, ist freilich auch schon oben von uns, wie wir glauben, völlig streng und allgemein bewiesen worden.

Für die Literatur dieses Gegenstandes ist die schon oben angeführte Schrift von Crelle, die sich auch in dem Journal für

reine u. angew. Math. T. IX. X. befindet, besonders wichtig, weil dieselbe nicht bloß eine sehr gründliche Darstellung dieses Gegenstandes überhaupt, sondern auch, neben verschiedenen Methoden anderer Mathematiker, die sehr einfache und elementare dem Verfasser eigenthümliche Methode enthält, von welcher oben ausführlich die Rede gewesen ist. Auch behandelt Crelle in dieser Abhandlung die in vieler Beziehung wichtige und merkwürdige Methode von Euler sehr ausführlich, welche in den Mémoires de l'Académie des sc. de Petersbourg. T. I. 1809. p. 3. mitgetheilt ist. Die Methoden von Dirksen und Clausen s. m. in Crelles Journal. T. I. S. 53. T. VIII. S. 142. Einige Bemerkungen von Beyer ebendas. Thl. VII. S. 222. Mit verwandten Untersuchungen beschäftigen sich: C. G. J. Jacobi Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus. Berol. 1825. Auch s. m. Crelles Journal T. V. S. 344.

II. Bestimmung der Form der Functionen aus gegebenen Bedingungsgleichungen.

10. Wir wollen uns, um den Sinn der Untersuchungen, mit denen wir es hier zu thun haben werden, in recht helles Licht zu setzen, sogleich folgende Aufgabe vorlegen.

Die Function $\varphi(x)$, eigentlich die Form dieser Function, so zu bestimmen, daß dieselbe zwischen jeden zwei beliebigen reellen Gränzen der veränderlichen Größe x stetig bleibt, und für alle reelle Werthe der veränderlichen Größen x und y der Gleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

genügt.

Man sieht, daß bei dieser Aufgabe, von deren Art alle Aufgaben sind, welche hier aufgelöst werden sollen, die Form der Function $\varphi(x)$ ganz unbekannt ist, und so bestimmt werden soll, daß die Function zwischen jeden zwei beliebigen reellen Gränzen von x stetig ist, und für jede zwei reelle Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

gehügt. Aufgaben dieser Art sind, wie man leicht übersieht, oft unbestimmt, und die Bestimmung, ob es nur eine, oder eine bestimmte Anzahl, oder eine ganz unbestimmte Anzahl den Bedingungen der Aufgabe genügende Functionen giebt, ist daher bei der Auflösung solcher Probleme jederzeit ein Hauptpunkt. Sollte z. B. die Function $\psi(x)$ so bestimmt werden, daß für jedes x

$$\psi(\psi(x)) = x$$

ist; so könnte man z. B.

$$\psi(x) = \frac{a - bx}{b + cx}$$

setzen, weil, wie man leicht findet,

$$\psi(\psi(x)) = \frac{a - b\,\frac{a - bx}{b + cx}}{b + c\,\frac{a - bx}{b + cx}} = x$$

ist. Man könnte aber auch

$$\psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

setzen, weil ebenfalls für diese Function

$$\psi(\psi(x)) = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = x$$

ist. Eben so könnte man auch

$$\psi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

setzen, weil, wie man leicht findet, für diese Function wieder

$$\psi(\psi(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)^2 - 1}} = x$$

ist. Außer diesen Werthen von $\psi(x)$ würde es noch viele andere der Gleichung

$$\psi(\psi(x)) = x$$

genügende Functionen geben. Nach diesen Bemerkungen, welche bloß zur nähern Erläuterung des Sinnes der Untersuchungen, welche wir hier vor haben, dienen sollen, kehren wir nun wieder zu der Aufgabe, von welcher wir oben ausgingen, zurück.

Setzt man in der für jedes x und y geltenden Bedingungsgleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$y + z$ für y; so erhält man

$$\varphi(x + y + z) = \varphi(x) + \varphi(y + z)$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) .$$

In dieser Gleichung $z + u$ für z gesetzt, erhält man:

$$\varphi(x + y + z + u) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z + u)$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \varphi(u) .$$

Wie man so weiter gehen kann, ist klar. Man hat also für jede beliebige Anzahl der veränderlichen Größen x, y, z, u, ... die Gleichung

$$\varphi(x + y + z + u + \ldots) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \varphi(u) + \ldots .$$

Setzt man nun alle veränderliche Größen einander gleich, nämlich alle $= x$, und bezeichnet ihre Anzahl durch n, wo also

n seiner Natur nach eine positive ganze Zahl ist; so erhält man die für jedes ganze positive n und jedes beliebige x gültige Gleichung

$$\varphi(nx) = n\varphi(x) .$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so wird dieselbe

$$\varphi(0) = n\varphi(0) ,$$

Also

$$0 = n\varphi(0) - \varphi(0) = (n-1)\varphi(0) ,$$

eine für jedes positive ganze n gültige Gleichung. Folglich offenbar

$$\varphi(0) = 0 .$$

Setzt man ferner in der für jedes x und y gültigen Gleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$y = -x$, so wird dieselbe

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \varphi(0) = 0 ;$$

und es ist folglich für jedes x

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) .$$

Daher ist auch

$$\varphi(-nx) = -\varphi(nx) .$$

Nun ist aber für jedes ganze positive n

$$\varphi(nx) = n\varphi(x) .$$

Also ist für jedes ganze positive n

$$\varphi(-nx) = -n\varphi(x) ,$$

und es ist folglich für jedes ganze positive oder negative n

$$\varphi(nx) = n\varphi(x) .$$

Setzen wir nun $nx = y$, so ist $x = \frac{y}{n}$. Also ist für jedes ganze positive oder negative n

$$\varphi(y) = n\varphi\left(\frac{y}{n}\right) ,$$

oder

$$\varphi\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi(y) ,$$

und, wenn wir wieder x für y schreiben, für jedes ganze positive oder negative n

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi(x) .$$

Hieraus ergiebt sich nun ferner, wenn $\frac{n}{m}$ einen beliebigen positiven oder negativen rationalen Bruch bezeichnet, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind:

$$\varphi\left(\frac{n}{m}x\right) = \varphi\left(n\frac{x}{m}\right) = n\varphi\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}\varphi(x),$$

so daß also für jedes positive oder negative, ganze oder gebrochene n, und für jedes x stets

$$\varphi(nx) = n\varphi(x)$$

ist. Setzt man in dieser Gleichung $x = 1$, so erhält man die für jedes n geltende Gleichung

$$\varphi(n) = n\varphi(1),$$

in der man nun wieder, da n ganz beliebig ist, x für n setzen kann, wodurch man die für jedes x geltende Gleichung

$$\varphi(x) = x\varphi(1)$$

erhält. Da $\varphi(1)$ eine Constante ist, so ist also die gesuchte Function jederzeit von der Form

$$\varphi(x) = ax.$$

Man sieht also, daß nur die einzige Function $\varphi(x) = ax$ den Bedingungen unserer Aufgabe genügt. Daß die Constante a ganz willkührlich ist, ist klar, da für jedes a und jedes x und y immer

$$a(x + y) = ax + ay,$$

d. i.

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist. Aber auch keine andere Function, wie die Function $\varphi(x) = ax$, genügt, wie gesagt, der vorstehenden Gleichung. Daß die Function $\varphi(x) = ax$ zwischen jeden zwei reellen Gränzen von x stetig ist, ist klar.

11. Eine andere hierher gehörende Aufgabe, die sich mittelst der vorhergehenden leicht auflösen läßt, ist folgende:

Man soll die Function $\varphi(x)$ so bestimmen, daß dieselbe zwischen jeden zwei reellen Gränzen von x stetig ist, und daß für alle reelle Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(x+y) = \varphi(x).\varphi(y)$$

genügt wird.

Aus der gegebenen Bedingungsgleichung folgt auf der Stelle, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen in Bezug auf ein willkührliches System nimmt:

$$\log\varphi(x+y) = \log\varphi(x) + \log\varphi(y).$$

Setzen wir nun

$$\log\varphi(x) = \psi(x),$$

so ist natürlich

$$\log\varphi(y) = \psi(y),\ \log\varphi(x+y) = \psi(x+y),$$

und die Function $\psi(x)$ ist also von der Art, daß immer

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$$

ist. Daher ist nach (10.)

$$\psi(x) = x\psi(1) .$$

Aber $\psi(x) = \log\varphi(x)$. Also

$$\psi(1) = \log\varphi(1) ,$$

und folglich für jedes x

$$\log\varphi(x) = x\log\varphi(1) .$$

Aber

$$x\log\varphi(1) = \log\{\varphi(1)\}^x .$$

Folglich

$$\log\varphi(x) = \log\{\varphi(1)\}^x ,$$

und daher

$$\varphi(x) = \{\varphi(1)\}^x ,$$

so daß also, da $\varphi(1)$ eine Constante ist, die Function $\varphi(x)$ jederzeit von der Form

$$\varphi(x) = a^x$$

ist, wenn durch dieselbe der Gleichung

$$\varphi(x+y) = \varphi(x).\varphi(y)$$

im Allgemeinen genügt werden soll. a ist eine ganze willkührliche Constante, da für jedes a bekanntlich

$$a^{x+y} = a^x . a^y$$

ist. Auch ist a^x offenbar zwischen jeden zwei reellen Gränzen von x eine stetige Function. Es giebt folglich auch in diesem Falle nur die einzige Form a^x der Function $\varphi(x)$, welche den Bedingungen der vorgelegten Aufgabe genügt. Man könnte diese Aufgabe auch unabhängig von der in (10.) aufgelösten Aufgabe, aber auf eine ähnliche Art, wie jene, auflösen.

12. Aus dem vorhergehenden Satze kann man auch einen, wie es uns scheint, sehr strengen Beweis der bekannten Entwickelung von e^x, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, in eine Reihe herleiten. In dem Artikel Convergenz der Reihen (22.) i. d. Z. ist aus einem allgemeinern Satze hergeleitet worden, daß die Reihe

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1...4}, \frac{x^5}{1...5}, \ldots .$$

für jedes reelle positive und negative x convergirt, und daher für jedes x eine Summe hat, welche wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, da dieselbe offenbar eine Function von x seyn muß. Ganz eben so convergirt auch die Reihe

$$1, \frac{y}{1}, \frac{y^2}{1.2}, \frac{y^3}{1.2.3}, \frac{y^4}{1..4}, \frac{y^5}{1...5}, \ldots .$$

für jedes reelle positive und negative y, und hat die Summe $\varphi(y)$. Daher ist nach dem in dem angeführten Artikel (20.) bewiesenen allgemeinen Satze auch die Reihe

$$1,$$
$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1},$$
$$\frac{x^2}{1.2} + \frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2},$$
$$\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.}\cdot\frac{y}{1} + \frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3},$$
$$\frac{x^4}{1\ldots4} + \frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{y}{1} + \frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{x}{1}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1\ldots},$$

u. s. w. u. s. w.

stets convergent, und $\varphi(x).\varphi(y)$ ist nach dem in Rede stehenden Satze die Summe dieser Reihe, deren Glieder sich auch leicht unter folgender Form darstellen lassen:

$$1,$$
$$\frac{1}{1}(x + y),$$
$$\frac{1}{1.2}(x^2 + 2xy + y^2),$$
$$\frac{1}{1.2.3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3),$$
$$\frac{1}{1\ldots4}(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

u. s. w. u. s. w.

Nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten bringt man diese Reihe aber ferner sehr leicht auf die Form

$$1, \frac{x+y}{1}, \frac{(x+y)^2}{1.2}, \frac{(x+y)^3}{1.2.3}, \frac{(x+y)^4}{1\ldots4}, \frac{(x+y)^5}{1\ldots5}, \ldots,$$

welches also auch eine stets convergirende Reihe ist, deren Summe, übereinstimmend mit dem Obigen, durch $\varphi(x+y)$ bezeichnet werden muß. Diese Summe war aber nach dem Vorhergehenden $\varphi(x).\varphi(y)$. Also ist für jedes reelle x und y

$$\varphi(x).\varphi(y) = \varphi(x+y),$$

und folglich nach (11.)

$$\varphi(x) = \{\varphi(1)\}^x.$$

Aber

$$\varphi(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1\ldots4} + \frac{1}{1\ldots5} + \ldots$$

Bezeichnen wir also der Kürze wegen die Summe der convergirenden Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch e, wo e eine bekannte Größe ist, deren Werth sich mittelst der obigen convergirenden Reihe stets mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnen läßt; so ist für jedes reelle x

$$\varphi(x) = e^x,$$

d. i.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \ldots\ldots$$

Die Logarithmen, deren Basis die bekannte Zahl e ist, nennt man natürliche oder hyperbolische Logarithmen. Bezeichnen wir diese Logarithmen durch l, so ist

$$a = e^{la},\ a^x = e^{xla},$$

und folglich

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \frac{(xla)^4}{1\ldots4} + \ldots.$$

Wir halten diesen Beweis für völlig streng und elementar, und würden rathen, ihn in die Elemente der sogenannten Analysis endlicher Größen aufzunehmen, vorausgesetzt, daß man, wie jetzt nicht mehr unterlassen werden darf, die Lehre von den sogenannten unendlichen Reihen in diesem Theile der Analysis mit der Lehre von der Convergenz der Reihen beginnt. Uebrigens läßt sich die Convergenz der Reihe

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1\ldots4}, \frac{x^5}{1\ldots5}, \ldots\ldots$$

auch leicht unabhängig von dem allgemeinen Satze (21.) in dem Artikel Convergenz der Reihen durch eine sehr einfache Vergleichung mit der geometrischen Reihe in dem Falle, wo letztere convergirt, beweisen.

13. Die Function $\varphi(x)$ so zu bestimmen, daß dieselbe zwischen jeden zwei positiven Gränzen von x stetig ist, und daß für alle positiven Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

genügt wird.

Da x und y positiv sind; so hat man, wenn die Logarithmen dieser Größen in Bezug auf die Basis b durch log x und log y bezeichnet werden:

$$x = b^{\log x},\ y = b^{\log y}.$$

Also nach der Bedingung der Aufgabe

$$\varphi(b^{\log x + \log y}) = \varphi(b^{\log x}) + \varphi(b^{\log y}).$$

Da nun log x und log y alle reellen positiven und negativen Werthe haben können; so hat man für jedes reelle x und y offenbar

$$\varphi(b^{x+y}) = \varphi(b^x) + \varphi(b^y),$$

oder, wenn wir

$$\varphi(b^x) = \psi(x)$$

setzen:

$$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y),$$

für jedes reelle x und y. Also ist nach (10.)

$$\psi(x) = x\psi(1),$$

d. i.

$$\varphi(b^x) = x\varphi(b),$$

oder, wenn wir $\log x$ statt x setzen, welches offenbar verstattet ist, da $\log x$ jeden reellen Werth haben kann:

$$\varphi(b^{\log x}) = \varphi(b).\log x,$$

d. i.

$$\varphi(x) = \varphi(b).\log x,$$

oder $\varphi(x) = a\log x$, wo, wie man sich leicht überzeugt, a eine willkührliche Constante ist.

14. Die Function $\varphi(x)$ so zu bestimmen, daß dieselbe zwischen jeden zwei positiven Gränzen von x stetig ist, und daß für jedes positive x und y der Gleichung

$$\varphi(xy) = \varphi(x).\varphi(y)$$

genügt wird.

Man setze wieder, wie bei der vorigen Aufgabe

$$x = b^{\log x},\ y = b^{\log y};$$

so erhält man die Bedingungsgleichung

$$\varphi(b^{\log x + \log y}) = \varphi(b^{\log x}).\varphi(b^{\log y}),$$

oder, da $\log x$ und $\log y$ alle reellen Werthe haben können,

$$\varphi(b^{x+y}) = \varphi(b^x).\varphi(b^y),$$

für jedes reelle x und y. Also, wenn wir

$$\varphi(b^x) = \psi(x)$$

setzen, für jedes reelle x und y:

$$\psi(x+y) = \psi(x).\psi(y).$$

Folglich nach (11.)

$$\psi(x) = \{\psi(1)\}^x;$$

d. i.

$$\varphi(b^x) = \{\varphi(b)\}^x,$$

und, wenn wir $\log x$ für x setzen

$$\varphi(b^{\log x}) = \{\varphi(b)\}^{\log x},$$

oder

$$\varphi(x) = \{\varphi(b)\}^{\log x}.$$

Es ist aber allgemein

$$a^{\log x} = x^{\log a},$$

weil

$$\log(a^{\log x}) = \log x.\log a,\ \log(x^{\log a}) = \log a.\log x;$$

also

$$\log(a^{\log x}) = \log(x^{\log a})$$

ist. Folglich ist auch

$$\{\varphi(b)\}^{\log x} = x^{\log \varphi(b)},$$

und daher nach dem Obigen

$$\varphi(x) = x^{\log \varphi(b)},$$

d. i. $\varphi(x) = x^a$, wo man sich wieder leicht überzeugt, daß a eine ganz willkührliche Constante ist.

15. Die Function $\varphi(x)$ so zu bestimmen, daß sie zwischen jeden zwei reellen Gränzen von x stetig ist, und für alle reelle Werthe von x und y der Gleichung

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x).\varphi(y)$$

genügt wird.

Für $x = y = 0$ erhält man aus dieser Gleichung auf der Stelle

$$2\varphi(0) = 2\varphi(0).\varphi(0),\ \varphi(0) = \{\varphi(0)\}^2.$$

Also

$$\varphi(0) = 1.$$

Setzt man in der allgemeinen Bedingungsgleichung bloß $x = 0$, so erhält man

$$\varphi(y) + \varphi(-y) = 2\varphi(0).\varphi(y).$$

Aber $\varphi(0) = 1$. Also

$$\varphi(y) + \varphi(-y) = 2\varphi(y),\ \varphi(-y) = \varphi(y),$$

oder für jedes x

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Weil nach dem Obigen $\varphi(0) = 1$ ist und die Function $\varphi(x)$ zwischen jeden zwei reellen Gränzen von x als stetig angenommen wird; so wird man offenbar immer den Werth α von x so nahe bei Null annehmen können, daß $\varphi(x)$ zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = \alpha$ stets positiv bleibt. Dies vorausgesetzt wird nun aber $\varphi(\alpha)$ entweder zwischen den Gränzen 0 und 1 enthalten, oder größer als die Einheit seyn.

Im ersten Falle kann man sich offenbar $\varphi(\alpha)$ durch einen Cosinus eines gewissen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen Bogens Θ dargestellt denken, und kann folglich

$$\varphi(\alpha) = \cos\Theta$$

setzen. Setzt man nun in der zu erfüllenden Bedingungsgleichung

$$\varphi(x+y) = 2\varphi(x).\varphi(y) - \varphi(x-y)$$

nach und nach

$$x = \alpha,\ y = \alpha;$$
$$x = 2\alpha,\ y = \alpha;$$
$$x = 3\alpha,\ y = \alpha;$$
u. s. w. u. s. w.

so erhält man:

$$\varphi(2\alpha) = 2\varphi(\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(0),$$
$$\varphi(3\alpha) = 2\varphi(2\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha),$$
$$\varphi(4\alpha) = 2\varphi(3\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(2\alpha),$$
$$\varphi(5\alpha) = 2\varphi(4\alpha).\varphi(\alpha) - \varphi(3\alpha),$$
u. s. w. u. s. w.

d. i. nach dem Obigen und nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$\varphi(2\alpha) = 2\cos\Theta\cos\Theta - 1 = \cos 2\Theta,$$
$$\varphi(3\alpha) = 2\cos 2\Theta\cos\Theta - \cos\Theta = \cos 3\Theta,$$
$$\varphi(4\alpha) = 2\cos 3\Theta\cos\Theta - \cos 2\Theta = \cos 4\Theta,$$
$$\varphi(5\alpha) = 2\cos 4\Theta\cos\Theta - \cos 3\Theta = \cos 5\Theta,$$
u. s. w. u. s. w.

so daß also für jedes positive ganze n

$$\varphi(n\alpha) = \cos n\Theta$$

ist.

Giebt man ferner der Bedingungsgleichung die Form

$$\varphi(x).\varphi(y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2},$$

und setzt zuerst

$$x = y = \tfrac{1}{2}\alpha;$$

so erhält man

$$\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos\Theta}{2} = \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2.$$

Also, weil nach dem Obigen $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\cos\frac{1}{2}\Theta$ positiv sind:

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}\Theta.$$

Setzt man ferner

$$x = y = \tfrac{1}{3}\alpha;$$

so erhält man

$$\{\varphi(\tfrac{1}{3}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{3}\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos\frac{1}{3}\Theta}{2} = \cos\tfrac{1}{3}\Theta^2.$$

Also, weil nach dem Obigen $\varphi(\frac{1}{3}\alpha)$ und $\cos\frac{1}{3}\Theta$ positiv sind:

$$\varphi(\tfrac{1}{3}\alpha) = \cos\tfrac{1}{3}\Theta.$$

Setzt man ferner

$$x = y = \tfrac{1}{5}\alpha;$$

so wird

$$\{\varphi(\tfrac{1}{5}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{5}\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos\frac{1}{5}\Theta}{2} = \cos\tfrac{1}{5}\Theta^2.$$

Folglich wie vorher

$$\varphi(\tfrac{1}{5}\alpha) = \cos\tfrac{1}{5}\Theta.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Es ist folglich allgemein für jedes positive ganze k:

$$\varphi\left(\frac{1}{2^k}\right) = \cos\frac{1}{2^k}\Theta\,,$$

und folglich nach dem Obigen für jedes positive ganze n und k:

$$\varphi\left(\frac{n}{2^k}\alpha\right) = \cos\frac{n}{2^k}\Theta\,.$$

Ist nun μ eine beliebige positive Größe, so kann man die positiven ganzen Zahlen n, k immer sich so verändern lassen, daß der Bruch $\frac{n}{2^k}$ der Größe μ sich immer mehr und mehr nähert, und zugleich läßt sich zeigen, daß dieser Bruch der Größe μ beliebig nahe gebracht werden kann. Bezeichnet nämlich ν eine gegebene aber beliebig kleine positive Größe; so bestimme man, welches offenbar immer möglich ist, die positive ganze Zahl k so, daß

$$2^k > \frac{1}{\nu}$$

ist. Ist dann g die positive ganze Zahl, welche zunächst kleiner als $2^k.(\mu-\nu)$ oder, wenn $2^k.(\mu-\nu)$ eine ganze Zahl seyn sollte, diese ganze Zahl selbst ist, wobei man zu bemerken hat, daß es offenbar immer verstattet ist, ν kleiner als μ anzunehmen; so setze man $n = g + 1$, und es wird dann immer

$$\mu - \frac{n}{2^k} < \nu$$

seyn, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Da nämlich g die positive ganze Zahl ist, welche zunächst kleiner als $2^k.(\mu-\nu)$ oder, wenn $2^k.(\mu-\nu)$ eine ganze Zahl seyn sollte, diese ganze Zahl selbst ist; so ist

$$g \leqq 2^k.(\mu-\nu),\quad g+1 > 2^k.(\mu-\nu)\,.$$

Aber $n = g + 1$. Also

$$n - 1 \leqq 2^k.(\mu-\nu),\quad n > 2^k.(\mu-\nu)\,.$$

Nun ist aber auch $1 < 2^k.\nu$. Also

$$(n-1) + 1 < 2^k.(\mu-\nu) + 2^k.\nu\,,$$

d. i.

$$n < 2^k.\mu,\quad \frac{n}{2^k} < \mu\,.$$

Aber

$$n > 2^k.\mu - 2^k.\nu,\quad n + 2^k.\nu > 2^k.\mu\,,$$

oder

$$\frac{n}{2^k} + \nu > \mu\,,$$

und folglich, weil $\frac{n}{2^k} < \mu$ ist:

$$\mu - \frac{n}{2^k} < \nu\,.$$

wie behauptet wurde. Man sieht also, daß man n und k sich immer so verändern lassen kann, daß $\frac{n}{2^k}$ sich der beliebigen positiven Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert. Läßt man sich nun in der oben bewiesenen Gleichung

$$\varphi\left(\frac{n}{2^k}\alpha\right) = \cos\frac{n}{2^k}\Theta$$

die positiven ganzen Zahlen n und k auf diese Weise ändern und geht dann zu den Gränzen über; so ist klar, daß für jedes beliebige positive μ immer

$$\varphi(\mu\alpha) = \cos\mu\Theta$$

ist. Nach dem Obigen ist aber

$$\varphi(-\mu\alpha) = \varphi(\mu\alpha),$$

und bekanntlich ist auch

$$\cos(-\mu\Theta) = \cos\mu\Theta.$$

Also ist auch

$$\varphi(-\mu\alpha) = \cos(-\mu\Theta),$$

so daß folglich für jedes beliebige positive oder negative μ immer

$$\varphi(\mu\alpha) = \cos\mu\Theta$$

ist. Weil nun offenbar x für μ zu setzen verstattet ist; so ist für jedes x

$$\varphi(\alpha x) = \cos\Theta x,$$

oder, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ für x setzt, für jedes x:

$$\varphi(x) = \cos\left(\frac{\Theta}{\alpha}x\right) = \cos\left(-\frac{\Theta}{\alpha}x\right).$$

Soll also die Function $\varphi(x)$ zwischen jeden zwei beliebigen reellen Gränzen stetig seyn und der Gleichung

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x).\varphi(y)$$

genügen, und soll zugleich die positive Größe $\varphi(\alpha)$ zwischen den Gränzen 0 und 1 enthalten seyn; so ist

$$\varphi(x) = \cos ax,$$

wo a eine Constante, und zwar, wie leicht erhellet, eine willkührliche Constante bezeichnet.

Soll nun aber die positive Größe $\varphi(\alpha)$ größer als die Einheit seyn; so kann man, wenn r eine positive Größe bezeichnet,

$$\varphi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$$

setzen, indem dieser Gleichung offenbar durch den reellen Werth

$$r = \varphi(\alpha) + \sqrt{\{\varphi(\alpha)\}^2 - 1},$$

wo man die Quadratwurzel positiv zu nehmen hat, genügt wird.

Man findet diesen Werth von r leicht durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$2r\varphi(\alpha) = r^2 + 1 .$$

Setzt man nun in der zum Grunde gelegten Bedingungsgleichung nach und nach

$$x = \alpha,\ y = \alpha ;$$
$$x = 2\alpha,\ y = \alpha ;$$
$$x = 3\alpha,\ y = \alpha ;$$
u. s. w. u. s. w.

so erhält man, weil $\varphi(0) = 1$ ist:

$$\varphi(2\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 1 = \tfrac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\varphi(3\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right),$$

$$\varphi(4\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right),$$

$$\varphi(5\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^5 + \frac{1}{r^5}\right),$$

u. s. w. u. s. w.

und es ist also für jedes positive ganze n:

$$\varphi(n\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right) = \tfrac{1}{2}(r^n + r^{-n}) .$$

Setzt man ferner auf ähnliche Art wie oben nach und nach

$$x = y = \tfrac{1}{2}\alpha ,$$
$$x = y = \tfrac{1}{4}\alpha ,$$
$$x = y = \tfrac{1}{8}\alpha ,$$
u. s. w. u. s. w.

so erhält man

$$\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2} = \frac{1 + \tfrac{1}{2}(r + r^{-1})}{2} = \tfrac{1}{4}(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}})^2,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}) ;$$

$$\{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1 + (r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}})}{2} = \tfrac{1}{4}(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}})^2,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\varphi) = \tfrac{1}{2}(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}})^2 ;$$

$$\{\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha)\}^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{4}\alpha)}{2} = \frac{1 + \tfrac{1}{2}(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}})}{2} = \tfrac{1}{4}(r^{\frac{1}{8}} + r^{-\frac{1}{8}})^2,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\frac{1}{8}} + r^{-\frac{1}{8}}) ;$$
u. s. w. u. s. w.

Also ist für jedes positive k:

$$\varphi\left(\frac{1}{2^k}\alpha\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2^k}} + r^{-\frac{1}{2^k}}\right),$$

und daher nach dem Vorhergehenden für jedes positive ganze n und k:

$$\varphi\left(\frac{n}{2^k}\alpha\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{n}{2^k}} + r^{-\frac{n}{2^k}}\right).$$

Läßt man nun wieder $\frac{n}{2^k}$ sich der positiven Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, und geht dann zu den Gränzen über; so erhält man

$$\varphi(\mu\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\mu} + r^{-\mu}),$$

für jedes positive μ. Es ist aber

$$\varphi(-\mu\alpha) = \varphi(\mu\alpha),$$

und

$$\tfrac{1}{2}(r^{-\mu} + r^{\mu}) = \tfrac{1}{2}(r^{\mu} + r^{-\mu}).$$

Also ist offenbar für jedes beliebige positive und negative μ

$$\varphi(\mu\alpha) = \tfrac{1}{2}(r^{\mu} + r^{-\mu}),$$

oder, wenn man x für μ setzt:

$$\varphi(\alpha x) = \tfrac{1}{2}(r^{x} + r^{-x}),$$

und, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ für x setzt:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\{r^{\frac{x}{\alpha}} + r^{-\frac{x}{\alpha}}\},$$

oder, für $r^{\frac{+1}{\alpha}} = A$:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\{A^{x} + A^{-x}\}.$$

Von dieser Form ist also die den Bedingungen der Aufgabe genügende Function $\varphi(x)$, wenn die positive Größe $\varphi(\alpha)$ größer als die Einheit ist. A ist eine willkührliche Constante, jedoch, wie leicht aus dem Obigen erhellet, immer positiv.

Diese, so wie alle obigen höchst instructiven Aufgaben haben wir aus **Cauchy cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. T. I. Paris. 1821. p. 103—122** entlehnt. Von imaginären Functionen, die gewissen Bedingungen entsprechen, handelt Cauchy p. 261—273.

16. Aus der vorigen Aufgabe kann man auch einen sehr strengen und allgemeinen Beweis der bekannten Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ herleiten. Aus dem im Artikel Convergenz der Reihen (21.) bewiesenen Lehrsatze folgt leicht, daß die Reihe

$$1, -\frac{x^2}{1.2}, \frac{x^4}{1...4}, -\frac{x^6}{1...6}, \ldots$$

für jedes x convergirt, und convergent bleibt, wenn man jedes Glied auf seinen numerischen Werth reducirt. Folglich hat die Reihe

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots.$$

für jedes x eine Summe, welche wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen, und also

$$\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots.,$$

so wie auf ganz gleiche Art

$$\varphi(y) = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1\ldots4} - \frac{y^6}{1\ldots6} + \ldots.$$

setzen wollen. Beide Reihen sind für jedes x und y convergent und bleiben convergent, wenn man für jedes Glied seinen numerischen Werth setzt. Also ist nach dem a. a. O. (20.) bewiesenen Satze auch die Reihe

$$\begin{aligned}
&1\\
&- \frac{1}{1.2}(x^2 + y^2)\\
&+ \frac{1}{1\ldots4}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)\\
&- \frac{1}{1\ldots6}(x^6 + 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + y^6)\\
&+ \frac{1}{1\ldots8}(x^8 + 28x^6y^2 + 70x^4y^4 + 28x^2y^6 + y^8)\\
&\quad \text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

convergent, und die Summe derselben ist $= \varphi(x).\varphi(y)$.

Ferner ist

$$\varphi(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^4}{1\ldots4} - \frac{(x+y)^6}{1\ldots6} + \ldots.,$$

$$\varphi(x-y) = 1 - \frac{(x-y)^2}{1.2} + \frac{(x-y)^4}{1\ldots4} - \frac{(x-y)^6}{1\ldots6} + \ldots.$$

Also nach dem Artikel Convergenz der Reihen (19.)

$$\tfrac{1}{2}\{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)\} =$$

$$\begin{aligned}
&1\\
&- \frac{1}{1.2}(x^2 + y^2)\\
&+ \frac{1}{1\ldots4}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)\\
&- \frac{1}{1\ldots6}(x^6 + 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + y^6)\\
&+ \frac{1}{1\ldots8}(x^8 + 28x^6y^2 + 70x^4y^4 + 28x^2y^6 + y^8)\\
&\quad \text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Folglich

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x).\varphi(y).$$

Man findet sehr leicht

$$\varphi(0) = 1,\ \varphi(-x) = \varphi(x).$$

Für Werthe von x sehr nahe bei Null ist also $\varphi(x)$ positiv. Bezeichnet nun α, das man offenbar als positiv betrachten kann, einen solchen Werth von x; so läßt sich offenbar $\alpha < 1$ setzen. Da nun

$$\varphi(\alpha) = 1 - \left\{\frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^4}{1..4}\right\} - \left\{\frac{\alpha^6}{1..6} - \frac{\alpha^8}{1..8}\right\} - \cdots$$

ist; so ist offenbar $\varphi(\alpha)$ zwischen 0 und 1 enthalten, und folglich nach (15.) $\varphi(x) = \cos ax$, d. i.

$$\cos ax = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1..6} + \cdots,$$

wo a eine constante Größe bezeichnet, für jedes x.

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt für jedes x und bleibt convergent, wenn man für jedes Glied seinen numerischen Werth setzt. Also ist nach dem Artikel Convergenz der Reihen (20.) auch

$$\begin{aligned}
&1\\
&- x^2\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2}\right\}\\
&+ x^4\left\{\frac{1}{1..4} + \frac{1}{1.2.1.2} + \frac{1}{1..4}\right\}\\
&- x^6\left\{\frac{1}{1..6} + \frac{1}{1..4.1.2} + \frac{1}{1.2.1..4} + \frac{1}{1..6}\right\}\\
&+ x^8\left\{\frac{1}{1..8} + \frac{1}{1..6.1..2} + \frac{1}{1..4.1..4} + \frac{1}{1.2.1..6} + \frac{1}{1..8}\right\}\\
&- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

eine für jedes x convergirende Reihe, und

$$\cos ax \,.\, \cos ax = \cos ax^2$$

ist die Summe derselben.

Aus dem Artikel Convergenz der Reihen (21.) folgt nun ferner leicht, daß auch

$$x, -\frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^5}{1..5}, -\frac{x^7}{1..7}, \cdots$$

eine für jedes x convergirende Reihe ist, und convergent bleibt, wenn man für jedes Glied seinen numerischen Werth setzt. Diese Reihe hat also eine Summe, die wir durch $\psi(x)$ bezeichnen, und folglich

$$\psi(x) = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \frac{x^7}{1..7} + \frac{x^9}{1..9} - \cdots$$

setzen wollen. Nach dem Artikel Convergenz der Reihen (20.) ist auch

$$x^2$$

$$- x^4\left\{\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3}\right\}$$

$$+ x^6\left\{\frac{1}{1..5} + \frac{1}{1.2.3.1.2.3} + \frac{1}{1..5}\right\}$$

$$- x^8\left\{\frac{1}{1..7} + \frac{1}{1..5.1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.1..5} + \frac{1}{1..7}\right\}$$

$$+ x^{10}\left\{\frac{1}{1..9} + \frac{1}{1..7.1.2.3} + \frac{1}{1..5.1..5} + \frac{1}{1.2.3.1..7} + \frac{1}{1..9}\right\}$$

u. s. w. u. s. w.

eine convergente Reihe, und

$$\psi(x).\psi(x) = \{\psi(x)\}^2$$

ist die Summe dieser Reihe.

Nach dem mehrmals angeführten Artikel (19.) ist nun auch

$$1$$

$$- x^2\left\{\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2}\right\}$$

$$+ x^4\left\{\frac{1}{1..4} - \frac{1}{1..3.1} + \frac{1}{1.2.1.2} - \frac{1}{1.1..3} + \frac{1}{1..4}\right\}$$

$$- x^6\left\{\frac{1}{1..6} - \frac{1}{1..5.1} + \frac{1}{1.4.1.2} - \frac{1}{1..3.1..3} + \frac{1}{1.2.1..4} - \frac{1}{1.1..5} + \frac{1}{1..6}\right\}$$

$$+ x^8\left\{\frac{1}{1..8} - \frac{1}{1..7.1} + \frac{1}{1..6.1.2} - \ldots + \frac{1}{1.2.1..6} - \frac{1}{1.1..7} + \frac{1}{1..8}\right\}$$

u. s. w. u. s. w.

eine für jedes x convergirende Reihe, und

$$\cos ax^2 + \{\psi(x)\}^2$$

ist die Summe dieser Reihe. Nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist aber für jedes n

$$(1-1)^{2n} = 0 =$$

$$1 - \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{2n(2n-1)}{1.2} - \frac{2n}{1} + 1,$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $1.2.3 \ldots 2n$ dividirt:

$$0 = \frac{1}{1\ldots 2n} - \frac{1}{1..(2n-1).1} + \frac{1}{1..(2n-2).1.2} - \frac{1}{..(2n-3).1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.1..(2n-2)} - \frac{1}{1.1..(2n-1)} + \frac{1}{1..2n}.$$

Folglich sind, das erste ausgenommen, alle Glieder der obigen Reihe $= 0$, und die Summe derselben ist also offenbar ihrem ersten Gliede gleich, d. i. $= 1$, so daß also

$$\cos ax^2 + \{\psi(x)\}^2 = 1,$$

und folglich

$$\sqrt{1-\cos ax^2} = \pm\psi(x),$$

d. i.

$$\sin ax = \pm x \mp \frac{x^3}{1.2.3} \pm \frac{x^5}{1..5} \mp \frac{x^7}{1..7} + \ldots.$$

ist. Es ist also auch

$$\frac{\sin ax}{x} = \pm 1 \mp \frac{x^2}{1.2.3} \pm \frac{x^4}{1..5} \mp \frac{x^6}{1..7} \pm \ldots.$$

Die für jedes x convergirende Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nähert sich aber, wenn x sich der Null nähert, immer mehr und mehr der Gränze ± 1, und kann dieser Gränze offenbar beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, welches man auch auf folgende Art beweisen kann. Die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3}, -\frac{x^2}{1..5}, +\frac{x^4}{1..7}, -\frac{x^6}{1..9}, \ldots$$

convergirt für jedes x (Convergenz der Reihen. 21.) und hat also eine gewisse endliche bestimmte Summe, die wir durch $f(x)$ bezeichnen wollen, so daß also

$$\frac{\sin ax}{x} = \pm 1 \mp x^2 f(x)$$

ist. Eben so convergirt auch die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3}, \frac{x^2}{1..5}, \frac{x^4}{1..7}, \frac{x^6}{1..9}, \ldots.$$

und hat eine gewisse endliche bestimmte Summe, die wir durch $F(x)$ bezeichnen wollen. Nimmt nun x ab, so nimmt offenbar auch $F(x)$ ab, und $x^2 F(x)$ nähert sich der Null, kann auch offenbar der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x klein genug annimmt. Der absolute Werth von $x^2 f(x)$ ist aber offenbar nie größer als $x^2 F(x)$, so daß also auch $x^2 f(x)$ der Null beliebig nahe gebracht, oder $\pm 1 \mp x^2 f(x)$ die Gränze ± 1 bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden kann, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, welches bewiesen werden sollte. Also nähert sich auch $\frac{\sin ax}{x}$, wenn x sich der Null nähert, immer mehr und mehr der Gränze ± 1, und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt. Der Bruch $\frac{\sin ax}{ax}$ nähert sich aber, wenn x sich der Null nähert, immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, welches sich, wie man im Artikel Differentialrechnung (10.) i. d. Z. nachsehen kann, leicht ganz elementarisch in völliger Strenge beweisen läßt. Also nähert sich, wenn x sich der Null nähert, $\frac{\sin ax}{ax} a$ der Gränze $1.a = a$, und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht wer-

den, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt. Weil nun

$$\frac{\sin ax}{ax} a = \frac{\sin ax}{x}$$

ist, und der letztere Bruch, wie vorher gezeigt worden ist, sich immer mehr und mehr der Gränze ± 1 nähert, wenn x sich der Null nähert, auch dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt; so ist $a = \pm 1$, und folglich nach dem Obigen

$$\sin(\pm x) = \pm x \mp \frac{x^3}{1.2.3} \pm \frac{x^5}{1..5} \mp \frac{x^7}{1..7} \pm \ldots.$$

$$\cos(\pm x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1..6} + \ldots.$$

Weil nun bekanntlich immer

$$\sin(\pm x) = \pm \sin x, \quad \cos(\pm x) = \cos x$$

ist; so folgt hieraus auf der Stelle, daß für jedes x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \frac{x^7}{1..7} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1..6} + \ldots.$$

ist.

Wir halten den obigen Beweis dieser beiden überaus wichtigen Reihen, auf die wir in diesem Wörterbuche nun schon öfters zurückgekommen sind, für völlig streng und zugleich auch für ganz elementar, weshalb wir demselben wohl die Aufnahme in die Elemente der analytischen Trigonometrie wünschen möchten, da uns in der That kein anderer Beweis so viele Strenge mit so vieler Einfachheit zu vereinigen scheint. Der zweite Theil stimmt mit dem in unsern mathematischen Abhandlungen (Altona. 1822. S. 17.) für die Reihe für den Cosinus gegebenen Beweise überein. Auch hat der obige Beweis vor dem im Artikel Unmögliche Größe (40.) nach Cauchy geführten Beweise den höchst wesentlichen Vorzug, daß er nicht die Betrachtung der unmöglichen Größen erfordert, obgleich allerdings auch dieser Beweis sehr einfach und leicht zum Zweck führt. Der zweite Theil der Aufgabe in (15.) ist bei dem obigen Beweise der Reihen für $\sin x$ und $\cos x$, wie sich von selbst versteht, ganz entbehrlich.

17. Wir haben hier bloß einige einfache, aber, wie es uns scheint, auch zugleich sehr instructive Aufgaben über die Bestimmung der Form der Functionen aus gegebenen Bedingungen behandelt, und verweisen weiterer Ausführung wegen vorzüglich auf drei Abhandlungen von Babbage in den Philosophical Transactions. 1815. p. 389. 1816. p. 180. 1817. p. 197., so wie auf einen Aufsatz von J. F. W. Herschel ebendas. 1814. p. 458. Auch s. m. eine Abhandlung von Collins in den Mém. de

Petersb. 1831, zwei Abhandlungen von Abel in Crelles Journal I. S. 11. II. S. 386., und einen Aufsatz von Magnus ebendas. V. S. 365.; auch Lacroix Traité du calcul diff. et int. T. III. p. 223. 225., und den Artikel Periodische Functionen i. d. Z. In dem Obigen haben wir uns auch angelegen seyn lassen, die Anwendung solcher Untersuchungen auf die Entwickelung der Functionen in convergirende Reihen an einigen Beispielen (12. 16.) zu zeigen, und müssen nochmals bekennen, daß wir die obigen Beweise der Entwickelungen von e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$ für sehr streng und elementar halten.

III. Ueber die Werthe der Functionen, welche sich unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen, und einige andere ähnliche Untersuchungen.

18. Sey $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, und für den bestimmten Werth x' von x werde $y = \frac{0}{0}$, d. i. $f(x') = 0$, $\varphi(x') = 0$. Läßt man x sich um Δx verändern, so gehen $f(x)$ und $\varphi(x)$ respective in

$$f(x) + \Delta f(x) \text{ und } \varphi(x) + \Delta\varphi(x)$$

über, und die Function y ist offenbar die Gränze, welcher sich

$$\frac{f(x) + \Delta f(x)}{\varphi(x) + \Delta\varphi(x)}$$

nähert, wenn Δx sich der Null nähert. Da nun aber $f(x') = 0$, $\varphi(x') = 0$ ist, so ist für den speciellen Werth $x = x'$ der entsprechende Werth der Function y offenbar die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, in dieser Gränze, die im Allgemeinen eine Function von x ist, ebenfalls $x = x'$ gesetzt. Da aber

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = \frac{\Delta f(x) : \Delta x}{\Delta\varphi(x) : \Delta x}$$

ist; so ist der Werth von y für $x = x'$ auch die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x) : \Delta x}{\Delta\varphi(x) : \Delta x}$$

sich nähert, indem Δx sich der Null nähert, wenn man in dieser Gränze $x = x'$ setzt. Die Gränzen, welchen sich

$$\Delta f(x) : \Delta x = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta\varphi(x) : \Delta x = \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

nähern, wenn Δx sich der Null nähert, sind aber bekanntlich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x).$$

Also ist die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x) : \Delta x}{\Delta \varphi(x) : \Delta x}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, $= \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, und folglich nach dem Obigen, wenn wir $y = F(x)$ setzen,

$$F(x') = \frac{f'(x')}{\varphi'(x')}.$$

Wäre auch $f'(x') = 0$, $\varphi'(x') = 0$, so wäre ganz eben so

$$\frac{f'(x')}{\varphi'(x')} = \frac{f''(x')}{\varphi''(x')},$$

wenn wir uns immer der von Lagrange gebrauchten Bezeichnung der Differentialquotienten bedienen. Also in dem obigen Falle

$$F(x') = \frac{f''(x')}{\varphi''(x')}.$$

Wäre nun auch $f''(x') = 0$, $\varphi''(x') = 0$; so wäre wieder auf dieselbe Weise wie vorher

$$\frac{f''(x')}{\varphi''(x')} = \frac{f'''(x')}{\varphi'''(x')};$$

folglich in diesem Falle

$$F(x') = \frac{f'''(x')}{\varphi'''(x')}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Ist z. B.

$$y = \frac{lx}{x-1},$$

so ist $y = \frac{0}{0}$ für $x = 1$. Aber

$$\frac{\partial lx}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial(x-1)}{\partial x} = 1.$$

Also für $x = 1$

$$y = \frac{1}{x} = 1.$$

Ist $y = \frac{x-1}{x^n-1}$, so ist ebenfalls $y = \frac{0}{0}$ für $x = 1$. Aber

$$\frac{\partial(x-1)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial(x^n-1)}{\partial x} = nx^{n-1}.$$

Also für $x = 1$

$$y = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Für $y = \frac{\sin x}{x}$ ist für $x = 0$

$$y = \frac{\cos x}{1} = 1 .$$

Für $y = \frac{1(1+x)}{x}$ ist für $x = 0$

$$y = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1 .$$

Einige Fälle, in denen man mehr als ein Mal hinter einander differentiiren muß, s. m. Thl. II. S. 305. ff.

19. In dem Artikel Convergenz der Reihen (7.) i. d. Z. ist folgender Satz bewiesen worden:

I. Wenn die Function $f(x)$ für sehr große Werthe von x stets positiv bleibt, und das Verhältniß

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

sich fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Größe L nähert, wenn x wächst; so nähert die Größe

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}}$$

für wachsende x sich derselben Gränze.

Setzen wir nun, wenn a eine beliebige positive Größe bezeichnet,

$$f(x) = a^{\varphi(x)},\ f(x+1) = a^{\varphi(x+1)} ;$$

so ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = a^{\varphi(x+1) - \varphi(x)}$$

stets positiv. Nähert nun für wachsende x die Differenz

$$\varphi(x+1) - \varphi(x)$$

sich der Gränze L; so nähert für wachsende x der Bruch

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \text{ sich der Gränze } a^L .$$

Nach I. nähert also auch

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} \text{ sich der Gränze } a^L$$

für wachsende x. Nun ist aber

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} = \{a^{\varphi(x)}\}^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{\varphi(x)}{x}} .$$

Also nähert für wachsende x auch

$$a^{\frac{\varphi(x)}{x}} \text{ sich der Gränze } a^L ,$$

woraus unmittelbar folgt, daß für wachsende x der Bruch $\frac{\varphi(x)}{x}$ sich der Gränze L nähert. Dies führt zu dem folgenden Lehrsatze:

II. Wenn für wachsende x die Differenz

$$\varphi(x+1) - \varphi(x)$$

sich der Gränze L nähert; so nähert für wachsende x der Bruch $\frac{\varphi(x)}{x}$ sich derselben Gränze.

20. Die beiden vorigen Lehrsätze werden oft mit Vortheil gebraucht, wenn es darauf ankommt, unbestimmt scheinende Werthe gewisser Functionen zu bestimmen, wie wir jetzt an einigen Beispielen zeigen wollen.

Man soll z. B. den Werth der Function $x^{\frac{1}{x}}$ für $x = \infty$ bestimmen. Zu dem Ende setze man $f(x) = x$; so ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Für wachsende x nähert sich dieser Bruch also der Gränze 1. Derselben Gränze nähert sich nach 19. I. die Function

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}$$

für wachsende x. Also ist

$$\infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 = 1.$$

Für $f(x) = \log x$ ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\log(x+1)}{\log x} = \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x}.$$

Für wachsende x nähert sich also dieser Bruch immer mehr und mehr der Gränze 1, und es ist folglich nach 19. I.

$$(\log\infty)^{\frac{1}{\infty}} = (\log\infty)^0 = 1.$$

Für $\varphi(x) = \log x$ ist

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \log(x+1) - \log x = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Für wachsende x nähert folglich diese Differenz sich der Gränze 0. Derselben Gränze nähert sich also $\frac{\varphi(x)}{x}$ für wachsende x nach 19. II. Also ist

$$\frac{\log\infty}{\infty} = 0.$$

Für $\varphi(x) = a^x$, wenn a eine Zahl bezeichnet, die größer als die Einheit ist, ist

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1).$$

Wächst nun x, so nähert sich diese Differenz offenbar der Gränze ∞. Derselben Gränze nähert sich nach 19. II. auch $\frac{\lg(x)}{x} = \frac{a^x}{x}$, wenn x wächst, und es ist also

$$\frac{a^\infty}{\infty} = \infty.$$

Hieraus folgt auch, daß, wenn $a > 1$ ist, die Potenz a^x immer endlich einmal schneller wachsen wird wie x.

Ueber die Entwickelung der Functionen in Reihen, die nach den Sinussen und Cosinussen der unabhängigen veränderlichen Größen der Functionen fortschreiten, findet man alles Nöthige in dem Art. Bestimmtes Integral (51. ff.) i. d. Z.

Fundamentalebene und Fundamentallinie s. Perspectiv (6.).

G.

Geometrie, descriptive, (Géométrie descriptive), beschreibende Geometrie, ist ein neuer Anbau der Geometrie, welcher seine Entstehung und seine vollständige Ausbildung ganz dem berühmten Monge und seinen Schülern verdankt. Sie hängt genau mit der Theorie der Projectionen zusammen und hat den Zweck, Gegenstände dreier Dimensionen auf einer Ebene so darzustellen, daß man aus der Zeichnung sogleich die gegenseitige Lage der einzelnen Theile und die wahren Dimensionen der dargestellten körperlichen Gegenstände genau erkennen kann, weshalb sie für die Kriegs- und bürgerliche Baukunst, für das Maschinenwesen, überhaupt für alle die Künste, bei denen Darstellungen körperlicher Gegenstände in genauen Zeichnungen auf einer Ebene häufig in Anwendung gebracht werden müssen, von der größten Wichtigkeit ist. Die sogenannten Bauriſſe, nämlich Grundrisse, Durchschnitte u. dergl. sind einfache der Praxis entnommene Beispiele solcher Zeichnungen, wie sie die descriptive Geometrie auszuführen lehrt, und können zugleich zu einer hier genügenden Andeutung dienen, daß man dieselben durchaus nicht mit der Perspectiv, der eigentlichen mathematischen Zeichnenkunst, verwechseln darf. Das eigentliche Wesen der descriptiven Geometrie kann, wie dies immer der Fall zu seyn pflegt, nur erst durch ihr Studium selbst gehörig erkannt werden. Sie besteht aus zwei Theilen: aus gewissen Elementar-Aufgaben, die bei allen Constructionen in Anwendung kommen, und aus deren Anwendung zur Ausführung zusammengesetzterer Constructionen, wie z. B. zu der bei der Lehre von den Gewölben in der Baukunst sehr nützlichen Construction der Durchschnitte krummer Flächen. Mit den erwähnten Elementar-Aufgaben haben wir es in diesem Artikel, welcher nur kurz seyn kann, vorzüglich zu thun, und diese Aufgaben sind

auch in der That hinreichend, um die Methode, durch welche die descriptive Geometrie ihre Zwecke zu erreichen sucht, im Allgemeinen kennen zu lehren. Bevor wir aber zu der Auflösung der in Rede stehenden Elementar-Aufgaben übergehen, wollen wir einige andere Probleme vorausschicken, weil uns dieselben zu einer vorläufigen Einführung in unsere Wissenschaft sehr geeignet scheinen, wenn wir auch darin von dem gewöhnlichen Wege, welcher erst später zu diesen Problemen führt, abweichen. Der Kürze wegen werden wir im Folgenden die drei Winkel, deren Ebenen eine dreiseitige körperliche Ecke bilden, die Seiten, die drei Winkel dagegen, unter denen diese Ebenen gegen einander geneigt sind, die Winkel der Ecke nennen.

1. Die drei Seiten einer dreiseitigen körperlichen Ecke sind gegeben; man soll die Winkel derselben durch eine Construction in der Ebene, eine sogenannte graphische Construction, finden.

A (Fig. 8.) sey die Spitze der Ecke, deren Seiten gegeben sind, deren Winkel wir finden sollen. Von dem beliebigen Punkte E in der Kante AB fälle man auf die Ebene des Winkels CAD das Perpendikel EF, und von F in dieser Ebene auf die Kanten AC, AD die Perpendikel FG, FH. Zieht man nun EG, EH; so sind EGF, EHF die den Kanten AC, AD entsprechenden Winkel der Ecke, die also aus den Datis der Aufgabe durch eine graphische Construction gefunden werden sollen.

Zu dem Ende zeichne man in der Ebene des Papiers die drei gegebenen Winkel BAC, CAD, BAD in der erforderlichen Lage neben einander, wie Fig. 8*. zeigt, und schneide auf den beiden in der Figur durch AB bezeichneten Linien zwei beliebige aber gleiche, in der Figur beide durch AE bezeichnete Stücke ab. Dächte man sich nun in Fig. 8. die Ebenen der Winkel BAC, BAD um AC, AD als Axen gedreht und in die Ebene des Winkels CAD niedergelegt; so würden in dieser Ebene FG, EG und FH, EH offenbar gerade Linien bilden, die auf AC und AD senkrecht stehen. Man wird also den dem Punkte F (Fig. 8.) entsprechenden Punkt in Fig. 8*. erhalten, wenn man von den beiden durch E bezeichneten Punkten auf AC und AD Perpendikel fällt, deren Durchschnittspunkt offenbar der gesuchte Punkt F seyn wird. Die beiden gesuchten Winkel EGF, EHF (Fig. 8.) sind Winkel der beiden bei F rechtwinkligen Dreiecke EGF, EHF (Fig. 8.). Könnte man also letztere construiren, so würden auch erstere gefunden seyn. Nun sind aber in Fig. 8*. von diesen rechtwinkligen Dreiecken die Hypotenusen EG, EH und die Catheten FG, FH gegeben; also lassen sich dieselben construiren, und unsere Aufgabe ist folglich als aufgelöst zu betrachten. Man errichte nämlich in Fig. 8*. durch den Punkt F auf FG und FH Perpendikel, und beschreibe aus G und H als Mittelpunkten mit GE und HE als Halbmessern Kreise, von denen die errichteten Perpendikel in den beiden in der Figur

durch **E** bezeichneten Punkten geschnitten werden; so sind **EGF, EHF** die beiden gesuchten rechtwinkligen Dreiecke, die durch dieselben Buchstaben bezeichneten Winkel also die beiden gesuchten Winkel der gegebenen körperlichen Ecke, die folglich, wie verlangt wurde, mittelst des obigen Verfahrens jederzeit durch eine bloße Construction in der Ebene, oder eine sogenannte graphische Construction, gefunden werden können. Daß man den an der Kante **AB** (Fig. 8.) liegenden Winkel der gegebenen körperlichen Ecke durch eine ganz ähnliche Construction finden kann, bedarf wohl nicht erst noch einer besondern Erinnerung. Dächte man sich Fig. 8. aus Pappe oder Kartenpapier verfertigt, und dann die einzelnen Theile dieser Figur aus einander geklappt, bis Alles in einer Ebene liegt; so würde man offenbar Fig. 8*. erhalten, eine Vorstellung, welche zur Erläuterung und dem leichtern Verstehen des Vorhergehenden und Folgenden sehr dienlich ist.

2. Es seyen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einer dreiseitigen körperlichen Ecke gegeben; man soll die dritte Seite und die beiden andern Winkel derselben durch eine graphische Construction finden.

Könnte man aus den Datis nur die dritte Seite durch eine graphische Construction finden, so würden alle drei Seiten der körperlichen Ecke gegeben, das Problem folglich auf die in (1.) aufgelöste Aufgabe zurückgeführt seyn. In der in Fig. 9. verzeichneten körperlichen Ecke seyen die beiden Seiten **BAC, BAD** und der an der Kante **AB** liegende Winkel gegeben. Letzterer wird sehr leicht construirt, wenn man von einem beliebigen Punkte **E** der Kante **AD** auf **AB** das Perpendikel **EF** fällt, und dann in der Ebene **BAC** durch den Punkt **F** das Perpendikel **FG** errichtet, indem dann der ebene Winkel **EFG** der an der Seite **AB** liegende Winkel unserer körperlichen Ecke seyn wird. Denkt man sich den Winkel **BAD** um **AB** wie um eine Axe gedreht und in die Ebene des Winkels **BAC** niedergelegt, so werden in dieser Ebene die Linien **FE, FG** offenbar in einer auf **AB** senkrechten geraden Linie liegen, und man kann nun den gesuchten Winkel **CAD**, nämlich die dritte Seite der gegebenen körperlichen Ecke, durch eine graphische Construction leicht auf folgende Art finden. In Fig. 9*. zeichne man in der Ebene des Papiers die beiden gegebenen Winkel **BAC, BAD** neben einander, nehme in dem Schenkel **AD** des Winkels **BAD** einen beliebigen Punkt **E** an, fälle von selbigem auf **AB** das Perpendikel **EF**, und verlängere dieses, bis der Schenkel **AC** des Winkels **BAC** in **G** geschnitten wird; so ist der Durchschnittspunkt **G** offenbar der dem eben so bezeichneten Punkte in Fig. 9. entsprechende Punkt. Der gesuchte Winkel **CAD** (Fig. 9.) ist ein Winkel des Dreiecks **EAG** und würde also gefunden seyn, wenn man dieses Dreieck construiren könnte. Von diesem Dreieck sind aber die Seiten **AE, AG** (Fig. 9*.) gegeben, so daß sich also dieses Dreieck con-

struiren ließe, wenn auch noch seine dritte Seite **EG** (Fig. 9.) bekannt wäre. Letztere findet man aber sehr leicht, wenn man in Fig. 9*. an **FG** den gegebenen Winkel **EFG** anlegt, die beiden durch **EF** bezeichneten Linien einander gleich macht und **EG** zieht. Construirt man nun mit **AG, AE, EG** als Seiten über **AG** das Dreieck **AEG**, so ist **GAE** oder der entsprechende Winkel **CAD** die gesuchte dritte Seite der gegebenen körperlichen Ecke, welche gefunden werden mußte, um das Problem als auf die in (1.) aufgelöste Aufgabe reducirt ansehen zu können.

3. Es seyen eine Seite und die beiden daran liegenden Winkel einer dreiseitigen körperlichen Ecke gegeben; man soll die beiden andern Seiten und den dritten Winkel derselben durch eine graphische Construction finden.

Man führt diese Aufgabe wieder auf (1.) zurück, wenn man die beiden unbekannten Seiten der körperlichen Ecke sucht, welches auf folgende Art ohne Schwierigkeit geschehen kann. Sind nämlich in der in Fig. 8. verzeichneten Ecke die Seite **CAD** und die beiden daran liegenden Winkel **EGF, EHF** gegeben; so trage man, um die Seiten **BAC, BAD** zu finden, die beiden gegebenen Winkel an eine beliebige Grundlinie **GH** (Fig. 10.) an, wodurch man das Dreieck **EGH** erhält, und fälle von dessen Spitze **E** auf die Grundlinie **GH** das Perpendikel **EF**. Nun sey **CAD** (Fig. 11.) die gegebene Seite der körperlichen Ecke. Mit den Schenkeln dieses Winkels ziehe man in den Entfernungen **FG** und **FH** (Fig. 10) zwei Parallelen, welche sich in **F** (Fig. 11.) schneiden mögen, und fälle von **F** auf die Schenkel **AC** und **AD** die Perpendikel **FG** und **FH**. Hierauf trage man an **FG** und **FH** die beiden gegebenen Winkel der körperlichen Ecke an, wodurch man die rechtwinkligen Dreiecke **EFG** und **EFH** erhält. Verlängert man nun **FG** und **FH** über **G** und **H** hinaus, macht die beiden in der Figur durch **EG**, so wie die beiden durch **EH** bezeichneten Linien einander gleich, und zieht nun die beiden durch **AE** oder **AB** bezeichneten Linien; so sind **BAC, BAD** offenbar die beiden gesuchten Seiten der körperlichen Ecke, welche hier durch eine graphische Construction gefunden worden sind, so daß also nun die Aufgabe wieder auf das in (1.) aufgelöste Problem zurückgeführt ist.

4. Wenn zwei Ebenen in einer geraden Linie zusammenstoßen, und durch einen Punkt **A** dieser Linie außerhalb des von den beiden Ebenen eingeschlossenen Winkels auf dieselben die Perpendikel **AB, AC** errichtet werden; so schließen diese beiden Perpendikel einen Winkel ein, welcher den Neigungswinkel der beiden Ebenen gegen einander zu zwei rechten Winkeln ergänzt.

Durch die beiden Perpendikel **AB, AC** lege man eine Ebene, so wird dieselbe auf der geraden Linie, in welcher die beiden Ebenen zusammenstoßen, senkrecht seyn, und ihre Durchschnitte mit den beiden Ebenen werden deren Neigungswinkel bilden.

Sey nun in Fig. 12. die Ebene des Papiers die durch die beiden Perpendikel **AB**, **AC** gelegte Ebene, und **AD**, **AE** seyen die Durchschnitte derselben mit den beiden gegebenen Ebenen, so daß also **DAE** der Neigungswinkel dieser Ebenen gegen einander ist. **BAC**, **BAD**, **DAE**, **CAE** machen zusammen vier rechte Winkel aus, und **BAD**, **CAE** sind rechte Winkel; also sind auch die Winkel **BAC**, **DAE** zusammen zwei rechten Winkeln gleich, wie behauptet wurde.

5. Wenn man durch die Spitze einer dreiseitigen körperlichen Ecke, außerhalb derselben, auf die Ebenen, welche sie einschließen, Perpendikel errichtet; so sind diese Perpendikel die Kanten einer dreiseitigen körperlichen Ecke, welche zu der erstern in einer solchen Beziehung steht, daß die Seiten und Winkel beider sich gegenseitig zu zwei rechten Winkeln ergänzen.

In Fig. 13. sey **AB′** senkrecht auf **CAD**, **AC′** senkrecht auf **BAD**, **AD′** senkrecht auf **BAC**; so ist

$$\mathrm{AB'}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{AC}\\ \mathrm{AD}\end{cases}$$

$$\mathrm{AC'}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{AB}\\ \mathrm{AD}\end{cases}$$

$$\mathrm{AD'}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{AB}\\ \mathrm{AC}\end{cases}$$

und daher auch umgekehrt

$$\mathrm{AB}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{AC'}\\ \mathrm{AD'}\end{cases}$$

$$\mathrm{AC}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{AB'}\\ \mathrm{AD'}\end{cases}$$

$$\mathrm{AD}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{AB'}\\ \mathrm{AC'}\end{cases}$$

so daß also **AB**, **AC**, **AD** respective auf den Ebenen **C′AD′**, **B′AD′**, **B′AC′** senkrecht sind. Folglich ist

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB}\\ \mathrm{AC}\end{matrix}\right\}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{C'AD'}\\ \mathrm{B'AD'}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB}\\ \mathrm{AD}\end{matrix}\right\}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{C'AD'}\\ \mathrm{B'AC'}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AC}\\ \mathrm{AD}\end{matrix}\right\}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{B'AD'}\\ \mathrm{B'AC'}\end{cases}$$

und

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB'}\\ \mathrm{AC'}\end{matrix}\right\}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{CAD}\\ \mathrm{BAD}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB'}\\ \mathrm{AD'}\end{matrix}\right\}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{CAD}\\ \mathrm{BAC}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AC'}\\ \mathrm{AD'}\end{matrix}\right\}\ \text{senkrecht auf}\ \begin{cases}\mathrm{BAD}\\ \mathrm{BAC}\end{cases}.$$

Bezeichnen wir nun die an den Kanten **AB**, **AC**, **AD** liegenden Winkel der körperlichen Ecke **ABCD** durch β, γ, δ, die an den Kanten **AB'**, **AC'**, **AD'** liegenden Winkel der körperlichen Ecke **AB'C'D'** dagegen durch β', γ', δ'; so ist nach (4.)

$$\begin{aligned} BAC + \delta' &= 180^\circ, \quad B'AC' + \delta = 180^\circ; \\ BAD + \gamma' &= 180^\circ, \quad B'AD' + \gamma = 180^\circ; \\ CAD + \beta' &= 180^\circ, \quad C'AD' + \beta = 180^\circ; \end{aligned}$$

wodurch also unser Satz bewiesen ist.

6. Sind nun die drei Winkel einer dreiseitigen körperlichen Ecke gegeben, so kann man aus denselben die drei Seiten der Ecke jederzeit auf folgende Art durch eine graphische Construction finden. Man denke sich, wenn β, γ, δ die gegebenen Winkel der Ecke bezeichnen, wie in (5.) durch ihre Spitze auf die Ebenen, welche sie einschließen, Perpendikel errichtet; so schließen diese Perpendikel als Kanten eine dreiseitige körperliche Ecke ein, deren Seiten $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$, $180^\circ - \delta$, und daher bekannt sind (5.). Aus diesen Winkeln, als Seiten einer Ecke betrachtet, suche man nun nach (1.) mittelst einer graphischen Construction die Winkel β', γ', δ' dieser Ecke; so sind nach (5.) $180^\circ - \beta'$, $180^\circ - \gamma'$, $180^\circ - \delta'$ die gesuchten Seiten der Ecke, deren Winkel gegeben waren, so daß sich also auch jederzeit die Seiten einer dreiseitigen körperlichen aus ihren Winkeln durch eine Construction in der Ebene finden lassen.

7. Die vorhergehenden vier Aufgaben, welche, wie man auf der Stelle übersehen wird, eigentlich die vollständige graphische Auflösung der Hauptaufgaben der sphärischen Trigonometrie enthalten, sollen, wie wir oben schon erinnert haben, bloß zu einer vorläufigen Einführung in die descriptive Geometrie dienen. Indem wir uns nun zu einer nähern Darlegung der Methoden wenden, durch welche diese Wissenschaft ihre Zwecke zu erreichen sucht, müssen wir zuerst zeigen, wie man in derselben die Lage von Punkten, Linien und Ebenen im Raume zu bestimmen pflegt. Zu dem Ende nehmen wir zwei beliebige auf einander senkrechte Ebenen im Raume an, welche die *coordinirten Ebenen* oder die *Projectionsebenen*, die eine gewöhnlich die *Horizontalebene*, die andere die *Vertikalebene*, genannt werden. Denken wir uns nun von einem beliebigen Punkte im Raume auf die beiden Projectionsebenen Perpendikel gefällt, so heißen die beiden Punkte, in denen die Projectionsebenen von diesen Perpendikeln geschnitten werden, die *Projectionen* des in Rede stehenden Punktes, und zwar die eine, nämlich die auf der Horizontalebene liegende, die *horizontale*, die andere, nämlich die auf der Vertikalebene liegende, die *vertikale* Projection. Durch die beiden Projectionen eines Punktes ist aber dessen Lage im Raum offenbar vollständig bestimmt. Fällt man nämlich von der vertikalen Projection eines Punktes in der Ver-

tikalebene auf die Durchschnittslinie der beiden Projectionsebenen ein Perpendikel, errichtet dann durch die horizontale Projection desselben auf die Horizontalebene auf derselben Seite dieser Ebene, auf welcher die vertikale Projection liegt, ein Perpendikel, und macht selbiges dem vorher von der vertikalen Projection auf die Durchschnittslinie der Projectionsebenen gefällten Perpendikel gleich; so ist der Endpunkt dieses auf die Horizontalebene durch die horizontale Projection errichteten Perpendikels offenbar der Punkt im Raume, dessen beide Projectionen gegeben waren, und kann also aus denselben immer gefunden werden.

Die stetige Folge der Projectionen aller Punkte einer beliebigen geraden Linie im Raume bildet auf jeder der beiden Projectionsebenen offenbar eine gerade Linie, die nur in dem einen Falle, wenn die gerade Linie im Raume auf der entsprechenden Projectionsebene senkrecht steht, in einen Punkt übergeht. Die stetigen Folgen der Projectionen aller Punkte einer geraden Linie im Raume auf beiden Projectionsebenen heißen die Projectionen dieser geraden Linie, und zwar die eine, nämlich die auf der Horizontalebene liegende, wieder die horizontale, die andere dagegen, nämlich die auf der Vertikalebene liegende, die vertikale Projection. Auch erhellet sehr leicht, daß die Lage einer geraden Linie im Raume im Allgemeinen durch ihre beiden Projectionen jederzeit vollständig bestimmt ist, indem man nur durch jede der beiden Projectionen auf die entsprechende Projectionsebene eine senkrechte Ebene zu errichten, und die Durchschnittslinie dieser beiden senkrechten Ebenen zu bestimmen braucht, welche offenbar die durch ihre Projectionen gegebene gerade Linie im Raume seyn wird. Nur in dem einen Falle, wenn beide Projectionen einer geraden Linie im Raume auf der Durchschnittslinie der beiden Projectionsebenen senkrecht stehen, wird die Lage derselben durch ihre beiden Projectionen nicht vollständig bestimmt, weil in diesem Falle die beiden durch die beiden Projectionen gelegten auf den Projectionsebenen senkrecht stehenden Ebenen in eine Ebene zusammenfallen, und es also keine Durchschnittslinie derselben giebt.

Punkte und gerade Linien im Raume heißen im Folgenden gegeben, wenn ihre beiden Projectionen auf den beiden angenommenen Projectionsebenen gegeben sind, und die Lage einer Ebene im Raume sieht man als bekannt an, wenn ihre Durchschnittslinien mit den beiden Projectionsebenen gegeben sind. Soll also die Lage einer Ebene im Raume bestimmt werden, so kommt es immer bloß darauf an, ihre Durchschnittslinien mit den beiden Projectionsebenen zu finden.

8. Die Durchschnittslinie der beiden Projectionsebenen soll im Folgenden stets durch **AB** bezeichnet werden, und wir werden nun immer von der folgenden wohl zu merkenden Vorstellungsart Gebrauch machen. Wir denken uns nämlich immer die Vertikalebene um **AB** gedreht und mit der Horizontalebene in eine

Ebene, welche in den folgenden Figuren jederzeit die Ebene des Papiers seyn soll, niedergelegt, wobei wir zugleich ein für alle Mal festsetzen wollen, daß in den Figuren der unterhalb **AB** liegende Theil der Ebene des Papiers jederzeit die Horizontalebene, der oberhalb **AB** liegende Theil der Ebene des Papiers dagegen die Vertikalebene vorstellen soll. Alle Projectionen von Punkten und Linien auf den beiden Projectionsebenen, so wie auch die Durchschnitte aller Ebenen im Raume mit den beiden Projectionsebenen, werden dann auch bloß in der Ebene des Papiers gegeben, und überhaupt alle Constructionen bloß in dieser Ebene ausgeführt. Sind **M'** und **M''** die horizontale und vertikale Projection eines und desselben Punktes **M** im Raume auf der Ebene des Papiers; so erhellet sehr leicht, daß, wenn man in dieser Ebene die Punkte **M'** und **M''** durch die gerade Linie **M'M''** mit einander verbindet, diese Linie jederzeit auf der Durchschnittslinie **AB** der beiden Projectionsebenen senkrecht stehen muß, eine Bemerkung, von der wir im Folgenden vielfachen Gebrauch zu machen Gelegenheit finden werden.

9. Seyen jetzt zwei Punkte **M, N** im Raume durch ihre horizontalen und vertikalen Projectionen gegeben; man soll die Projectionen der durch diese beiden Punkte gehenden geraden Linie finden, und zugleich die Entfernung der beiden Punkte **M, N** von einander bestimmen.

Es erhellet auf der Stelle, daß, wenn in Fig. 14. **M', N'** und **M'', N''** die horizontalen und vertikalen Projectionen der beiden Punkte **M, N** im Raume sind, die gesuchten Projectionen der durch diese beiden Punkte gehenden geraden Linie im Raume erhalten werden, wenn man die Punkte **M', N'** und **M'', N''** in unserer Figur durch die Linien **M'N'** und **M''N''** mit einander verbindet. Um nun aber auch die Entfernung der beiden Punkte **M, N** im Raume von einander zu finden, ziehe man die beiden nach (8.) auf **AB** senkrechten Linien **M'M'', N'N''**, errichte auf **M'N'** durch **M'** und **N'** die Perpendikel **M'M' = KM''**, **N'N' = LN''**, und ziehe **MN**; so ist **MN** die gesuchte Entfernung der beiden gegebenen Punkte im Raume von einander, wie auf der Stelle erhellet, wenn man sich nur die auf der Horizontalebene senkrechte Ebene **MM'NN'** im Raume um **M'N'** gedreht und auf die Horizontalebene, d. h. hier die Ebene des Papiers, niedergelegt denkt.

10. Durch einen durch seine Projectionen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche einer ebenfalls durch ihre Projectionen gegebenen geraden Linie im Raume parallel ist.

Es erhellet auf der Stelle, daß sowohl die horizontalen, als auch die vertikalen Projectionen zweier einander parallelen geraden Linien jederzeit einander parallel sind, und daß die Projectionen einer durch einen beliebigen Punkt im Raume gehenden geraden Linie jederzeit durch die entsprechenden Projectionen dieses

Punktes gehen müssen, woraus sich auf der Stelle die folgende höchst einfache Auflösung unserer Aufgabe ergiebt. Durch die horizontale und vertikale Projection des gegebenen Punktes ziehe man zwei respective der horizontalen und vertikalen Projection der gegebenen Linie parallele gerade Linien; so sind diese Linien die gesuchten Projectionen der durch den gegebenen Punkt gehenden, der gegebenen Linie parallelen geraden Linie.

11. Zwei sich schneidende gerade Linien im Raume sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll den von diesen Linien eingeschlossenen Winkel finden.

Die beiden gegebenen Linien im Raume seyen **MN**, **KL**, und **G** sey ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt im Raume. In Fig. 15. seyen **M′N′**, **K′L′** und **M″N″**, **K″L″** die horizontalen und vertikalen Projectionen der beiden gegebenen Linien; so sind die Durchschnittspunkte **G′**, **G″** dieser Projectionen die beiden Projectionen des Durchschnittspunktes **G** der beiden gegebenen Linien im Raume, und die Linie **G′G″** ist also auf der Durchschnittslinie **AB** der beiden Projectionsebenen senkrecht. Verlängert man nun die vertikalen Projectionen der beiden gegebenen Linien, bis dieselben die Linie **AB** in den Punkten **C**, **D** schneiden, und errichtet durch diese Punkte auf **AB** zwei Perpendikel, welche die horizontalen Projectionen der beiden gegebenen Linien in **E** und **F** schneiden; so sind **E** und **F** offenbar die Punkte, in denen die Horizontalebene von den beiden gegebenen Linien im Raume getroffen wird. Denkt man sich nun von dem Durchschnittspunkte **G** dieser beiden Linien im Raume nach **E** und **F** die Linien **GE**, **GF** gezogen, und das Dreieck **GEF**, indem man dasselbe um die Linie **EF** wie um eine Axe dreht, in die Horizontalebene niedergelegt; so muß das von **G** auf **EF** gefällte Perpendikel **GI** offenbar durch den Punkt **G′** gehen, und dieses Perpendikel ist, wie eben so leicht erhellet, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Catheten die Linie **G′I** und eine der Linie **G″H** gleiche Linie sind. Der Winkel **EGF** ist der gesuchte von den beiden geraden Linien im Raume eingeschlossene Winkel. Um also diesen Winkel zu finden, fälle man, nachdem die Linie **EF** nach dem Vorhergehenden gefunden ist, auf diese Linie von **G′** ein Perpendikel **G′I**, verlängere selbiges über den Punkt **G′** hinaus, mache **HO = G′I**, ziehe **G″O**, und mache dieser Linie die durch den Punkt **G′** auf **EF** senkrecht gezogene Linie **GI** gleich; so ist, wenn man nun die Linien **GE** und **GF** zieht, **EGF** der gesuchte von den beiden gegebenen geraden Linien im Raume eingeschlossene Winkel, welcher sich also nach dem Vorhergehenden immer durch eine bloße Construction in der Ebene finden läßt.

12. Die Projectionen des Durchschnitts zweier Ebenen zu finden, deren Durchschnitte mit den beiden Projectionsebenen gegeben sind.

Diese Aufgabe bietet mehrere Fälle dar, von denen wir die wichtigsten hier durchgehen wollen. Wenn zunächst, wie in Fig. 16., die Durchschnitte **KL, MN** und **K′L, M′N** der beiden Ebenen mit den Projectionsebenen auf beiden Projectionsebenen sich in **O** und **O′** schneiden, so sind offenbar **O** und **O′** zwei Punkte der Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen, nämlich die Durchschnittspunkte derselben mit den beiden Projectionsebenen, und man wird also offenbar die beiden Projectionen dieser Durchschnittslinie erhalten, wenn man von **O′** und **O** auf **AB** die Perpendikel **O′P** und **OP′** fällt, und dann die Linien **OP, O′P′** zieht, welche die gesuchten Projectionen auf der Horizontal- und Vertikalebene seyn werden.

Wenn die Durchschnitte der gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen sich nur auf der einen Projectionsebene, etwa auf der Vertikalebene schneiden, auf der Horizontalebene dagegen einander parallel sind; so ist die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen offenbar eine der Horizontalebene parallele gerade Linie, und ihre Projection auf der Horizontalebene folglich den Durchschnitten der gegebenen Ebenen mit der Horizontalebene parallel. Ist nun **O′** der Durchschnittspunkt der Durchschnitte der gegebenen Ebenen mit der Vertikalebene; so braucht man von **O′** auf **AB** nur ein Perpendikel **O′P** zu fällen, und durch **P** mit den Durchschnitten der gegebenen Ebenen mit der Horizontalebene eine Parallele zu ziehen, welche die Projection des Durchschnitts der beiden gegebenen Ebenen auf der Horizontalebene seyn wird. Die Projection dieses Durchschnitts auf der Vertikalebene ist offenbar eine durch **O′** gehende der Linie **AB** parallele gerade Linie.

Wenn die Durchschnitte der gegebenen Ebenen einander und zugleich dem gemeinschaftlichen Durchschnitt **AB** der beiden Projectionsebenen parallel sind; so können die beiden gegebenen Ebenen offenbar einander parallel seyn, oder dieselben schneiden sich in einer der Linie **AB** parallelen Linie. In einem solchen Falle kann man auf folgende Art verfahren. In Fig. 17. seyen **MM, M′M′** und **NN, N′N′** die Durchschnitte der beiden gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen, und also nach der Voraussetzung einander und der Linie **AB** parallel. In **AB** nehme man nun einen beliebigen Punkt **a** an, und errichte durch denselben auf **AB** ein Perpendikel, welches die Linien **MM, M′M′, NN, N′N′** in **m, m′, n, n′**, schneiden mag. Von dem angenommenen Punkte **a** an schneide man auf der Linie **AB** zwei den Perpendikeln **am′** **an′** gleiche Stücke ab, wie die Figur zeigt, und ziehe die Linien **mm′, nn′**, welche sich in **p** schneiden mögen, wobei indeß zu bemerken ist, daß, wenn die Linien **mm′, nn′** sich nicht schnitten, also einander parallel wären, auch die beiden gegebenen Ebenen sich nicht schneiden, sondern einander parallel seyn würden. Durch den Punkt **p** ziehe man nun mit **AB** die Parallele **QQ**, welche die horizontale Projection der Durchschnittslinie der beiden gege-

benen Ebenen seyn wird. Um die vertikale Projection dieser Linie zu finden, schneide man auf dem durch a auf AB errichteten Perpendikel von dem Punkte a aus das Stück $aq' = pq$ ab, und ziehe durch den so bestimmten Punkt q' mit AB die Parallele Q'Q'; so wird diese Linie die gesuchte vertikale Projection der Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen seyn. Der Grund und die Richtigkeit dieser Construction wird auf der Stelle erhellen, wenn man in Fig. 17. die in der Ebene ausgeführte Zeichnung mit der entsprechenden perspectivischen Darstellung vergleicht.

Wenn die Durchschnitte der gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen auf beiden Projectionsebenen einander parallel sind, ohne der Durchschnittslinie AB der beiden Projectionsebenen parallel zu seyn; so sind die beiden gegebenen Ebenen jederzeit einander parallel, wie aus bekannten einfachen stereometrischen Sätzen auf der Stelle folgt.

13. Den Durchschnittspunkt einer gegebenen Ebene und einer gegebenen geraden Linie zu finden.

In Fig. 18. seyen MN, M'N die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen, und KL, K'L' seyen die Projectionen der gegebenen geraden Linie. Errichtet man durch den Punkt K, in welchem die horizontale Projection der gegebenen Linie die Linie AB schneidet, auf diese Linie ein Perpendikel KO'; so sind KL, KO' die Durchschnitte einer durch die gegebene Linie gelegten auf der Horizontalebene senkrechten Ebene mit den Projectionsebenen, wie auf der Stelle erhellet. Fällt man nun von O auf AB das Perpendikel OG und zieht O'G; so sind nach (12.) KO und GO' die horizontale und vertikale Projection der Durchschnittslinie der Ebenen MNM' und LKO', d. i. der gegebenen und der durch die gegebene gerade Linie gelegten auf der Horizontalebene senkrechten Ebene. Der Durchschnittspunkt der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen mit der gegebenen geraden Linie ist aber offenbar der gesuchte Durchschnittspunkt dieser Linie mit der gegebenen Ebene. Also ist der Punkt Q', in welchem die beiden vertikalen Projectionen K'L' und GO' sich schneiden, die vertikale Projection des Durchschnittspunktes der gegebenen geraden Linie und der gegebenen Ebene, und die horizontale Projection dieses Punktes erhält man, wie sogleich in die Augen fällt, sehr leicht, wenn man von Q' auf AB ein Perpendikel fällt, und den Durchschnittspunkt Q dieses Perpendikels mit der horizontalen Projection KL der gegebenen geraden Linie bestimmt.

14. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer gegebenen Ebene parallel ist.

Daß die Durchschnitte der gesuchten Ebene auf beiden Projectionsebenen mit den Durchschnitten der gegebenen Ebene parallel seyn müssen, erhellet aus den einfachsten Lehrsätzen der Stereometrie. Daher kommt es nur darauf an, auf jeder der beiden

Projectionsebenen Punkte zu finden, durch welche die gesuchten Durchschnitte gehen müssen. Denkt man sich nun durch den gegebenen Punkt im Raume eine Linie gezogen, welche dem Durchschnitte der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene parallel ist; so liegt diese Linie offenbar ganz in der gesuchten Ebene und ihr Durchschnittspunkt mit der Vertikalebene wird ein Punkt seyn, durch welchen die Durchschnittslinie der gesuchten Ebene mit der Vertikalebene gehen muß, so daß es also jetzt zunächst darauf ankommt, diesen Punkt zu finden, welches sehr leicht ist, wenn man nur bedenkt, daß dieser Punkt mit dem gegebenen Punkte in gleicher Höhe über der Horizontalebene liegt, und daß die horizontale Projection der durch den gegebenen Punkt im Raume mit der Durchschnittslinie der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene parallel gezogenen Linie eben dieser Durchschnittslinie parallel seyn muß. Sind nämlich in Fig. 19. **MN**, **M′N** die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den beiden Projectionsebenen und **K**, **K′** die Projectionen des gegebenen Punktes; so ziehe man durch **K** die Linie **KL** der horizontalen Projection **MN** parallel, errichte durch **L** auf **AB** ein Perpendikel und ziehe durch **K′** mit **AB** eine Parallele, welche jenes Perpendikel in **G** schneide; so ist **G** der mehr erwähnte Punkt, durch welchen der Durchschnitt der gesuchten Ebene mit der Vertikalebene gehen muß, und man wird also diesen Durchschnitt erhalten, wenn man durch **G** mit **M′N** eine Parallele zieht. Schneidet nun diese Parallele die Linie **AB** in **F**, so braucht man durch **F** bloß eine Parallele **FH** mit **MN** zu ziehen, um auch den Durchschnitt der gesuchten Ebene mit der Horizontalebene zu finden. Sind die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen beide der Linie **AB** parallel, so ist das vorhergehende Verfahren nicht mehr anwendbar und man kann sich dann folgender Construction bedienen, deren Grund auch ohne besondere Erläuterung leicht erhellen wird. Wenn (Fig. 20.) **MN**, **M′N′** die der Linie **AB** parallelen Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen und **K**, **K′** die Projectionen des gegebenen Punktes sind; so ziehe man die bekanntlich auf **AB** senkrechte Linie **KK′** und verlängere dieselbe, bis **MN** und **M′N′** von ihr in **L** und **L′** geschnitten werden. Hierauf nehme man **CF** = **CL**, ziehe **FL′**, nehme **CD** = **CK**, bestimme den Punkt **E**, wie die Figur zeigt, ziehe durch **E** mit **FL′** die Parallele **HG′**, nehme **CG** = **CH**, und ziehe durch **G**, **G′** mit **AB** die Parallelen **PQ**, **P′Q′**; so sind diese Linien die Durchschnitte der gesuchten Ebene mit den Projectionsebenen.

15. Wenn eine gerade Linie im Raume auf einer Ebene senkrecht steht; so sind die Projectionen der Linie jederzeit auf den Durchschnitten der Ebene mit den entsprechenden Projectionsebenen senkrecht.

Die gegebene Linie im Raume sey **AB** und **A′B′** sey ihre horizontale Projection. **A′B′** liegt in einer durch **AB** gelegten

auf der Horizontalebene senkrechten Ebene; dieselbe Ebene ist aber wegen der Voraussetzung nach einem bekannten stereometrischen Satze auch auf der gegebenen Ebene senkrecht; folglich sind die gegebene Ebene und die Horizontalebene, also auch ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt, beide auf der durch **AB** gelegten Ebene, in welcher die Projection **A′B′** liegt, senkrecht. **A′B′** ist aber der Durchschnitt dieser Ebene mit der Horizontalebene; folglich ist offenbar der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene auch auf **A′B′** senkrecht. Ganz eben so zeigt man, daß der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der Vertikalebene auf der vertikalen Projection der gegebenen auf der gegebenen Ebene senkrechten geraden Linie perpendikular ist. Dieser Lehrsatz führt unmittelbar zu der Auflösung folgender Aufgabe.

16. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

In Fig. 21. seyen **MN**, **M′N** die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen; **K** und **K′** seyen die Projectionen des gegebenen Punktes. Da die Projectionen der gesuchten geraden Linie offenbar durch die entsprechenden Projectionen des gegebenen Punktes gehen, und nach (15.) auf den Durchschnitten der gegebenen Ebene mit den entsprechenden Projectionsebenen senkrecht stehen müssen; so braucht man, um die Projectionen der gesuchten Linie zu finden, durch **K**, **K′** bloß zwei auf **MN**, **M′N** senkrecht stehende gerade Linien **GH**, **G′H′** zu ziehen.

17. Unter denselben Voraussetzungen, wie vorher, die Projectionen des Punktes zu finden, in welchem das Perpendikel die gegebene Ebene trifft.

Nach (13.) braucht man bloß durch den Punkt **H**, wo die horizontale Projection **GH** die Linie **AB** schneidet, auf **AB** ein Perpendikel zu errichten, welches die Linie **M′N** in **O′** schneidet. Fällt man dann von **O** auf **AB** das Perpendikel **OP** und zieht **PO′**; so ist der Punkt **Q′**, in welchem **G′H′** von **PO′** geschnitten wird, die vertikale Projection des gesuchten Punktes, dessen horizontale Projection dann ferner der Punkt **Q** ist, in welchem die Linie **GH** von einem von **Q′** auf **AB** gefällten Perpendikel geschnitten wird.

18. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Linie senkrecht steht.

Die Durchschnitte der gesuchten Ebene mit den beiden Projectionsebenen müssen nach (15.) auf den Projectionen der gegebenen geraden Linie senkrecht stehen, und es kommt daher bloß darauf an, Punkte zu finden, durch welche die Durchschnitte der gesuchten Ebene mit den beiden Projectionsebenen gehen müssen. Sind nun in Fig. 22. **GH**, **G′H′** die Projectionen der gegebenen geraden Linie, **K** und **K′** die Projectionen des gegebenen Punktes; so erhellet leicht, daß, wenn man durch **K** eine auf **GH**

senkrechte Linie **FL** zieht, diese Linie die horizontale Projection einer durch den gegebenen Punkt in der gesuchten Ebene mit deren Durchschnitt mit der Horizontalebene parallel gezogenen Linie ist. Den Punkt, in welchem diese Linie die Vertikalebene schneidet, erhält man leicht, wenn man durch **F** auf **AB** ein Perpendikel errichtet, durch **K'** eine Parallele mit **AB** zieht, und den Durchschnittspunkt **E** dieser beiden Linien bestimmt. Da nun die Durchschnittslinie der gesuchten Ebene mit der Vertikalebene offenbar durch den Punkt **E** gehen muß; so braucht man, um diese Durchschnittslinie zu erhalten, durch **E** bloß eine auf **G'H'** senkrechte Linie **M'N** zu ziehen. Ist dann ferner **N** der Punkt, in welchem **AB** von diesem Perpendikel geschnitten wird; so ist eine durch **N** auf **GH** senkrecht gezogene Linie **MN** die Durchschnittslinie der gesuchten Ebene mit der Horizontalebene. Die Projectionen des Durchschnittspunktes der gesuchten Ebene mit der gegebenen geraden Linie findet man nun wie in (17.) mittelst der in (13.) aufgelösten Aufgabe.

19. Den Neigungswinkel zweier Ebenen gegen einander zu finden, deren Durchschnitte mit den beiden Projectionsebenen gegeben sind.

Wir wollen der Kürze wegen hier bloß den allgemeinsten Fall betrachten, wenn die Durchschnittslinien der beiden Ebenen mit den Projectionsebenen auf beiden Projectionsebenen sich schneiden, indem die Untersuchung der übrigen möglichen Fälle dann keine Schwierigkeit haben wird. In Fig. 23. seyen **MN**, **M'N** und **KL**, **K'L** die Durchschnitte der beiden gegebenen Ebenen mit den Projectionsebenen. Fällt man von **O'** auf **AB** das Perpendikel **O'C** und zieht **OC**, so ist **OC** offenbar die horizontale Projection des Durchschnitts der beiden gegebenen Ebenen. Errichtet man nun durch **C** auf **OC** ein Perpendikel, macht selbiges dem Perpendikel **O'C** gleich und zieht die Linie **OO'**; so entspricht der Triangel **OCO'** einem rechtwinkligen Triangel im Raume, dessen Hypotenuse die Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen ist, wenn man sich diesen Triangel um **OC** gedreht und in die Horizontalebene niedergelegt vorstellt. Denkt man sich nun durch einen beliebigen Punkt **G** der Linie **OO'** im Raume eine auf dieser Linie senkrechte Ebene gelegt, so ist diese Ebene offenbar die Ebene des gesuchten Neigungswinkels der beiden gegebenen Ebenen gegen einander. Da sowohl diese Ebene als auch die Horizontalebene, auf der Ebene **OCO'** im Raume senkrecht ist; so ist auch die Durchschnittslinie der beiden erstern Ebenen auf der Ebene **OCO'**, also auch auf der Linie **OC**, senkrecht. Errichten wir also durch den beliebigen Punkt **G** der Linie **OO'** ein Perpendikel auf dieselbe, welches die Linie **OC** in **H** schneidet, errichten durch **H** auf **OC** das Perpendikel **EF**, machen **HI = HG**, und ziehen **EI**, **FI**; so ist **EIF** offenbar der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen gegen einander.

20. Die Durchschnitte einer Ebene mit den beiden Projectionsebenen sind gegeben; man soll die Durchschnitte einer andern Ebene mit den beiden Projectionsebenen finden, welche gegen die gegebene Ebene unter einem gegebenen Winkel geneigt ist.

Um diese Aufgabe aufzulösen, braucht man das bei der vorhergehenden Aufgabe angewandte Verfahren bloß umzukehren. Sind nämlich in Fig. 23. **MN**, **M'N** die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen, so nehme man in denselben zwei beliebige Punkte **O**, **O'** an, fälle von **O'** auf **AB** das Perpendikel **O'C**, ziehe **OC**, und beschreibe über **OC** das rechtwinklige Dreieck **OCO'**. Hierauf nehme man in **OC** einen beliebigen Punkt **H** an, fälle von demselben auf **OO'** das Perpendikel **HG**, mache **HI = HG**, errichte durch **H** auf **OC** ein Perpendikel, welches die Linie **MN** in **E** schneidet, ziehe **EI**, trage an **EI** einen dem gegebenen Winkel gleichen Winkel **EIF** an, ziehe die Linie **OF**, welche die Linie **AB** in **L** schneide, und ziehe dann **LO'**; so sind **KL**, **K'L** die Durchschnitte der gesuchten Ebene mit den Projectionsebenen.

21. Den Neigungswinkel einer durch ihre Projectionen gegebenen geraden Linie gegen eine durch ihre Durchschnitte mit den Projectionsebenen gegebene Ebene zu finden.

Denkt man sich von irgend einem Punkte der gegebenen geraden Linie im Raume auf die gegebene Ebene ein Perpendikel gefällt; so ist der von diesem Perpendikel mit der gegebenen geraden Linie eingeschlossene Winkel die Ergänzung des gesuchten Neigungswinkels zu einem rechten Winkel, und letzterer wird also gefunden seyn, wenn man ersteren finden kann. Zu dem Ende nehme man auf den beiden Projectionen der gegebenen geraden Linie zwei in einer auf der Linie **AB** senkrechten Linie liegende Punkte an, und fälle von denselben auf die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den entsprechenden Projectionsebenen Perpendikel; so sind diese Perpendikel nach (8.) und (15.) die Projectionen eines von einem gewissen Punkte der gegebenen geraden Linie im Raume auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikels, und die Aufgabe ist nun auf die in (11.) aufgelöste Aufgabe: den von zwei durch ihre Projectionen gegebenen geraden Linien eingeschlossenen Winkel zu finden, zurückgeführt.

22. Es seyen die Projectionen dreier Punkte im Raume gegeben; man soll die Durchschnitte der durch dieselben bestimmten Ebene mit den beiden Projectionsebenen finden.

Die drei Punkte im Raume seyen **P**, **Q**, **R** und **P'**, **Q'**, **R'**; **P''**, **Q''**, **R''** (Fig. 24.) seyen ihre horizontalen und vertikalen Projectionen. Zieht man die Linien **P'P''**, **Q'Q''**, **R'R''**; so sind dieselben bekanntlich auf der Linie **AB** senkrecht. Die Linien **P'Q'**, **P'R'** und **P''Q''**, **P''R''** sind die horizontalen und vertikalen Projectionen der Linien **PQ** und **PR** im Raume. Um

die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der Horizontalebene zu finden, braucht man, wie leicht erhellet, durch die beiden Punkte E, F, in denen AB von den Projectionen P″Q″ und P″R″ geschnitten wird, auf die Linie AB bloß zwei Perpendikel zu errichten, und deren Durchschnittspunkte G, H mit den beiden Projectionen P′Q′ und P′R′ zu bestimmen, indem dann offenbar G, H die gesuchten Durchschnittspunkte seyn werden. Mit diesen Durchschnittspunkten ist aber auch zugleich die Durchschnittslinie GH der gesuchten Ebene mit der Horizontalebene gefunden. Die Durchschnittslinie der gesuchten Ebene mit der Vertikalebene findet man auf ganz ähnliche Weise. Man bestimmt nämlich die beiden Punkte K, L, in denen AB von den Projectionen P′Q′, P′R′ geschnitten wird, errichtet durch K, L auf AB Perpendikel und bestimmt deren Durchschnittspunkte M, N mit den Projectionen P″Q″, P″R″. Zieht man dann MN, so ist MN die Durchschnittslinie der gesuchten Ebene mit der Vertikalebene. Uebrigens könnte man auch durch P′ eine Parallele P′T mit GH, durch P″ eine Parallele P″U mit AB ziehen, und durch T ein Perpendikel TU auf AB errichten, welches die durch P″ mit AB parallel gezogene Linie in U schneiden möge. Zieht man dann durch U und den Punkt, in welchem AB von der Linie GH geschnitten wird, eine Linie; so erhält man auch den Durchschnitt der gesuchten Ebene mit der Vertikalebene, wie augenblicklich erhellen wird, wenn man sich nur durch den Punkt P im Raume in der gesuchten Ebene mit deren Durchschnittslinie GH mit der Horizontalebene eine Parallele gezogen denkt.

23. Die vorhergehenden Elementar-Aufgaben wollen wir nun auf einige die Kugel betreffende Aufgaben anwenden, und dabei mit dem folgenden einfachen Probleme beginnen:

Der Mittelpunkt und der Halbmesser einer Kugel, ersterer natürlich durch seine beiden Projectionen, seyen gegeben; man soll den Mittelpunkt und den Halbmesser des Kreises finden, in welchem die Kugel von einer durch ihre Schnitte mit den beiden Projectionsebenen gegebenen Ebene geschnitten wird.

Von dem gegebenen Mittelpunkte der Kugel fälle man nach (16.) auf die gegebene Ebene ein Perpendikel und suche nach (17.) die Projectionen des Durchschnittspunktes dieses Perpendikels der gegebenen Ebene; so hat man nach bekannten stereometrischen Sätzen die Projectionen des Mittelpunktes des Kreises, in welchem die Kugel von der gegebenen Ebene geschnitten wird. Nun suche man nach (9.) die Entfernung des Mittelpunktes dieses Kreises vom Mittelpunkte der Kugel, und wird dann nach dem pythagoräischen Lehrsatze mittelst des gegebenen Halbmessers der Kugel auch leicht den Halbmesser des Kreises finden können, in welchem die Kugel von der gegebenen Ebene geschnitten wird.

Durch eine zweckmäßige Annahme der Projectionsebenen kann man die Auflösung solcher Aufgaben häufig vereinfachen. Bei

gegenwärtiger Aufgabe wird man die Vertikalebene am besten so annehmen, daß ihre Durchschnittslinie mit der Horizontalebene auf der Durchschnittslinie der gegebenen Ebene mit der Horizontalebene senkrecht steht. Sind unter dieser Voraussetzung in Fig. 25. **MN**, welches senkrecht auf **AB** steht, und **M′N** die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den Projectionsebenen und **O′**, **O″** die Projectionen des Mittelpunkts der Kugel; so braucht man, um die vertikale Projection **C″** des Mittelpunktes des Kreises, in welchem die Kugel von der gegebenen Ebene geschnitten wird, zu finden, bloß von **O″** auf **M′N** das Perpendikel **O″C″** zu fällen. Fällt man dann ferner von **C″** auf **AB** ein Perpendikel, welches von einer durch **O′** mit **AB** parallel gezogenen geraden Linie in **C′** geschnitten wird; so ist **C′** offenbar die horizontale Projection des Mittelpunkts des in Rede stehenden Kreises. Um endlich den Halbmesser dieses Kreises zu finden, braucht man bloß um **O″** als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser der Kugel als Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher die Linie **M′N** im Allgemeinen in zwei Punkten **E** und **F** schneiden wird, welche auf der Linie **M′N** den gesuchten Halbmesser **C″E = C″F** abschneiden. Schnitte der beschriebene Kreis die Linie **M′N** nicht, so würde auch die gegebene Ebene die Kugel nicht schneiden, so wie denn auch auf der Stelle erhellet, daß die gegebene Ebene die Kugel berühren wird, wenn der beschriebene Kreis die Linie **M′N** nur in dem einen Punkte **C″** trifft, in welchem Falle **C′**, **C″** die beiden Projectionen des Berührungspunktes der gegebenen Ebene mit der Kugel seyn werden.

24. Den Mittelpunkt und den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche durch vier durch ihre Projectionen gegebene Punkte im Raume geht.

Die Auflösung dieser Aufgabe gründet sich auf den leicht zu beweisenden Satz, daß eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt einer Sehne der Kugel geht und auf dieser Sehne senkrecht ist, jederzeit durch den Mittelpunkt der Kugel gehen muß. Seyen nun **A**, **B**, **C**, **D** die vier Punkte im Raume, durch welche die Oberfläche der Kugel gehen soll, und **A′**, **B′**, **C′**, **D′** und **A″**, **B″**, **C″**, **D″** seyen die horizontalen und vertikalen Projectionen derselben. Zieht man nun die Linien **A′B′**, **A′C′**, **A′D′** und **A″B″**, **A″C″**, **A″D″**; so sind diese Linien die horizontalen und vertikalen Projectionen der Linien **AB**, **AC**, **AD** im Raume. Halbirt man hierauf die Linien **A′B′**, **A′C′**, **A′D′** und **A″B″**, **A″C″**, **A″D″** sämmtlich; so erhält man die horizontalen und vertikalen Projectionen der Mittelpunkte der Linien **AB**, **AC**, **AD** im Raume. Durch diese Mittelpunkte denke man sich drei auf den Linien **AB**, **AC**, **AD** im Raume senkrechte Ebenen **E**, **E′**, **E″** gelegt, und suche nach (18.) die Durchschnitte dieser drei Ebenen mit den Projectionsebenen. Sucht man nun nach (12.) die Projectionen der Durchschnittslinie zweier der drei Ebe-

nen E, E', E'', etwa der Ebenen E, E', und hierauf nach (13.) die Projectionen des Durchschnittspunktes dieser Linie mit der dritten Ebene E''; so hat man die Projectionen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der drei Ebenen E, E', E'', welcher, wie aus dem oben angeführten Satze erhellet, der gesuchte Mittelpunkt der Kugel ist, deren Oberfläche durch die vier gegebenen Punkte A, B, C, D im Raume geht.

25. Den Durchschnitt zweier Kugeln zu bestimmen, deren Mittelpunkte und Halbmesser gegeben sind.

Die Mittelpunkte der beiden Kugeln seyen C, c. Denkt man sich nun durch die beiden Mittelpunkte eine Ebene gelegt; so wird dieselbe die beiden Kugeln in zwei größten Kreisen schneiden, deren Durchschnittspunkte D, E seyn mögen, und aus den einfachsten geometrischen Sätzen erhellet, daß die gemeinschaftliche Sehne DE der beiden Kreise auf der Linie Cc senkrecht steht, und von derselben halbirt wird. Stellen wir uns jetzt vor, daß die ganze entstandene Figur um die Linie Cc wie um eine Axe gedreht werde; so werden die beiden größten Kreise offenbar die beiden Kugeln und DE wird einen auf Cc senkrechten Kreis beschreiben, welcher der Durchschnitt der beiden Kugeln ist, woraus man also sieht, daß der gemeinschaftliche Durchschnitt jeder zwei Kugeln ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Centrallinie Cc der beiden Kugeln senkrecht steht. In Fig. 26. seyen nun C', c' und C'', c'' die horizontalen und vertikalen Projectionen der Mittelpunkte der beiden Kugeln, also C'c' und C''c'' die horizontale und vertikale Projection ihrer Centrallinie. Auf C'c' errichte man durch die beiden Endpunkte C', c' zwei Perpendikel CC' = C''K, cc' = c''k, beschreibe aus C und c als Mittelpunkten mit den gegebenen Halbmessern der beiden Kugeln zwei Kreise, welche sich in D und E schneiden mögen, ziehe DE und verlängere diese Linie bis zu ihrem Durchschnittspunkte G mit der Linie C'c'; so ist G offenbar ein Punkt in der Durchschnittslinie der Ebene des gemeinschaftlichen Durchschnitts der beiden Kugeln und der Horizontalebene. Da nun nach dem Vorhergehenden die Ebene des gemeinschaftlichen Durchschnitts der beiden Kugeln auf der Centrallinie Cc derselben senkrecht steht; so braucht man nach (15.) bloß durch G auf die horizontale Projection der Centrallinie Cc das Perpendikel MN zu errichten, und durch N auf die vertikale Projection der Centrallinie Cc das Perpendikel M'N zu fällen, um die Durchschnitte MN, M'N der Ebene des gemeinschaftlichen Durchschnitts der beiden Kugeln mit den Projectionsebenen zu finden. Die Projectionen des Mittelpunkts des gemeinschaftlichen Durchschnitts der beiden Kugeln ergeben sich, wenn man von F auf C'c' das Perpendikel FF' und von F' auf AB das Perpendikel F'F'', welches die vertikale Projection der Centrallinie in F'' schneidet, fällt, indem dann offenbar F' und F'' die horizontale und vertikale Projection des Mittelpunkts des Schnitts seyn

werden. Der Durchmesser des Schnitts ist durch die Linie **DE** unmittelbar gegeben, und auf diese Weise also Lage und Größe des Schnitts vollständig bestimmt.

Um nun auch die Projectionen des Durchschnitts der beiden Kugeln auf der Horizontal- und Vertikalebene zu finden, kann man auf folgende Art verfahren. Aus **F** als Mittelpunkt mit **DF = EF** als Halbmesser beschreibe man einen Kreis, nehme in **DE** einen beliebigen Punkt **g** an, und errichte durch denselben auf **DE** das Perpendikel **hi**. Hierauf fälle man von **g** auf **C'c'** das Perpendikel **gg'**, verlängere es über **g'** hinaus, und mache $g'h' = g'i' = gh = gi$; so sind, wie leicht erhellen wird, **h'** und **i'** zwei Punkte der horizontalen Projection des Durchschnitts der beiden Kugeln. Die entsprechenden Punkte der vertikalen Projection erhält man, wenn man von **h'** und **i'** auf **AB** die Perpendikel **h'm**, **i'n** fällt, dieselben über **m** und **n** hinaus verlängert, und $mh'' = ni'' = gg'$ macht. Daß man auf diese Art beliebig viele Punkte der horizontalen und vertikalen Projectionen des Durchschnitts der beiden Kugeln finden und diese Projectionen also selbst construiren kann, liegt deutlich vor Augen, so wie auch aus bekannten stereometrischen Sätzen erhellet, daß beide Projectionen Ellipsen sind.

26. Die Construction der Projectionen der Durchschnitte krummer Flächen macht einen Haupttheil der descriptiven Geometrie aus; wir können uns aber hier nicht weitläufig über diesen Gegenstand verbreiten, und beschränken uns daher bloß auf das folgende Beispiel. Denken wir uns nämlich eine Kugel und einen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche, die sich durchschneiden; so schneiden sich die Oberflächen dieser beiden Körper offenbar in zwei krummen Linien. Um die Projectionen dieser beiden krummen Linien zu construiren, nehme man die Grundfläche des Kegels als die Horizontalebene, eine beliebige darauf senkrechte Ebene als die Vertikalebene an. Der in Fig. 27. um **C'** beschriebene Kreis sey die Grundfläche des Kegels, und **S'**, **S''** seyen die beiden Projectionen seiner Spitze auf der Horizontal- und Vertikalebene. Die Projectionen des Mittelpunktes der gegebenen Kugel seyen **c'**, **c''**. Durch **S'** denke man sich eine beliebige den Umfang der Grundfläche des Kegels in den beiden Punkten **K**, **K'** schneidende gerade Linie und durch diese Linie eine auf der Horizontalebene senkrechte Ebene gelegt. Diese Ebene denke man sich ferner, um ihren Durchschnitt mit dem Kegel und der Kugel mit Leichtigkeit zu construiren, in die Vertikalebene niedergelegt, nehme $sk = S'K$, $sk' = S'K'$, ziehe **S''k**, **S''k'**, fälle von **c'** auf **S'K** das Perpendikel **c'G**, ziehe durch **c''** mit **AB** eine Parallele, und nehme auf derselben die Linie $mg = S'G$; so ist **g** offenbar der Mittelpunkt des Kreises, in welchem die gegebene Kugel von der durch die Linie **S'K** gelegten, auf der Horizontalebene senkrechten, Ebene geschnitten wird. Beschreibt man dann mit dem Radius der gegebenen Kugel um **c'** und mit

$GH = GH'$ als Radius um g einen Kreis; so ist letzterer der Kreis, in welchem die Kugel von der durch S'K gelegten, auf der Horizontalebene senkrechten, Ebene geschnitten wird. Dieser Kreis schneidet die Linien S''k, S''k' in den vier in der Figur durch P bezeichneten Punkten, welche offenbar Punkte der beiden Durchschnitte der Oberflächen des Kegels und der Kugel sind, wobei man zu bemerken hat, daß zwei dieser Punkte jederzeit zu dem bei dem Eintritt des Kegels in die Kugel, die beiden andern zu dem bei dem Austritt des Kegels aus der Kugel gebildeten Durchschnitt gehören. Um nun die Projectionen der durch P bezeichneten Punkte zu finden, ziehe man durch dieselben Parallelen, wie Pn, mit der Linie AB, nehme $S'P' = Pn$, und fälle von P' auf AB ein Perpendikel, welches, gehörig verlängert, die Linie Pn in einem gewissen Punkte P'' schneiden wird. P' und P'' sind dann die beiden gesuchten Projectionen, wobei sich von selbst versteht, daß für jeden der vier durch P bezeichneten Punkte die Construction ganz auf dieselbe Art gemacht wird. Da die Linie S'K ganz willkührlich angenommen werden kann, so ist klar, daß man auf diese Weise beliebig viele Punkte der beiden Projectionen der Durchschnitte der Kegel- und der Kugelfläche finden, und folglich diese Projectionen auch selbst verzeichnen kann, indem man die einzelnen Punkte derselben durch eine stetige Curve mit einander verbindet, wobei man sich, wenn eine solche Construction wirklich ausgeführt werden sollte, nur vorzusehen hat, daß man bloß alle die Punkte mit einander verbindet, welche zu einerlei Durchschnittslinie, nämlich entweder zu der bei dem Eintritt des Kegels in die Kugel oder zu der bei dem Austritt des Kegels aus der Kugel gebildeten Durchschnittslinie gehören, welches sich immer leicht entscheiden lassen wird. Zu bemerken ist hierbei noch, daß wir zwar vorher die Grundfläche des Kegels als einen Kreis angenommen haben, daß die obige Construction aber auf alle Arten von Kegeln anwendbar ist, deren Grundflächen nur ebene oder einfachgekrümmte Curven sind.

Wer sich vollständiger mit den Lehren der descriptiven Geometrie bekannt machen will, findet einen sehr zu empfehlenden Abriß derselben in **Lacroix Essais de Géometrie sur les plans et les surfaces courbes (Élémens de Géométrie descriptive). 6e édition. Paris 1829.** Das Hauptwerk ist: **Monge Géométrie descriptive, 5e édition, augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par Brisson. Paris 1827.**

Gleichung. Der vielfache Gebrauch, welchen wir in diesem wichtigen Artikel von den imaginären Größen zu machen genöthigt seyn werden, erfordert, daß wir mit einigen allgemeinen Betrachtungen über dieselben beginnen.

Ueberhaupt bemerken wir, daß wir in diesem Artikel eine ganz elementare und zugleich rein algebraische Darstellung der

Theorie der Gleichungen zu geben versucht haben. Nur ein Mal, nämlich in (22.), sind wir von diesem Vorsatze abgewichen und haben Sätze aus der Trigonometrie und Integralrechnung in Anwendung gebracht. Der an diesem Orte gegebene Beweis eines wichtigen algebraischen Theorems ist aber bloß seiner Schönheit wegen eingeschaltet worden, und kann, ohne den Zusammenhang zu unterbrechen, übergangen werden, da derselbe Satz schon vorher auf andere Art bloß durch ganz elementare Hülfsmittel in aller Strenge bewiesen worden ist.

I. Von den imaginären Größen.

1. Jeder analytische Ausdruck von der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}$$

heißt eine imaginäre Größe oder ein imaginärer Ausdruck.

Den Modulus dieser imaginären Größe nennt man die Größe

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

wobei die Quadratwurzel immer positiv genommen wird.

Zwei imaginäre Größen von der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

heißen conjugirte imaginäre Größen.

Conjugirte imaginäre Größen haben jederzeit einerlei Modulus.

Zwei imaginäre Größen heißen einander gleich, wenn sowohl ihre beiden reellen Theile, als auch die beiden ebenfalls reellen Coefficienten von $\sqrt{-1}$ einander gleich sind. Ist also

$$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta;$$

so ist immer

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}.$$

Gleiche imaginäre Größen haben offenbar gleiche Moduli.

2. Die Summe der imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},\ \alpha''' + \beta'''\sqrt{-1}, \ldots.$$

ist

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \ldots. + (\beta + \beta' + \beta'' + \beta''' + \ldots.)\sqrt{-1}.$$

3. Die Differenz der imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

ist

$$\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1}.$$

4. Das Product der imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

ist

$$\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

5. Setzt man

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = p + q\sqrt{-1},$$

so muß

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = (\gamma + \delta\sqrt{-1})(p + q\sqrt{-1}),$$

d. i. nach (4.)

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma p - \delta q + (\delta p + \gamma q)\sqrt{-1}$$

seyn. Dies giebt nach (1.) zur Bestimmung von p und q die Gleichungen

$$\gamma p - \delta q = \alpha, \quad \delta p + \gamma q = \beta,$$

aus denen leicht

$$p = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \quad q = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2};$$

folglich

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}$$

erhalten wird.

Weil

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-1}}{\gamma^2 + \delta^2},$$

und nach (4.)

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1}) = \alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-1}$$

ist; so ist auch

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1})}{\gamma^2 + \delta^2},$$

wo $\gamma - \delta\sqrt{-1}$ die dem Divisor $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ conjugirte imaginäre Größe, und $\gamma^2 + \delta^2$ das Quadrat des Modulus des Divisors ist.

Soll man die imaginäre Größe

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}$$

durch die reelle Größe γ dividiren, so hat man im Vorhergehenden $\delta = 0$ zu setzen, woraus sich

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{-1}$$

ergiebt.

6. Der Modulus des Products zweier imaginären Größen ist immer das Product der Moduli der beiden imaginären Factoren.

Das Product der beiden imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

ist nämlich nach (4.)

$$\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

Die Moduli der beiden imaginären Factoren sind respective

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}},\ (\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Modulus ihres Products ist

$$\{(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet,

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2).$$

Folglich ist

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

der Modulus des Products, d. i. das Product der Moduli der beiden imaginären Factoren.

Hieraus ergiebt sich nun auch unmittelbar, daß der Modulus des Products mehrerer imaginärer Factoren, in beliebiger Anzahl, jederzeit das Product der Moduli aller einzelnen Factoren ist.

7. Der Modulus der Summe und Differenz zweier imaginären Größen ist immer eine Mittelgröße zwischen der Summe und Differenz der Moduli dieser beiden imaginären Größen, wobei wir rücksichtlich des Begriffs einer Mittelgröße und der Sätze von den Mittelgrößen, welche nachher gebraucht werden, auf den Artikel Mittel i. d. Z. verweisen.

Die Summe und Differenz der beiden imaginären Größen

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

sind nach dem Vorhergehenden

$$\alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}$$

und

$$\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1}.$$

Die Moduli dieser beiden Größen sind

$$\{(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2\}^{\frac{1}{2}} = \{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}};$$

und

$$\{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2\}^{\frac{1}{2}} = \{\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun, wie leicht erhellet,

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

ist; so ist

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 \leqq (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2).$$

Also ist der absolute Werth von $\alpha\gamma + \beta\delta$ eben so groß oder kleiner als

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}},$$

und folglich offenbar immer

$$\alpha\gamma + \beta\delta$$

eine Mittelgröße zwischen

$$-(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und } +(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach bekannten Sätzen von den Mittelgrößen ist also auch

$$2(\alpha\gamma + \beta\delta)$$

eine Mittelgröße zwischen

$$-2(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und } +2(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}};$$

also auch jede der Größen

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2,$$

jederzeit eine Mittelgröße zwischen

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \gamma^2 + \delta^2$$

und

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \gamma^2 + \delta^2,$$

d. i. zwischen

$$\{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\}^2 \text{ und } \{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\}^2.$$

Folglich ist auch nach einem ebenfalls im Artikel Mittel i. d. Z. bewiesenen Satze jede der Größen

$$\{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\{\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}}$$

eine Mittelgröße zwischen

$$\pm\{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\} \text{ und } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2},$$

wenn man nur das Zeichen immer so nimmt, daß die erstere Größe positiv wird. Hierin ist aber offenbar der zu beweisende Satz enthalten.

Uebrigens versteht sich nun auch von selbst, daß jede der Größen

$$\{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\{\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) + \gamma^2 + \delta^2\}^{\frac{1}{2}}$$

jederzeit eine Mittelgröße zwischen

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \text{ und } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$$

ist.

Auch ergiebt sich hieraus auf der Stelle, daß der Modulus der Summe mehrerer imaginärer Größen, in beliebiger Anzahl, nie größer ist als die Summe der Moduli aller einzelnen imaginären Größen.

Diese Sätze von den imaginären Größen reichen für das Folgende hin. Der Artikel Unmögliche Größen verbreitet sich weiter über dieselben.

II. Allgemeine Eigenschaften der Gleichungen.

8. Jede Gleichung läßt sich offenbar immer auf die Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

bringen, und unter dieser Form sollen daher im Folgenden auch alle Gleichungen betrachtet werden. Die Coefficienten

$$A, B, C, D \ldots L, N$$

können reelle und imaginäre Größen seyn, werden indeß meistens sämmtlich als reell angenommen. Die Größe

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

auf der linken Seite des Gleichheitszeichens heißt die Function der Gleichung, wenigstens wollen wir im Folgenden uns immer der Kürze wegen dieses Ausdrucks bedienen. Alle Werthe von x, welche der Gleichung genügen oder sie erfüllen, d. h. für welche die Function der Gleichung verschwindet oder $= 0$ wird, heißen Wurzeln der Gleichung, und können reell und imaginär seyn. Sämmtliche Wurzeln einer Gleichung finden, heißt dieselbe auflösen. Wenn im Folgenden nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird, so sollen immer alle Coefficienten der Gleichungen reelle Größen seyn. Auch wollen wir der Kürze wegen die obige allgemeine Form der Gleichungen durch

$$f(x) = 0$$

bezeichnen, wo also $f(x)$ die Function der Gleichung oder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

ist.

9. Von ganz vorzüglicher Wichtigkeit für die Theorie der Gleichungen ist folgender Lehrsatz, von dem wir daher hier unsern Auslauf nehmen wollen:

Wenn sämmtliche Coefficienten der Gleichung

$$f(x) = 0$$

reelle Größen sind, und für zwei reelle Werthe x_1, X_1 von x die entsprechenden Werthe der Function $f(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; so liegen zwischen x_1 und X_1 jederzeit eine oder mehrere reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Man lasse x sich von x_1 bis X_1 stetig verändern, so wird auch $f(x)$ sich von $f(x_1)$ bis $f(X_1)$ stetig verändern, wenn nur, wie hier immer angenommen wird, alle Coefficienten der Gleichung $f(x) = 0$ endliche bestimmte reelle Größen sind. Da nun nach der Voraussetzung $f(x_1)$ und $f(X_1)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, und $f(x)$ nicht vom Positiven zum Negativen oder

vom Negativen zum Positiven übergehen kann, ohne $= 0$ zu werden; so ist klar, daß $f(x)$ für einen oder einige zwischen x_1 und X_1 liegende Werthe von x verschwinden oder $= 0$ werden muß, daß also die Gleichung $f(x) = 0$ jederzeit eine oder einige reelle zwischen x_1 und X_1 liegende Wurzeln haben muß, wenn die Voraussetzungen unsers Satzes erfüllt sind.

So einfach und völlig überzeugend dieser Beweis, der auch leicht durch geometrische Betrachtungen, wenn man sich nämlich die Werthe von x als Abscissen, die entsprechenden Werthe von $f(x)$ dagegen als Ordinaten einer stetigen Curve denkt, zu noch größerer Deutlichkeit gebracht werden könnte, auch ist; so halten wir doch aus Gründen, auf die wir nachher besonders hinweisen werden, auch den folgenden, freilich weitläufigern, Beweis nicht für überflüssig. Man nehme an, daß x_1 von den beiden Größen x_1, X_1 die kleinere sey, und setze

$$X_1 - x_1 = h ,$$

wo also h eine positive Größe ist (Ungleich. 1.). Ferner bilde man, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, die größer als die Einheit ist, die Reihe der Größen:

$$f(x_1),\ f\left(x_1 + \frac{h}{k}\right),\ f\left(x_1 + 2\frac{h}{k}\right),\ \ldots f\left(x_1 + (k-1)\frac{h}{k}\right),\ f\left(x_1 + k\frac{h}{k}\right);$$

d. i., wie leicht erhellet, die Reihe der Größen

$$f(x_1),\ f\left(x_1 + \frac{h}{k}\right),\ f\left(x_1 + 2\frac{h}{k}\right),\ \ldots f\left(X_1 - \frac{h}{k}\right),\ f(X_1) .$$

Da nun $f(x_1)$ und $f(X_1)$ nach der Voraussetzung entgegengesetzte Vorzeichen haben; so muß man, wenn man in vorstehender Reihe das erste und zweite, zweite und dritte, dritte und vierte Glied, u. s. w. mit einander vergleicht, jederzeit offenbar ein oder einige Paare auf einander folgender Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen finden. Sind nun, indem wir $x_2 < X_2$ setzen,

$$f(x_2) \text{ und } f(X_2)$$

zwei solche auf einander folgende Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen in vorstehender Reihe; so ist offenbar

$$x_1 \leqq x_2 < X_2 \leqq X_1 ,$$

$$X_2 - x_2 = \frac{h}{k} = \frac{1}{k}(X_1 - x_1) = h_1 ,$$

wobei zu bemerken ist, daß hier und nachher zwischen den obern und untern Zeichen keine Beziehung statt findet, so wie sich auch von selbst versteht, daß h_1 positiv ist.

Bildet man ferner, nachdem x_2 und X_2 gefunden sind, die Reihe

$$f(x_2),\ f\left(x_2 + \frac{h_1}{k}\right),\ f\left(x_2 + \frac{h_1}{k}\right),\ \ldots f\left(X_2 - \frac{h_1}{k}\right),\ f(X_2) ;$$

so muß es in derselben wieder mindestens zwei auf einander folgende Glieder

$$f(x_3) \text{ und } f(X_3)$$

mit entgegengesetzten Vorzeichen geben, und es ist, wenn wir $x_3 < X_3$ setzen, offenbar

$$x_2 \leqq x_3 < X_3 \leqq X_2 ,$$

$$X_3 - x_3 = \frac{h_1}{k} = \frac{1}{k^2}(X_1 - x_1) = h_2 .$$

Ganz eben so wird man in der Reihe

$$f(x_3), f\left(x_3 + \frac{h_2}{k}\right), f\left(x_3 + 2\frac{h_2}{k}\right), \ldots f\left(X_3 - \frac{h_2}{k}\right), f(X_3)$$

jederzeit mindestens zwei auf einander folgende Glieder

$$f(x_4) \text{ und } f(X_4)$$

mit entgegengesetzten Vorzeichen finden können, für welche, wenn wir $x_4 < X_4$ setzen,

$$x_3 \leqq x_4 < X_4 \leqq X_3 ,$$

$$X_4 - x_4 = \frac{h_2}{k} = \frac{1}{k^3}(X_1 - x_1) = h_3$$

ist, wobei zugleich erhellet, daß man auf diese Weise beliebig weit fortgehen kann.

Man erhält durch dieses Verfahren zwei Reihen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots ;$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots$$

von Werthen der Größe x, deren erstere im Allgemeinen eine wachsende, die letztern dagegen eine abnehmende Reihe bilden; und für je zwei über einander stehende Glieder dieser Reihen haben die entsprechenden Werthe von $f(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Die Differenzen der über einander stehenden Glieder dieser Reihen sind nach dem Obigen:

$$X_1 - x_1 = h ,$$

$$X_2 - x_2 = h_1 = \frac{1}{k}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k}h ,$$

$$X_3 - x_3 = h_2 = \frac{1}{k^2}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k^2}h ,$$

$$X_4 - x_4 = h_3 = \frac{1}{k^3}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k^3}h ,$$

$$X_5 - x_5 = h_4 = \frac{1}{k^4}(X_1 - x_1) = \frac{1}{k^4}h ,$$

u. s. w. u. s. w.

woraus man sieht, daß diese Differenzen immer kleiner und kleiner werden, und, wenn man das obige Verfahren nur weit genug fortsetzt, der Null beliebig nahe gebracht werden können, so daß also offenbar weder die Glieder der Reihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots$$

über alle Gränzen wachsen, noch die Glieder der Reihe

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots\ldots$$

über alle Gränzen abnehmen können, sondern in beiden Reihen sich augenscheinlich einer und derselben bestimmten Gränze, welche wir durch a bezeichnen wollen, bis zu jedem beliebigen Grade nähern müssen. Zugleich werden sich also auch die Glieder jeder der beiden Reihen

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), \ldots\ldots;$$
$$f(X_1), f(X_2), f(X_3), f(X_4), f(X_5), \ldots\ldots$$

fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Gränze $f(a)$ nähern. Weil aber je zwei unter einander stehende Glieder dieser beiden Reihen nach dem Obigen entgegengesetzte Vorzeichen haben, und diese Glieder sich selbst und der Gränze $f(a)$ bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden können; so kann offenbar $f(a)$ nur $= 0$ seyn. Also giebt es unter den Voraussetzungen unsers Satzes immer mindestens einen reellen Werth a von x, für welchen $f(x) = 0$ ist, d. i. eine reelle Wurzel dieser letztern Gleichung, welche, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht, da a die Gränze ist, welcher sich sowohl die Glieder der wachsenden Reihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots,$$

als auch die Glieder der abnehmenden Reihe

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots\ldots$$

fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man zugleich bedenkt, daß jedes Glied der zweiten Reihe größer als das entsprechende Glied der ersten Reihe ist, offenbar zwischen x_1 und X_1 liegt. Eben so leicht überzeugt man sich, daß a überhaupt zwischen zwei über einander stehenden Gliedern der Reihen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots;$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \ldots\ldots$$

liegt.

Das Hauptverdienst dieses zweiten Beweises unsers Satzes besteht darin, daß derselbe zugleich eine allgemeine Methode enthält, nach welcher wenigstens eine der zwischen x_1 und X_1 liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ durch Annäherung mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit jederzeit wirklich gefunden werden kann. Da a überhaupt zwischen x_p und X_p liegt, oder eine Mittelgröße zwischen x_p und X_p ist, welches wir wie im Artikel Mittel i. d. Z. durch

$$a = M(x_p, X_p)$$

bezeichnen wollen; so ist nach den a. a. O. bewiesenen Sätzen auch

$$a - \frac{x_p + X_p}{2} = M\left\{x_p - \frac{x_p + X_p}{2}, X_p - \frac{x_p + X_p}{2}\right\},$$

d. i.

$$a - \frac{x_p + X_p}{2} = M\left\{-\frac{X_p - x_p}{2}, \frac{X_p - x_p}{2}\right\},$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden

$$X_p - x_p = \frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}$$

ist:

$$a - \frac{x_p + X_p}{2} = M\left\{-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}, \tfrac{1}{2}\cdot\frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}\right\},$$

so daß also der absolute Werth von

$$a - \frac{x_p + X_p}{2},$$

d. i. der Fehler, welchen man begeht, wenn man die halbe Summe der Größen

$$x_p \text{ und } X_p$$

als eine zwischen x_1 und X_1 liegende reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ betrachtet, jederzeit kleiner als

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{X_1 - x_1}{k^{p-1}}$$

ist, wodurch also zugleich auch eine Methode zur sichern Beurtheilung des Grades der erreichten Annäherung bei der obigen Approximationsmethode zur Auffindung der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gegeben ist. Diese Annäherungsmethode weiter zu verfolgen, gehört jetzt nicht zu unserm Zwecke.

10. Die Function

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

läßt sich immer in die beiden Factoren

$$x^n \text{ und } 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots + \frac{L}{x^{n-1}} + \frac{N}{x^n}$$

zerlegen. Je größer man den absoluten Werth von x werden läßt, desto mehr nähert sich der zweite Factor der Einheit, und kann derselben offenbar beliebig nahe gebracht werden, wenn man den absolnten Werth von x nur groß genug annimmt. Man sieht hieraus, daß man die positive Größe a immer groß genug annehmen kann, daß der zweite der beiden obigen Factoren sowohl für $x = -a$, als auch für $x = a$ positiv ist. Ist nun n eine ungerade Zahl, so ist x^n für $x = -a$ negativ, für $x = a$ dagegen positiv. Ist also n eine ungerade Zahl, so ist das Produkt der beiden obigen Factoren, d. i. $f(x)$, für $x = -a$ negativ, für $x = a$ dagegen positiv, und es muß also nach dem in (9.) bewiesenen Lehrsatze zwischen $-a$ und $+a$ mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen. Hieraus ergiebt sich also der folgende für die ganze Theorie der Gleichungen ebenfalls höchst wichtige Lehrsatz:

Jede Gleichung eines ungeraden Grades mit lauter reellen Coefficienten hat jederzeit mindestens eine reelle Wurzel.

11. Ist n eine gerade Zahl, so ist das Product der beiden obigen Factoren, d. i. $f(x)$, sowohl für $x = -a$, als auch für $x = a$, positiv. Ist nun ferner die Größe N negativ, so ist $f(x)$ für $x = 0$ eine negative Größe, weshalb also nach dem in (9.) bewiesenen Lehrsatze sowohl zwischen 0 und $-a$, als auch zwischen 0 und $+a$, mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen muß, woraus sich der folgende Lehrsatz ergiebt:

Jede Gleichung eines geraden Grades mit lauter reellen Coefficienten, deren letztes Glied eine negative Größe ist, hat jederzeit mindestens zwei reelle Wurzeln, von denen die eine immer positiv, die andere negativ ist.

12. **Wenn in der Function $f(x)$ alle Coefficienten reelle Größen sind, das letzte Glied negativ ist, und, sofern positive Glieder vorkommen, diese Glieder sämmtlich unmittelbar auf das erste Glied folgen; so hat die Gleichung $f(x) = 0$ jederzeit eine, aber auch nur eine, reelle positive Wurzel.**

Dieser Satz läßt sich auf folgende Art leicht beweisen. Man bezeichne die positiven Werthe der Coefficienten

$$A, B, C, \ldots L, N$$

der Reihe nach durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n;$$

so hat die Gleichung, den Voraussetzungen des Satzes gemäß, im Allgemeinen folgende Form:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_m x^{n-m} - a_{m+1} x^{n-m-1} - \ldots - a_{n-1} x - a_n = 0,$$

wo m natürlich eine positive ganze Zahl bezeichnet, die kleiner als n ist. Die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens läßt sich offenbar jederzeit in die beiden Factoren x^{n-m} und

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m - \left\{\frac{a_{m+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-m-1}} + \frac{a_n}{x^{n-m}}\right\}$$

zerlegen. Läßt man nun x von 0 bis ∞ stetig wachsen, so wächst die Größe

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = \varphi(x)$$

stetig von a_m bis ∞, die Größe

$$\frac{a_{m+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-m-1}} + \frac{a_n}{x^{n-m}} = \psi(x)$$

nimmt dagegen von ∞ bis 0 stetig ab. Läßt man also x von 0 bis ∞ stetig wachsen, so nimmt die Differenz

$$\varphi(x) - \psi(x)$$

offenbar von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig zu, und muß folglich jederzeit für einen, aber auch nur für einen, positiven Werth von x verschwinden. Für diesen Werth von x verschwindet also auch das Product

$$x^{n-m}\{\varphi(x) - \psi(x)\} = f(x),$$

oder dieser Werth von x ist eine reelle positive Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0.$$

Eine Gleichung von der Form

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = 0$$

hat also z. B. immer eine, aber auch nur eine, reelle positive Wurzel, wenn nämlich $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ sämmtlich reelle positive Größen sind.

13. Wir wollen nun annehmen, daß die Coefficienten der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

wo immer die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens durch $f(x)$ bezeichnet wird, beliebige reelle oder imaginäre Größen seyen. Die Moduli der Größen

$$A, B, C, \ldots L, N$$

sollen immer durch

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{n-1}, \varrho_n$$

bezeichnet werden. Ein beliebiger Werth von x sey

$$p + q\sqrt{-1}$$

und der Modulus dieser Größe sey r; so sind, wie aus dem in (6.) bewiesenen Satze auf der Stelle folgt, die Moduli der Größen

$$x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots x$$

respective

$$r^n, r^{n-1}, r^{n-2}, \ldots r.$$

Die Moduli der Größen

$$x^n, Ax^{n-1}, Bx^{n-2}, \ldots Lx, N$$

sind also nach demselben Satze

$$r^n, \varrho_1 r^{n-1}, \varrho_2 r^{n-2}, \ldots \varrho_{n-1} r, \varrho_n.$$

Nach dem in (7.) bewiesenen Satze ist folglich der Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

eben so groß oder kleiner wie die Summe

$$\varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n.$$

Bezeichnen wir also den Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

durch R_1; so ist

$$R_1 \leqq \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n .$$

Nach dem in (7.) bewiesenen Satze ist der Modulus der Größe

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N ,$$

welchen wir durch R bezeichnen wollen, eine Mittelgröße zwischen

$$r^n - R_1 \text{ und } r^n + R_1 ,$$

d. i. nach der schon oben gebrauchten Bezeichnung

$$R = M(r^n - R_1, r^n + R_1) .$$

Weil nun aber nach dem Vorhergehenden

$$r^n - R_1 \gtreqless r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n ,$$

$$r^n + R_1 \leqq r^n + \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n$$

ist; so ist natürlich der Modulus R immer auch eine Mittelgröße zwischen

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n$$

und

$$r^n + \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \ldots + \varrho_{n-1} r + \varrho_n ,$$

oder stets größer oder eben so groß wie die Größe

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n .$$

Nach dem in (12.) bewiesenen Satze hat die Gleichung

$$\xi^n - \varrho_1 \xi^{n-1} - \varrho_2 \xi^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} \xi - \varrho_n = 0$$

jederzeit eine reelle positive Wurzel, welche ξ selbst seyn mag, so daß also

$$\xi^n \left\{ 1 - \frac{\varrho_1}{\xi} - \frac{\varrho_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{\varrho_{n-1}}{\xi^{n-1}} - \frac{\varrho_n}{\xi^n} \right\} = 0$$

ist. Betrachten wir nun das Product

$$r^n \left\{ 1 - \frac{\varrho_1}{r} - \frac{\varrho_2}{r^2} - \ldots - \frac{\varrho_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{\varrho_n}{r^n} \right\} ,$$

so ist klar, daß dieses Product, indem wir r immer als positiv annehmen, wächst, wenn r wächst, und über alle Gränzen wachsen kann, wenn man r über alle Gränzen wachsen läßt. Für $r = \xi$ ist dieses Product $= 0$, und ist also stets positiv, wenn $r > \xi$ ist, wächst auch fortwährend und über alle Gränzen, wenn man r von ξ bis ∞ wachsen läßt. r ist der Modulus der Größe $p + q\sqrt{-1}$, d. i. nach (1.)

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} ,$$

so daß man also offenbar r beliebig groß werden lassen kann, wenn man nur den reellen Größen p, q geeignete Werthe beilegt. Das eben betrachtete Product

$$r^n \left\{ 1 - \frac{\varrho_1}{r} - \frac{\varrho_2}{r^2} - \ldots - \frac{\varrho_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{\varrho_n}{r^n} \right\}$$

ist nichts anders wie die Größe

$$r^n - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \ldots - \varrho_{n-1} r - \varrho_n ,$$

welche immer kleiner oder eben so groß wie der Modulus **R** ist. Da nun diese Größe nach dem Vorhergehenden, wenn man **r** von ξ bis ∞ wachsen läßt, stets positiv ist und über alle Gränzen wächst; so wächst auch der Modulus **R**, wenn man **r** von ξ bis ∞ wachsen läßt, über alle Gränzen, woraus sich unmittelbar in völliger Strenge ergiebt, daß der kleinste Werth des Modulus **R** jederzeit einem endlichen bestimmten Werthe von **r** und folglich natürlich auch von

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

entspricht.

Weil nach (4.) jede Potenz der Größe $p + q\sqrt{-1}$ und auch jedes Product zweier imaginären Größen dieser Form wieder auf dieselbe Form gebracht werden kann; so ist klar, daß die Größe

$$(p + q\sqrt{-1})^n + A(p + q\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1}) + N ,$$

deren Modulus **R** ist, immer auf die Form

$$P + Q\sqrt{-1}$$

gebracht werden kann.

Man setze nun für **x** einen beliebigen von $p + q\sqrt{-1}$ verschiedenen Werth, der im Allgemeinen durch

$$p + q\sqrt{-1} + z$$

dargestellt werden mag; so wird die Function unserer Gleichung

$$(p+q\sqrt{-1}+z)^n + A(p+q\sqrt{-1}+z)^{n-1} + \ldots + L(p+q\sqrt{-1}+z) + N,$$

eine Größe, welche offenbar immer auf die Form

$$P + Q\sqrt{-1} + (P_1 + Q_1\sqrt{-1})z + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + z^n$$

gebracht werden kann, wobei es wohl nicht erst noch der besondern Bemerkung bedarf, daß

$$P, P_1, P_2, \ldots P_{n-1}; \; Q, Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$$

sämmtlich reelle Größen sind.

Ist nun zuerst $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$ nicht null, so kann man die an sich willkührliche Größe **z** der Größe

$$-\varepsilon\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_1 + Q_1\sqrt{-1}}$$

gleich setzen, wo ε eine sehr kleine positive Größe bezeichnen soll. Führt man diesen Werth von **z** ein; so werden die beiden ersten Glieder der Function unserer Gleichung nach dem Obigen

$$P + Q\sqrt{-1}, \; -(P + Q\sqrt{-1})\varepsilon .$$

Dividirt man also die auf diese Weise erhaltene Function von ε durch $P + Q\sqrt{-1}$, so ist der Quotient offenbar eine Größe von der Form

$$1 - \varepsilon + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1}\varepsilon^n ,$$

wo $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$ gewisse reelle oder imaginäre Coefficienten sind. Für

$$z = -\varepsilon\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_1 + Q_1\sqrt{-1}}$$

ist also

$$(p+q\sqrt{-1}+z)^n + A(p+q\sqrt{-1}+z)^{n-1} + \ldots + L(p+q\sqrt{-1}+z) + N$$
$$= (P+Q\sqrt{-1})(1-\varepsilon+c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1}\varepsilon^n) .$$

Der Modulus der Größe

$$1 - \varepsilon + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1}\varepsilon^n$$

sey Θ; so ist, weil $\mathbf{R}$ der Modulus der Größe

$$P + Q\sqrt{-1}$$

ist, nach (6.) $\Theta\mathbf{R}$ der Modulus der Größe

$$(p+q\sqrt{-1}+z)^n + A(p+q\sqrt{-1}+z)^{n-1} + \ldots + L(p+q\sqrt{-1}+z) + N .$$

Die Moduli der reellen Größen

$$1-\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \ldots \varepsilon^n ,$$

deren erste man immer als positiv annehmen kann, weil ε eine der Null sehr nahe kommende Größe seyn soll, sind offenbar diese Größen selbst. Sind nun

$$k_1, k_2, k_3, \ldots k_{n-1}$$

die Moduli der Größen

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1} ;$$

so sind nach (6.) die Moduli der Größen

$$1-\varepsilon, c_1\varepsilon^2, c_2\varepsilon^3, c_3\varepsilon^4, \ldots, c_{n-1}\varepsilon^n$$

respective

$$1-\varepsilon, k_1\varepsilon^2, k_2\varepsilon^3, k_3\varepsilon^4, k_{n-1}\varepsilon^n ,$$

und nach (7.) ist folglich der Modulus der Größe

$$1-\varepsilon+c_1\varepsilon^2+c_2\varepsilon^3 + \ldots + c_{n-1}\varepsilon^n ,$$

d. i. Θ, nicht größer als die Größe

$$1-\varepsilon+k_1\varepsilon^2+k_2\varepsilon^3 + \ldots + k_{n-1}\varepsilon^n ,$$

so daß also

$$\Theta \leqq 1-\varepsilon(1-k_1\varepsilon-k_2\varepsilon^2 - \ldots - k_{n-1}\varepsilon^{n-1})$$

ist. Hieraus sieht man, daß für der Null sehr nahe kommende Werthe von ε immer

$$\Theta < 1 ,$$

folglich auch

$$\Theta\mathbf{R} < \mathbf{R}$$

seyn wird, vorausgesetzt, daß $\mathbf{R}$ nicht $= 0$ ist.

Ist nun $\mathbf{R}'$ der kleinste Werth des Modulus $\mathbf{R}$, so würde man also nach dem Vorhergehenden, wenn $\mathbf{R}'$ nicht $= 0$ wäre,

ε immer so bestimmen können, daß der Modulus $\Theta R'$ kleiner als R' wäre, welches ungereimt ist, da $\Theta R'$, wie aus dem Obigen erhellet, offenbar auch ein Werth des Modulus R ist, der kleinste Werth dieses Modulus aber eben R' seyn soll. Die Voraussetzung, daß der kleinste Werth des Modulus R nicht $= 0$ wäre, ist folglich falsch, und der kleinste Werth dieses Modulus ist also $= 0$. Alle diese Schlüsse gelten aber bloß, wenn die Größe $P_1 + Q_1\sqrt{-1}$ nicht $= 0$ ist, so daß uns also nur noch der Fall zu betrachten übrig ist, wenn diese Größe verschwindet.

Die erste der Größen

$$P_1 + Q_1\sqrt{-1},\ P_2 + Q_2\sqrt{-1},\ P_3 + Q_3\sqrt{-1},\ \ldots\ P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1},$$

welche nicht verschwindet, sey

$$P_m + Q_m\sqrt{-1};$$

so reducirt sich die Größe

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N$$

oder

$$P + Q\sqrt{-1} + (P_1 + Q_1\sqrt{-1})z + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + z^n$$

auf

$$P + Q\sqrt{-1} + (P_m + Q_m\sqrt{-1})z^m + \ldots + (P_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{-1})z^{n-1} + z^n.$$

Für

$$z = -\varepsilon\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_m + Q_m\sqrt{-1}}$$

werden die beiden ersten Glieder des obigen Polynoms, wenn man sich dasselbe nach Potenzen von ε geordnet denkt,

$$P + Q\sqrt{-1},\ -(P + Q\sqrt{-1})\varepsilon^m,$$

und es ist folglich für

$$z = -\varepsilon\frac{P + Q\sqrt{-1}}{P_m + Q_m\sqrt{-1}}$$

in diesem Falle offenbar

$$(p + q\sqrt{-1} + z)^n + A(p + q\sqrt{-1} + z)^{n-1} + \ldots + L(p + q\sqrt{-1} + z) + N$$
$$= (P + Q\sqrt{-1})(1 - \varepsilon^m + c_1\varepsilon^{m+1} + c_2\varepsilon^{m+2} + \ldots + c_{n-m}\varepsilon^n),$$

auf ganz ähnliche Art wie oben. Sind nun

$$k_1, k_2, k_3, \ldots k_{n-m}$$

die Moduli der Größen

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-m};$$

so überzeugt man sich auf ganz ähnliche Art wie oben, daß, wenn Θ den Modulus der Größe

$$1 - \varepsilon^m + c_1\varepsilon^{m+1} + c_2\varepsilon^{m+2} + \ldots + c_{n-m}\varepsilon^n$$

bezeichnet,

$$\Theta \leqq 1 - \varepsilon^m(1 - k_1\varepsilon - k_2\varepsilon^2 - \ldots - k_{n-m}\varepsilon^{n-m}),$$

folglich, wenn man nur ε nahe genug bei Null annimmt,

$$\Theta < 1, \quad \Theta R < R$$

ist, wobei man wieder zu bemerken hat, daß ΘR der Modulus der Größe

$$(p+q\sqrt{-1}+z)^n + A(p+q\sqrt{-1}+z)^{n-1} + .. + L(p+q\sqrt{-1}+z) + N$$

ist. Durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie vorher ergiebt sich hieraus nun ferner, daß auch in diesem Falle der kleinste Werth des Modulus $R = 0$ seyn muß.

Der kleinste Werth des Modulus R, welcher nach dem Obigen einem endlichen Werthe von r und also auch von x entspricht, ist daher in allen Fällen $= 0$.

R ist nach dem Obigen der Modulus von

$$(p+q\sqrt{-1})^n + A(p+q\sqrt{-1})^{n-1} + .. + L(p+q\sqrt{-1}) + N$$

oder

$$P + Q\sqrt{-1}.$$

Sind nun p', q', P', Q' die endlichen Werthe von p, q, P, Q, welchen der kleinste Werth R' des Modulus R entspricht; so ist, weil

$$R' = \sqrt{P'^2 + Q'^2}$$

und nach dem Vorhergehenden $R' = 0$ ist,

$$P'^2 + Q'^2 = 0.$$

Diese Größe kann aber nur $= 0$ seyn, wenn zugleich

$$P' = 0 \text{ und } Q' = 0$$

ist. Also ist auch

$$P' + Q'\sqrt{-1} = 0,$$

d. i.

$$(p'+q'\sqrt{-1})^n + A(p'+q'\sqrt{-1})^{n-1} + .. + L(p'+q'\sqrt{-1}) + N = 0,$$

und $p' + q'\sqrt{-1}$ ist folglich eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N = 0.$$

Dies führt auf das folgende überaus wichtige Theorem, welches als der Hauptsatz, als der eigentliche Fundamentalsatz, der ganzen Theorie der Gleichungen anzusehen ist:

Jede Gleichung, deren Coefficienten beliebige, nur völlig bestimmte, reelle oder imaginäre Größen sind, hat immer mindestens eine reelle oder imaginäre völlig bestimmte Wurzel von der allgemeinen Form $p + q\sqrt{-1}$.

14. Die Größe

$$x^n - (p+q\sqrt{-1})^n$$

ist immer durch

$$x - (p+q\sqrt{-1})$$

ohne Rest theilbar und der Quotient ist eine ganze Function des $(n-1)$ten Grades von x.

Multiplicirt man nämlich die Größe

$$x^{n-1} + (p+q\sqrt{-1})x^{n-2} + (p+q\sqrt{-1})^2 x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (p+q\sqrt{-1})^{n-2} x + (p+q\sqrt{-1})^{n-1}$$

mit

$$x - p - q\sqrt{-1} = x - (p+q\sqrt{-1});$$

so erhält man die Größe

$$x^n - (p+q\sqrt{-1})^n,$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

15. Wenn die Function

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

für

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

verschwindet; so ist $f(x)$ durch

$$x - (p+q\sqrt{-1})$$

ohne Rest theilbar, und der Quotient ist eine ganze rationale Function des $(n-1)$ten Grades von x von derselben Form wie $f(x)$.

Nach der Voraussetzung ist

$$0 = (p+q\sqrt{-1})^n + A(p+q\sqrt{-1})^{n-1} + \ldots + L(p+q\sqrt{-1}) + N.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N;$$

so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) = {} & x^n - (p+q\sqrt{-1})^n \\ & + A\{x^{n-1} - (p+q\sqrt{-1})^{n-1}\} \\ & + B\{x^{n-2} - (p+q\sqrt{-1})^{n-2}\} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + L\{x - (p+q\sqrt{-1})\}; \end{aligned}$$

also

$$\frac{f(x)}{x-(p+q\sqrt{-1})} =$$

$$\frac{x^n-(p+q\sqrt{-1})^n}{x-(p+q\sqrt{-1})} + A\frac{x^{n-1}-(p+q\sqrt{-1})^{n-1}}{x-(p+q\sqrt{-1})} + \ldots + L\frac{x-(p+q\sqrt{-1})}{x-(p+q\sqrt{-1})}.$$

Weil nun nach dem in (14.) bewiesenen Satze

$$\frac{x^n-(p+q\sqrt{-1})^n}{x-(p+q\sqrt{-1})},\ \frac{x^{n-1}-(p+q\sqrt{-1})^{n-1}}{x-(p+q\sqrt{-1})},\ \ldots\ \frac{x-(p+q\sqrt{-1})}{x-(p+q\sqrt{-1})}$$

respective ganze rationale Functionen des

$(n-1)$ten, $(n-2)$ten, $(n-3)$ten, ... 0ten

Grades von x sind; so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes auf der Stelle.

16. Jede ganze rationale algebraische Function $f(x)$ des nten Grades von x läßt sich als ein Product von n einfachen Factoren des ersten Grades von der Form

$$x - p - q\sqrt{-1}$$

darstellen oder in n solche einfache Factoren zerlegen.

Nach dem in (13.) bewiesenen Satze hat jede Gleichung mindestens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$, die sowohl reell, als auch imaginär seyn kann. Sey daher

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

diese Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

welche es nach dem angeführten Satze nothwendig geben muß, so daß also $f(x)$ für diesen Werth von x verschwindet, und daher, wenn $f_1(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-1)$ten Grades von derselben Form wie $f(x)$ bezeichnet, nach (15.)

$$f(x) = (x - p - q\sqrt{-1})f_1(x)$$

gesetzt werden kann. Aber auch die Gleichung

$$f_1(x) = 0$$

muß nach (13.) mindestens eine Wurzel haben, welche wir durch

$$x = p_1 + q_1\sqrt{-1}$$

bezeichnen wollen, so daß also nach (15.), wenn $f_2(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-2)$ten Grades bezeichnet,

$$f_1(x) = (x - p_1 - q_1\sqrt{-1})f_2(x)$$

gesetzt werden kann. Ferner muß aber auch nach (13.) die Gleichung

$$f_2(x) = 0$$

mindestens eine Wurzel haben, welche

$$x = p_2 + q_2\sqrt{-1}$$

seyn mag, so daß also nach (15.), wenn $f_3(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-3)$ten Grades bezeichnet,

$$f_2(x) = (x - p_2 - q_2\sqrt{-1})f_3(x)$$

gesetzt werden kann. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Zuletzt wird man auf

$$f_{n-2}(x) = (x - p_{n-2} - q_{n-2}\sqrt{-1})f_{n-1}(x),$$

$$f_{n-1}(x) = (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1})f_n(x)$$

kommen, wo $f_n(x)$ eine ganze rationale Function des $(n-n)$ten $=$ Oten Grades, d. i. eine constante Größe ist, die, wie aus

dem Obigen, wegen der hier immer zum Grunde gelegten Form der Function $f(x)$, unmittelbar hervorgeht, nur $= 1$ seyn kann, so daß also

$$f_{n-1}(x) = x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}$$

ist. Durch successive Substitution ergiebt sich nun hieraus auf der Stelle

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (x - p - q\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) , \end{aligned}$$

wodurch also unser Satz bewiesen ist. Wenn unter den Größen

$$q, q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_{n-1}$$

eine verschwindet, so ist der entsprechende einfache Factor eine reelle Größe.

17. Wir wollen nun auch noch zeigen, daß die Zerlegung der ganzen rationalen Function $f(x)$ in n Factoren des ersten Grades jederzeit nur auf eine Art möglich ist.

Zu dem Ende sey

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (x - p - q\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

und auch

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (x - p' - q'\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p'_2 - q'_2\sqrt{-1}) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times (x - p'_{n-1} - q'_{n-1}\sqrt{-1}) . \end{aligned}$$

Das erste Product wird $= 0$ für

$$x = p + q\sqrt{-1} ,$$

und für diesen Werth von x wird also auch das zweite Product $= 0$, welches nicht der Fall seyn kann, wenn nicht einer der Factoren dieses Products für denselben Werth von x verschwindet. Ist nun z. B.

$$x - p' - q'\sqrt{-1}$$

dieser Factor des zweiten Products, so ist also

$$p + q\sqrt{-1} - p' - q'\sqrt{-1} = 0,$$
$$p + q\sqrt{-1} = p' + q'\sqrt{-1},$$
$$x - p - q\sqrt{-1} = x - p' - q'\sqrt{-1}.$$

Durch Division mit diesen beiden Factoren erhält man

$$(x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) = (x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1})$$
$$\times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \times (x - p'_2 - q'_2\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \times (x - p'_{n-1} - q'_{n-1}\sqrt{-1}).$$

Das erste Product verschwindet für

$$x = p_1 + q_1\sqrt{-1},$$

und für denselben Werth von x muß folglich auch das zweite Product verschwinden, welches nicht der Fall seyn kann, wenn nicht ein Factor dieses Products für den in Rede stehenden Werth von x verschwindet. Ist nun z. B.

$$x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1}$$

dieser Factor des zweiten Products, so ergiebt sich wie oben

$$x - p_1 - q_1\sqrt{-1} = x - p'_1 - q'_1\sqrt{-1},$$

und man erhält durch Division mit diesen gleichen Factoren

$$(x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) = (x - p'_2 - q'_2\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \times (x - p'_{n-1} - q'_{n-1}\sqrt{-1}).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen und nach und nach die Identität aller Factoren der beiden oben für $f(x)$ gesetzten Producte nachweisen kann, bedarf keiner weitern Erläuterung.

18. Nach (16.) ist

$$f(x) = (x - p - q\sqrt{-1})$$
$$\times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1})$$
$$\times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}).$$

Also verschwindet $f(x)$ für jeden der folgenden Werthe von x:

$$x = p + q\sqrt{-1},$$
$$x = p_1 + q_1\sqrt{-1},$$
$$x = p_2 + q_2\sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x = p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{-1}.$$

Dies führt unmittelbar zu dem folgenden Lehrsatze:

Jede Gleichung des nten Grades hat n reelle oder imaginäre Wurzeln, unter denen aber, was

man wohl zu beachten hat, auch einander gleiche vorkommen können.

Die Anzahl der sämmtlich von einander verschiedenen reellen oder imaginären Wurzeln, welche eine Gleichung des nten Grades haben kann, kann höchstens = n seyn. Jede ganze rationale algebraische Function des nten Grades kann aber immer in n einfache Factoren des ersten Grades zerlegt werden, unter denen aber auch einander gleiche vorkommen können.

19. Wir wollen nun annehmen, daß alle Coefficienten der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

reelle Größen seyen. Weil allgemein

$$(p \pm q\sqrt{-1})(p' \pm q'\sqrt{-1}) = pp' - qq' \pm (pq' + p'q)\sqrt{-1}$$

ist; so erhellet leicht, daß überhaupt die Potenz

$$(p \pm q\sqrt{-1})^n$$

von der Form

$$P \pm Q\sqrt{-1}$$

ist, wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Wir wollen nun annehmen, daß

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

eine imaginäre Wurzel der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

sey, so daß also, wenn wir jetzt

$$\begin{aligned} x^2 &= p_1 + q_1\sqrt{-1}, \\ x^3 &= p_2 + q_2\sqrt{-1}, \\ x^4 &= p_3 + q_3\sqrt{-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{-1} \end{aligned}$$

setzen,

$$\begin{aligned} &p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{-1} + A(p_{n-2} + q_{n-2}\sqrt{-1}) + \ldots + L(p + q\sqrt{-1}) + N \\ &= \left.\begin{aligned} &p_{n-1} + Ap_{n-2} + Bp_{n-3} + \ldots + Lp + N \\ &+ \{q_{n-1} + Aq_{n-2} + Bq_{n-3} + \ldots + Lq\}\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} = 0, \end{aligned}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} p_{n-1} + Ap_{n-2} + Bp_{n-3} + \ldots + Lp + N &= P, \\ q_{n-1} + Aq_{n-2} + Bq_{n-3} + \ldots + Lq &= Q \end{aligned}$$

setzen,

$$P + Q\sqrt{-1} = 0$$

ist, wo sich nun nach der gemachten Voraussetzung von selbst versteht, daß P und Q reelle Größen sind. Die Größe $P + Q\sqrt{-1}$ kann aber nur dann = 0 seyn, wenn für sich

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

ist.

Setzen wir jetzt

$$x = p - q\sqrt{-1};$$

so ist, wie vorher gezeigt worden ist,

$$x^2 = p_1 - q_1\sqrt{-1},$$
$$x^3 = p_2 - q_2\sqrt{-1},$$
$$x^4 = p_3 - q_3\sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n = p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}.$$

Für $x = p - q\sqrt{-1}$ ist also

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$
$$= p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1} + A(p_{n-2} - q_{n-2}\sqrt{-1}) + \ldots + L(p - q\sqrt{-1}) + N$$
$$= p_{n-1} + Ap_{n-2} + Bp_{n-3} + \ldots + Lp + N$$
$$- \{q_{n-1} + Aq_{n-2} + Bq_{n-3} + \ldots + Lq\}\sqrt{-1}$$
$$= P - Q\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

ist; so ist auch

$$P - Q\sqrt{-1} = 0,$$

oder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

für

$$x = p - q\sqrt{-1},$$

und daher $p - q\sqrt{-1}$ eine Wurzel vorstehender Gleichung. Dies führt auf folgenden Lehrsatz:

Wenn $p + q\sqrt{-1}$ eine imaginäre Wurzel einer Gleichung eines beliebigen Grades mit lauter reellen Coefficienten ist; so ist auch $p - q\sqrt{-1}$ jederzeit eine Wurzel dieser Gleichung, und die imaginären Wurzeln der Gleichungen mit reellen Coefficienten sind also immer paarweise vorhanden, oder jede Gleichung mit reellen Coefficienten kann nur eine gerade Anzahl imaginärer Wurzeln haben. Zwei und zwei imaginäre Wurzeln einer Gleichung mit reellen Coefficienten sind immer einander conjugirt.

Hieraus und aus (18.) ergiebt sich nun auch auf der Stelle, daß jede Gleichung eines geraden Grades mit lauter reellen Coefficienten nur eine gerade, jede Gleichung eines ungeraden Grades mit lauter reellen Coefficienten nur eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln haben kann, auch daß jede Gleichung ei-

nes ungeraden Grades mit lauter reellen Coefficienten immer mindestens eine reelle Wurzel haben muß, wie schon in (10.) auf andere Art bewiesen worden ist.

20. Wir wollen nun wieder annehmen, daß die Coefficienten der Function

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N$$

sämmtlich reelle Größen seyen. Nach (16.) ist jederzeit

$$\begin{aligned} f(x) = & (x - p - q\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) . \end{aligned}$$

Ein beliebiger imaginärer Factor dieses Products sey

$$x - p_k - q_k\sqrt{-1} ;$$

so wird dasselbe $= 0$, wenn man

$$x = p_k + q_k\sqrt{-1}$$

setzt, und

$$p_k + q_k\sqrt{-1}$$

ist folglich eine imaginäre Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N = 0$$

mit lauter reellen Coefficienten. Daher ist nach (19.) auch

$$p_k - q_k\sqrt{-1}$$

eine Wurzel dieser Gleichung, und folglich nach (15.)

$$x - p_k + q_k\sqrt{-1}$$

ein einfacher Factor der Function $f(x)$. Da sich nun diese Function nach (17.) nur auf eine Art in n einfache Factoren des ersten Grades zerlegen läßt, so muß sich der Factor

$$x - p_k + q_k\sqrt{-1} ,$$

so wie der Factor

$$x - p_k - q_k\sqrt{-1} ,$$

unter den Factoren des Products

$$\begin{aligned} f(x) = & (x - p - q\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1}) \\ & \times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1}) \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & \times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

finden. Verbindet man die beiden obigen einfachen Factoren, die einander conjugirte einfache imaginäre Factoren genannt werden können; so erhält man

$$(x - p_k - q_k\sqrt{-1})(x - p_k + q_k\sqrt{-1})$$
$$= (x - p_k)^2 - (q_k\sqrt{-1})^2 = (x - p_k)^2 + q_k^2$$
$$= x^2 - 2p_k x + p_k^2 + q_k^2,$$

welches Product eine reelle Größe ist und ein reeller Factor des zweiten Grades genannt wird. Auf dieselbe Weise giebt es zu jedem imaginären Factor des Products

$$f(x) = (x - p - q\sqrt{-1})$$
$$\times (x - p_1 - q_1\sqrt{-1})$$
$$\times (x - p_2 - q_2\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots$$
$$\times (x - p_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{-1})$$

einen conjugirten einfachen imaginären Factor, und zwei solche conjugirte einfache imaginäre Factoren lassen sich jederzeit zu einem reellen Factor des zweiten Grades mit einander verbinden, woraus sich nun unmittelbar das folgende Theorem ergiebt:

Jede ganze rationale algebraische Function läßt sich immer in lauter reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegen.

21. Wir sind hier zu einem Lehrsatze gelangt, mit dessen Beweise seiner großen Wichtigkeit wegen sich die größten Mathematiker beschäftigt haben. Die ältere Geschichte dieses namentlich auch für die Integration der rationalen gebrochenen algebraischen Functionen überaus wichtigen Satzes s. m. in dem zweiten Theile dieses Wörterbuchs S. 441 und 442. Die meisten Verdienste um denselben haben sich unter den neuern Mathematikern ohne Widerrede Gauß und Cauchy erworben. Alle älteren Versuche, einen strengen Beweis zu führen, sind mehr oder weniger mangelhaft. Gauß hat in seiner ersten unsern Satz betreffenden Schrift: **Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, quam pro obtinendis summis in Philosophia honoribus inclito Philosophorum ordini Academiae Juliae Carolinae exhibuit C. F. Gauss. Helmst. 1799.** nicht nur einen neuen strengen Beweis des Satzes, sondern auch eine ausführliche Recension aller frühern Beweise gegeben. Zwei andere Beweise giebt Gauß in den Commentarien der Göttinger Akademie vom Jahre 1816. p. 107. und p. 135. in den Abhandlungen: **Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse** und: **Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia.** Alle drei Beweise sind nicht leicht zu fassen, aber völlig würdig dem großen Genie ihres Er-

finders. Der erste und älteste, die erste schriftstellerische Arbeit des großen Geometers, beruhet auf trigonometrischen Hülfssätzen und bedient sich auch geometrischer Betrachtungen; der zweite ist rein algebraisch, nimmt aber zugleich auch die Differentialrechnung zu Hülfe; am wenigsten elementar ist der dritte Beweis, zeichnet sich aber durch große Kürze vor den beiden andern aus, und ist zugleich, wenn man nur die nöthigen Sätze aus andern mathematischen Disciplinen, namentlich aus der Integralrechnung, vorauszusetzen berechtigt ist, so einfach und leicht verständlich, daß wir es uns nicht versagen können, gerade diesen überaus schönen Beweis im Folgenden noch mitzutheilen, da sich in andern Artikeln dieser Supplemente die Hülfssätze, welche wir brauchen werden, schon streng bewiesen finden, und uns also auf dieselben zu verweisen verstattet ist. Der oben geführte Beweis, bei dem wir einer schönen Abhandlung von Cauchy: sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination in den Exercices de Mathématiques. Livr. 40 et 41. p. 65. gefolgt sind, ist völlig streng, leicht verständlich und verdient zugleich den Namen eines ganz elementaren Beweises, da er bloß auf einfachen algebraischen Principien beruhet. Ein anderer ebenfalls völlig strenger Beweis von Cauchy, der aber trigonometrische Formeln in Anspruch nimmt, ist schon im Artikel Unmögliche Größen (32 — 39.) von uns mitgetheilt worden, und kann hier vortheilhaft verglichen werden, so wie auch das Studium der verschiedenen von Gauß gegebenen Beweise namentlich durch die Vergleichung der so sehr von einander verschiedenen Wege, auf denen dieser große Geist zu demselben Ziele gelangte, die reichste Belehrung gewähren wird. Mit dem zuletzt erwähnten Beweise von Cauchy beruhet die von Legendre in der Théorie des nombres. P. I. §. XIV. éd. 2. gegebene Darstellung dem Wesentlichen nach auf gleichen Principien, ist aber an diesem Orte zu sehr mit andern Untersuchungen verwebt, und läßt daher den Satz selbst nicht deutlich hervortreten. Noch s. m. eine Abhandlung von Laplace im Journal des séances de l'école normale. T. II. p. 315., aus welcher Lacroix im Complément des élémens d'Algèbre §. 23. einen Auszug gegeben hat. Burgs Versuch in Crelles Journal B. V. S. 182., einen elementaren Beweis zu geben, können wir durchaus nicht als gelungen betrachten, so sehr uns auch ein noch kürzerer und einfacherer Beweis, als der oben nach Cauchy mitgetheilte, als wünschenswerth erscheint. Nach diesen historischen und literarischen Bemerkungen gehen wir nun zu dem dritten Beweise von Gauß über, indem wir ganz den Fußtapfen seines Erfinders folgen, und nur hier und da den Weg für weniger geübte Leser etwas zu ebenen suchen.

22. Sey wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Lx + N ,$$

wobei wir annehmen, daß die Coefficienten **A, B, C, .. L, N** sämmtlich reelle Größen sind. r und φ seyen zwei unbestimmte Größen. Der Kürze wegen setze man ferner

$$t = r^n \cos n\varphi + Ar^{n-1} \cos(n-1)\varphi + Br^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots + Lr\cos\varphi + N,$$

$$u = r^n \sin n\varphi + Ar^{n-1} \sin(n-1)\varphi + Br^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \ldots + Lr\sin\varphi,$$

$$t' = nr^n \cos n\varphi + (n-1)Ar^{n-1}\cos(n-1)\varphi + (n-2)Br^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \ldots + Lr\cos\varphi,$$

$$u' = nr^n \sin n\varphi + (n-1)Ar^{n-1}\sin(n-1)\varphi + (n-2)Br^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \ldots + Lr\sin\varphi,$$

$$t'' = n^2 r^n \cos n\varphi + (n-1)^2 Ar^{n-1}\cos(n-1)\varphi + (n-2)^2 Br^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \ldots + Lr\cos\varphi,$$

$$u'' = n^2 r^n \sin n\varphi + (n-1)^2 Ar^{n-1}\sin(n-1)\varphi + (n-2)^2 Br^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \ldots + Lr\sin\varphi,$$

$$\frac{(tt+uu)(t''t+u''u) + (tu'-ut')^2 - (tt'+uu')^2}{r(tt+uu)^2} = y,$$

wobei zu bemerken ist, daß sich der Factor r aus dem Nenner dieses letztern Bruchs offenbar wegschaffen läßt, da t', u', t'', u'' durch r theilbar sind. Ist nun ϱ eine positive Größe, welche größer ist als die größte der Größen

$$nA\gamma 2,\ \gamma(nB\gamma 2),\ \sqrt[3]{\gamma}(nC\gamma 2),\ \sqrt[4]{\gamma}(nD\gamma 2),\ \ldots\ \sqrt[n]{\gamma}(nN\gamma 2),$$

bloß in Bezug auf die absoluten Werthe dieser Größen; so erhält für $r = \varrho$ die Größe

$$tt' + uu'$$

jederzeit einen positiven Werth, der nicht $= 0$ ist, welchen reellen Werth man auch der Größe φ beilegen mag.

Man setze, um dies zu beweisen, der Kürze wegen,

$$T = \varrho^n \cos 45^0 + A\varrho^{n-1}\cos(45^0+\varphi) + B\varrho^{n-2}\cos(45^0+2\varphi) + \ldots + L\varrho\cos(45^0+(n-1)\varphi) + N\cos(45^0+n\varphi),$$

$$U = \varrho^n \sin 45^0 + A\varrho^{n-1}\sin(45^0+\varphi) + B\varrho^{n-2}\sin(45^0+2\varphi) + \ldots + L\varrho\sin(45^0+(n-1)\varphi) + N\sin(45^0+n\varphi),$$

$$T' = n\varrho^n\cos 45^0 + (n-1)A\varrho^{n-1}\cos(45^0+\varphi) + (n-2)B\varrho^{n-2}\cos(45^0+2\varphi) + \ldots + L\varrho\cos(45^0+(n-1)\varphi),$$

$$U' = n\varrho^n\sin 45^0 + (n-1)A\varrho^{n-1}\sin(45^0+\varphi) + (n-2)B\varrho^{n-2}\sin(45^0+2\varphi) + \ldots + L\varrho\sin(45^0+(n-1)\varphi);$$

so ist, weil bekanntlich

$$\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\gamma 2}$$

ist, und daher

$$\varrho^n \cos 45^0 = \frac{\varrho^{n-1}}{n\gamma 2}\varrho + \frac{\varrho^{n-2}}{n\gamma 2}\varrho^2 + \frac{\varrho^{n-3}}{n\gamma 2}\varrho^3 + \ldots + \frac{\varrho}{n\gamma 2}\varrho^{n-1} + \frac{1}{n\gamma 2}\varrho^n$$

gesetzt werden kann, offenbar

$$T = \frac{\varrho^{n+1}}{n\Upsilon 2}\{\varrho + nA\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + \varphi)\}$$
$$+ \frac{\varrho^{n-2}}{n\Upsilon 2}\{\varrho^2 + nB\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 2\varphi)\}$$
$$+ \frac{\varrho^{n-3}}{n\Upsilon 2}\{\varrho^3 + nC\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 3\varphi)\}$$
$$+ \frac{\varrho^{n-4}}{n\Upsilon 2}\{\varrho^4 + nD\Upsilon 2 \cos(45^\circ + 4\varphi)\}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \frac{1}{n\Upsilon 2}\{\varrho^n + nN\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + n\varphi)\} .$$

Da nun nach der Voraussetzung ϱ positiv und, bloß mit Berücksichtigung der absoluten Werthe, größer als die größte unter den Größen

$$nA\Upsilon 2, \Upsilon(nB\Upsilon 2), \sqrt[3]{\Upsilon(nC\Upsilon 2)}, \sqrt[4]{\Upsilon(nD\Upsilon 2)}, \ldots \sqrt[n]{\Upsilon(nN\Upsilon 2)}$$

ist; so sind offenbar

$$\varrho + nA\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + \varphi) ,$$
$$\varrho^2 + nB\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 2\varphi) ,$$
$$\varrho^3 + nC\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 3\varphi) ,$$
$$\varrho^4 + nD\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 4\varphi) ,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\varrho^n + nN\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + n\varphi)$$

sämmtlich positive Größen und keine dieser Größen ist $= 0$. Also ist auch T eine positive Größe, die nicht $= 0$ ist. Ueberhaupt soll im Folgenden mit der Bemerkung, daß eine Größe positiv sey, zugleich immer die Bedingung verbunden seyn, daß diese Größe auch nicht $= 0$ ist, welches hier ein für alle Mal bemerkt seyn mag.

Durch ganz ähnliche Schlüsse, die hier nicht wiederholt zu werden brauchen, überzeugt man sich, daß auch U eine positive Größe ist.

Auch ist nun

$$T' = \frac{\varrho^{n-1}}{n\Upsilon 2}\{n\varrho + (n-1)nA\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + \varphi)\}$$
$$+ \frac{\varrho^{n-2}}{n\Upsilon 2}\{n\varrho^2 + (n-2)nB\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 2\varphi)\}$$
$$+ \frac{\varrho^{n-3}}{n\Upsilon 2}\{n\varrho^3 + (n-3)nC\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 3\varphi)\}$$
$$+ \frac{\varrho^{n-4}}{n\Upsilon 2}\{n\varrho^4 + (n-4)nD\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + 4\varphi)\}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \frac{\varrho}{n\Upsilon 2}\{n\varrho^{n-1} + nL\Upsilon 2 . \cos(45^\circ + (n-1)\varphi)\}$$
$$+ \frac{1}{n\Upsilon 2} . n\varrho^n .$$

Die Potenzen

$$\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \varrho^4, \ldots \varrho^{n-1}$$

sind nach der Voraussetzung sämmtlich positiv und respective größer als

$$nA\gamma 2, nB\gamma 2, nC\gamma 2, nD\gamma 2, \ldots nL\gamma 2;$$

also sind um so mehr

$$n\varrho, n\varrho^2, n\varrho^3, n\varrho^4, \ldots n\varrho^{n-1}$$

respective größer als

$$\begin{aligned}
&(n-1)nA\gamma 2.\cos(45^\circ + \varphi),\\
&(n-2)nB\gamma 2.\cos(45^\circ + 2\varphi),\\
&(n-3)nC\gamma 2.\cos(45^\circ + 3\varphi),\\
&(n-4)nD\gamma 2.\cos(45^\circ + 4\varphi),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&nL\gamma 2.\cos(45^\circ + (n-1)\varphi),
\end{aligned}$$

immer bloß in Rücksicht auf die absoluten Werthe, und es ist folglich T', so wie auf ganz ähnliche Art auch U', eine positive Größe.

Folglich ist auch $TT' + UU'$ eine positive Größe, die also nach unserer obigen Bemerkung auch nicht $= 0$ ist.

Da nun überhaupt

$$\begin{aligned}
&\cos(45^\circ + k\varphi)\cos(45^\circ + n\varphi) + \sin(45^\circ + k\varphi)\sin(45^\circ + n\varphi)\\
&= \cos(45^\circ + n\varphi - 45^\circ - k\varphi) = \cos(n-k)\varphi,\\
&\cos(45^\circ + k\varphi)\sin(45^\circ + n\varphi) - \sin(45^\circ + k\varphi)\cos(45^\circ + n\varphi)\\
&= \sin(45^\circ + n\varphi - 45^\circ - k\varphi) = \sin(n-k)\varphi
\end{aligned}$$

ist; so übersieht man auf der Stelle, daß, wenn man $r = \varrho$ setzt, t, u, t', u' respective in

$$\begin{aligned}
&T\cos(45^\circ + n\varphi) + U\sin(45^\circ + n\varphi),\\
&T\sin(45^\circ + n\varphi) - U\cos(45^\circ + n\varphi),\\
&T'\cos(45^\circ + n\varphi) + U'\sin(45^\circ + n\varphi),\\
&T'\sin(45^\circ + n\varphi) - U'\cos(45^\circ + n\varphi)
\end{aligned}$$

übergehen, und folglich für $r = \varrho$

$$\begin{aligned}
&tt' + uu'\\
&= \{T\cos(45^\circ + n\varphi) + U\sin(45^\circ + n\varphi)\}\{T'\cos(45^\circ + n\varphi) + U'\sin(45^\circ + n\varphi)\}\\
&+ \{T\sin(45^\circ + n\varphi) - U\cos(45^\circ + n\varphi)\}\{T'\sin(45^\circ + n\varphi) - U'\cos(45^\circ + n\varphi)\}\\
&= TT'\{\sin(45^\circ + n\varphi)^2 + \cos(45^\circ + n\varphi)^2\}\\
&\quad + UU'\{\sin(45^\circ + n\varphi)^2 + \cos(45^\circ + n\varphi)^2\},
\end{aligned}$$

d. i. für $r = \varrho$

$$tt' + uu' = TT' + UU'$$

wird, so daß also der Werth von $tt' + uu'$ für $r = \varrho$ immer positiv und nicht $= 0$ ist, wie behauptet wurde.

Der Werth von $tt + uu$ für $r = \varrho$ ist

$$\{T\cos(45^\circ + n\varphi) + U\sin(45^\circ + n\varphi)\}^2$$
$$+ \{T\sin(45^\circ + n\varphi) - U\cos(45^\circ + n\varphi)\}^2$$
$$= TT\{\sin(45^\circ + n\varphi)^2 + \cos(45^\circ + n\varphi)^2\}$$
$$+ UU\{\sin(45^\circ + n\varphi)^2 + \cos(45^\circ + n\varphi)^2\},$$

d. i. für $r = \varrho$

$$tt + uu = TT + UU,$$

also dieser Werth ebenfalls positiv und nicht $= 0$, woraus sich folglich ergiebt, daß für keinen positiven Werth von ϱ, welcher größer als die größte unter den Größen

$$nA\Upsilon 2,\ \Upsilon(nB\Upsilon 2),\ \sqrt[3]{\Upsilon(nC\Upsilon 2)},\ \sqrt[4]{\Upsilon(nD\Upsilon 2)},\ \ldots$$

ist, immer bloß mit Berücksichtigung der absoluten Werthe dieser Größen, zugleich $t = 0$, $u = 0$ ist, weil sonst für $r = \varrho$ auch $tt + uu = 0$ wäre, welches gegen das Obige streitet.

23. Zwischen den Gränzen $r = 0$, $r = \varrho$ und $\varphi = 0$ $\varphi = 2\pi$, wo π wie gewöhnlich die halbe Peripherie bezeichnet, giebt es aber bestimmt jederzeit Werthe von r und φ, für welche zugleich $t = 0$, $u = 0$ ist.

Wir wollen, um dies zu beweisen, annehmen, daß das Gegentheil Statt finde, und daß folglich für alle Werthe von r und φ zwischen den angegebenen Gränzen die positive Größe $tt + uu$ nicht $= 0$ sey; so hat offenbar die oben durch y bezeichnete Größe für alle Werthe von r und φ zwischen den angegebenen Gränzen einen endlichen bestimmten Werth, wobei man nicht zu vergessen hat, daß, wie auch schon oben erinnert worden ist, der Factor r in dem Nenner von y durch Aufheben gegen einen gleichen Factor im Zähler weggeschafft werden kann, und dieser Factor daher nur scheinbar im Nenner von y enthalten ist, so daß also offenbar auch für $r = 0$ die Größe y einen endlichen bestimmten Werth hat.

Betrachten wir nun das doppelte Integral

$$\int\int y\,\partial r\,\partial\varphi,$$

und nehmen dessen Werth auf bekannte Weise zwischen den Gränzen $r = 0$, $r = \varrho$ und $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$; so wird auch der so bestimmte Werth dieses Integrals, welchen wir $= \Omega$ setzen wollen, eine endliche bestimmte Größe seyn, wie sogleich aus dem im Artikel Bestimmtes Integral (5.) bewiesenen Satze folgt.

Wir wollen nun den in Rede stehenden Werth unsers Integrals auf doppelte Art entwickeln, indem wir das eine Mal zuerst nach φ, dann nach r, das andere Mal zuerst nach r, dann nach φ integriren, welches bekanntlich zu einem und demselben Resultat führen muß, wie a. a. O. (24.) bewiesen worden ist.

Betrachtet man nun zuerst r als constant, so ist

$$\int y\,\partial\varphi = \frac{tu' - ut'}{r(tt + uu)}.$$

Differentiirt man nämlich diese Größe nach φ, so erhält man, weil, wie leicht erhellet,

$$\partial t = -u'\partial\varphi,\ \partial u = t'\partial\varphi,\ \partial t' = -u''\partial\varphi,\ \partial u' = t''\partial\varphi$$

ist:

$$\frac{(tt+uu)(t\partial u' + u'\partial t - u\partial t' - t'\partial u) - 2(tu' - ut')(t\partial t + u\partial u)}{r(tt+uu)^2}$$

$$= \frac{(tt+uu)(tt'' - u'u' + uu'' - t't') + 2(tu' - ut')^2}{r(tt+uu)^2}\partial\varphi$$

$$= \frac{(tt+uu)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(tt+uu)^2}\partial\varphi$$

$$= y\partial\varphi,$$

weil

$$-(tt+uu)(t't' + u'u') + (tu' - ut')^2 = -(tt' + uu')^2$$

ist. Da nun offenbar sowohl für $\varphi = 0$, als auch für $\varphi = 2\pi$,

$$\frac{tu' - ut'}{r(tt+uu)} = 0$$

ist; so ist

$$\int_0^{2\pi} y\partial\varphi = 0$$

für jedes r, und folglich offenbar auch

$$\int_0^{\varrho}\partial r\int_0^{\pi} y\partial\varphi = 0,$$

d. i. $\Omega = 0$. Vorausgesetzt ist hierbei, der Annahme gemäß, immer, daß $tt + uu$ für keinen Werth von r und φ zwischen den angegebenen Gränzen $= 0$ ist, weil sonst die obige Rechnung wegen des vorkommenden Unendlichen offenbar ihre Gültigkeit verlieren würde.

Betrachten wir nun ferner φ als constant, und integriren nach r; so ist

$$\int y\partial r = \frac{tt' + uu'}{tt + uu}.$$

Differentiirt man nämlich, so erhält man, weil

$$\partial t = \frac{t'}{r}\partial r,\ \partial u = \frac{u'}{r}\partial r,\ \partial t' = \frac{t''}{r}\partial r,\ \partial u' = \frac{u''}{r}\partial r$$

ist:

$$\frac{(tt+uu)(t\partial t' + t'\partial t + u\partial u' + u'\partial u) - 2(tt' + uu')(t\partial t + u\partial u)}{(tt+uu)^2}$$

$$= \frac{(tt+uu)(tt'' + t't' + uu'' + u'u') - 2(tt' + uu')^2}{r(tt+uu)^2}\partial r$$

$$= \frac{(tt+uu)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(tt+uu)^2}\partial r$$

$$= y\partial r,$$

weil

$$(tt + uu)(t't' + u'u') - (tt' + uu')^2 = (tu' - ut')^2$$

ist.

Für $r = 0$ wird offenbar

$$\frac{tt' + uu'}{tt + uu} = 0,$$

und für $r = \varrho$ ist (22.)

$$tt' + uu' = TT' + UU',\ tt + uu = TT + UU;$$

also ist

$$\int_0^{\varrho} y\,\partial r = \frac{TT' + UU'}{TT + UU}$$

für jedes φ, folglich dieses bestimmte Integral für jedes φ nach (22.) immer eine bestimmte positive Größe, die nicht $= 0$ ist. Also ist nach dem im Artikel Bestimmtes Integral (5.) bewiesenen allgemeinen Lehrsatze offenbar auch

$$\int_0^{2\pi} \partial\varphi \int_0^{\varrho} y\,\partial r = \Omega$$

eine bestimmte positive Größe, die nicht $= 0$ ist. Dies ist aber ungereimt, weil wir vorher $\Omega = 0$ gefunden haben, so daß also unsere Annahme, daß es keine Werthe von r, φ zwischen den Gränzen $r = 0$, $r = \varrho$ und $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ gebe, für welche zugleich $t = 0$, $u = 0$ ist, falsch ist, weshalb es also zwischen diesen Gränzen immer Werthe von r und φ geben muß, für welche zugleich $t = 0$ und $u = 0$ ist.

24. Für

$$x = r(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$$

wird nun

$$\begin{aligned} f(x) = {} & r^n(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n \\ & + Ar^{n-1}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{n-1} \\ & + Br^{n-2}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{n-2} \\ & + Cr^{n-3}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{n-3} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + Lr(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}) \\ & + N, \end{aligned}$$

d. i. nach einem leicht zu beweisenden goniometrischen Satze, über den man den Artikel Unmögliche Größen (3.) nachzusehen hat, für den obigen Werth von x:

$$\begin{aligned} & f(x) = \\ & r^n\cos n\varphi + Ar^{n-1}\cos(n-1)\varphi + Br^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \cdots \\ & \qquad \cdots + Lr\cos\varphi + N \\ & \pm\{r^n\sin n\varphi + Ar^{n-1}\sin(n-1)\varphi + Br^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \cdots \\ & \qquad \cdots + Lr\sin\varphi\}\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

d. i. für

$$x = r(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$$

immer

$$f(x) = t \pm u\sqrt{-1}.$$

Weil man nun nach (23.) immer Werthe von r und φ angeben kann, für welche zugleich $t = 0$, $u = 0$ ist; so seyen z. B. $r = g$, $\varphi = G$ zwei solche Werthe von r und φ. Dann ist $f(x) = 0$ für

$$x = g(\cos G \pm \sin G\sqrt{-1}),$$

und diese beiden Werthe von x sind folglich zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Für $g = 0$ oder $\sin G = 0$ reduciren sich diese beiden imaginären Wurzeln auf die eine reelle Wurzel $x = 0$ oder $x = g\cos G$, und es erhellet also hieraus nicht nur, daß jede Gleichung $f(x) = 0$ mit lauter reellen Coefficienten immer wenigstens eine Wurzel hat, sondern auch, daß die imaginären Wurzeln solcher Gleichungen immer paarweise vorhanden sind, so daß der imaginären Wurzel

$$x = g(\cos G + \sin G\sqrt{-1})$$

immer die imaginäre Wurzel

$$x = g(\cos G - \sin G\sqrt{-1})$$

entspricht, und umgekehrt. Aus dem Obigen wissen wir schon, daß zwei solche imaginäre Wurzeln, wie

$$x = g(\cos G \pm \sin G\sqrt{-1})$$

oder

$$x = p \pm q\sqrt{-1},$$

die bei jeder Gleichung mit lauter reellen Coefficienten immer zugleich vorhanden sind, conjugirte Wurzeln genannt werden.

Aus diesem Satze lassen sich nun die übrigen oben bewiesenen Eigenschaften der Gleichungen und Functionen mit lauter reellen Coefficienten auf ganz ähnliche Art wie oben ableiten. Nach der Mittheilung dieses schönen, freilich aber die höhere Analysis in Anspruch nehmenden, Beweises des schon in (19.) auf andere Art bewiesenen wichtigen Theorems gehen wir nun zu andern allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen über.

25. Vorher erinnern wir jedoch noch an folgenden Satz aus der Combinationslehre. Bezeichnen wir nämlich die nte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen für die Elemente a, b, c, d, ... p durch $\overset{n}{C}$, die nte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen für die Elemente a, b, c, d, ... p, q dagegen durch $\overset{n}{C}'$; so ist immer

$$\overset{n}{C}' = \overset{n}{C} + \overset{n-1}{C}q,$$

wie auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Daß zuerst sämmtliche Combinationen in dem Aggregat auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens Combinationen ohne Wiederholungen der nten Klasse und alle unter einander verschieden sind, ist ohne weitere Erläuterung klar, und daher bloß noch zu zeigen, daß das in Rede stehende Aggregat jede Combination der nten Klasse ohne Wiederholungen für die Elemente a, b, c, d, ... p, q enthält. Aber auch hiervon überzeugt man sich auf der Stelle, wenn man nur bedenkt, daß jede Combination von a, b, c, d, ... p, q, die q nicht enthält, in $\overset{n}{C}$ vorkommen muß, so wie offenbar jede das Element q enthaltende Combination, nachdem man q aus ihr weggelassen, sich in $\overset{n-1}{C}$, die ursprüngliche, q enthaltende, Combination sich folglich nothwendig in $\overset{n-1}{C}q$ finden muß.

26. Sey nun wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

eine beliebige Gleichung des nten Grades, deren Coefficienten reelle oder imaginäre Größen sind; so ist nach (16.)

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-p),$$

wo a, b, c, d, ... p die n Wurzeln der obigen Gleichung sind, die sowohl reell, als auch imaginär sein können. Entwickelt man das obige Product etwa für die Gleichungen der vier ersten Grade; so führt die einfachste Induction zu dem mittelst der in (25.) gebrauchten Zeichen in der folgenden allgemeinen Formel dargestellten Gesetze:

$$f(x) = x^n - \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} - \overset{3}{C}x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\overset{n-1}{C}x + (-1)^n\overset{n}{C},$$

woraus sich auf der Stelle

$$A = -\overset{1}{C},\ B = \overset{2}{C},\ C = -\overset{3}{C},\ \ldots\ L = (-1)^{n-1}\overset{n-1}{C},\ N = (-1)^n\overset{n}{C}$$

ergiebt. Um dieses Gesetz allgemein zu beweisen, wollen wir annehmen, daß es für jede Gleichung des nten Grades gelte. Ist dann

$$F(x) = 0$$

eine Gleichung des (n + 1)ten Grades, deren n + 1 Wurzeln a, b, c, d, ... p, q sind; so ist nach (16.)

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-p)(x-q),$$

d. i.

$$F(x) = f(x).(x-q),$$

und folglich, wenn man für $f(x)$ seinen obigen Ausdruck setzt:

$$F(x) = x^{n+1} - \{\overset{1}{C}+q\}x^n + \{\overset{2}{C}+\overset{1}{C}q\}x^{n-1} - \{\overset{3}{C}+\overset{2}{C}q\}x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\{\overset{n}{C} + \overset{n-1}{C}q\}x + (-1)^{n+1}\overset{n}{C}q,$$

woraus nach der in (25.) bewiesenen allgemeinen Relation auf der Stelle

$$F(x) = x^{n+1} - \overset{1}{C}x^n + \overset{2}{C}x^{n-1} - \overset{3}{C}x^{n-2} + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^n \overset{n}{C}x + (-1)^{n+1}\overset{n+1}{C}$$

folgt, das bemerkte Gesetz folglich für Gleichungen des $(n+1)$-sten Grades gilt, wenn es für Gleichungen des $n$ten Grades gilt, und daher allgemein ist.

In jeder Gleichung ist folglich der Coefficient des zweiten Gliedes, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die erste; der Coefficient des dritten Gliedes, mit unverändertem Vorzeichen, die zweite; der Coefficient des vierten Gliedes, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die dritte; der Coefficient des fünften Gliedes, mit unverändertem Vorzeichen, die vierte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen der Wurzeln der Gleichung, u. s. w.

27. Eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

deren Coeffficienten reelle oder imaginäre Größen seyn können, sey α; so ist nach den aus dem Obigen bekannten Sätzen

$$f(x) = (x-\alpha)f_1(x),$$

wo

$$f_1(x) = x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + \ldots + K'x + L'$$

ist. Ferner seyen $f'(x)$ und $f_1(x)$ die sogenannten derivirten Functionen von $f(x)$ und $f_1(x)$, welche man erhält, wenn man in den beiden letztern Functionen jedes Glied mit dem Exponenten der in ihm enthaltenen Potenz von x multiplicirt, und den Exponenten dieser Potenz von x selbst um eine Einheit vermindert, so daß also

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots. + 2Kx + L,$$
$$f'_1(x) = (n-1)x^{n-2} + (n-2)A'x^{n-3} + (n-3)B'x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots. + 2I'x + K'$$

ist. Unter diesen Voraussetzungen findet jederzeit die Gleichung

$$f'(x) = (x-\alpha)f'_1(x) + f_1(x)$$

Statt.

Da nämlich

$$f(x) = (x-\alpha)f_1(x),$$

folglich

$$f(x) + \alpha f_1(x) = xf_1(x)$$

ist; so erhält man, wenn man die obigen Ausdrücke von $f(x)$

und $f_1(x)$ substituirt, auf der Stelle durch Vergleichung der Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A + \alpha &= A', \\ B + \alpha A' &= B', \\ C + \alpha B' &= C', \\ D + \alpha C' &= D', \\ &\cdots\cdots \\ L + \alpha K' &= L', \\ N + \alpha L' &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} f'(x) + \alpha f'_1(x) = {} & nx^{n-1} + (n-1)(A+\alpha)x^{n-2} \\ & + (n-2)(B+\alpha A')x^{n-3} \\ & + (n-3)(C+\alpha B')x^{n-4} \\ & + (n-4)(D+\alpha C')x^{n-5} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + L + \alpha K'; \end{aligned}$$

also ist mittelst der obigen Gleichungen

$$f'(x) + \alpha f'_1(x) = nx^{n-1} + (n-1)A'x^{n-2} + (n-2)B'x^{n-3} + (n-3)C'x^{n-4} + \ldots + 2K'x + L'.$$

Denselben Ausdruck erhält man aber auf der Stelle für

$$f_1(x) + xf'_1(x);$$

also ist

$$f'(x) + \alpha f'_1(x) = f_1(x) + xf'_1(x),$$
$$f'(x) = (x-\alpha)f'_1(x) + f_1(x),$$

welches die zu beweisende Gleichung ist.

28. Sey nun

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha_1)f_1(x) \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x) \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)f_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1})f_{n-1}(x) \\ &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n); \end{aligned}$$

so ist nach der in (27.) bewiesenen Relation, wenn wir die derivirten Functionen wie dort bezeichnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-\alpha_1)f'_1(x) + f_1(x), \\ f'_1(x) &= (x-\alpha_2)f'_2(x) + f_2(x), \\ f'_2(x) &= (x-\alpha_3)f'_3(x) + f_3(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{n-2}(x) &= (x-\alpha_{n-1})f'_{n-1}(x) + f_{n-1}(x), \\ f'_{n-1}(x) &= (x-\alpha_n)f'_n(x) + f_n(x), \end{aligned}$$

wobei man zu bemerken hat, daß

$$f_n(x) = 1 = x^0, f'_n(x) = 0,$$

folglich $f'_{n-1}(x) = 1$ ist.

Durch succeſſive Subſtitution ergiebt ſich aus den obigen Gleichungen leicht:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\,..\,(x-\alpha_{n-1}) \\ & + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,..\,(x-\alpha_{n-2})f_{n-1}(x) \\ & + (x-\alpha_1)\,..\,(x-\alpha_{n-3})f_{n-2}(x) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_3(x) \\ & + (x-\alpha_1)f_2(x) \\ & + f_1(x)\,; \end{aligned}$$

alſo, wie leicht erhellet,

$$f'(x) = f(x)\left\{\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{1}{x-\alpha_3} + \,..\, + \frac{1}{x-\alpha_n}\right\}.$$

Repräſentirt nun α irgend eine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$; ſo iſt, weil

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N\,, \\ 0 &= \alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + \ldots + L\alpha + N \end{aligned}$$

iſt,

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha} + A\frac{x^{n-1}-\alpha^{n-1}}{x-\alpha} + B\frac{x^{n-2}-\alpha^{n-2}}{x-\alpha} + \,..\, + L\frac{x-\alpha}{x-\alpha} \\ = {} & \left.\begin{matrix} x^{n-1} \\ + A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^{n-2} \\ + \alpha \\ + A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^{n-3} \\ + \alpha^2 \\ + A\alpha \\ + B \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^{n-4} \\ + \alpha^3 \\ + A\alpha^2 \\ + B\alpha \\ + C \end{matrix}\right\} + \ldots + \begin{matrix} \alpha^{n-1} \\ + A\alpha^{n-2} \\ + B\alpha^{n-3} \\ + C\alpha^{n-4} \\ \cdots\cdots \\ + L\,. \end{matrix} \end{aligned}$$

Setzen wir alſo

$$\frac{f'(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \frac{f(x)}{x-\alpha_3} + \,..\, + \frac{f(x)}{x-\alpha_n} = \Sigma\frac{f(x)}{x-\alpha_1}$$

und für jedes k

$$\alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \alpha_4^k + \,..\, \alpha_n^k = S_k\,;$$

ſo erhalten wir leicht

$$\Sigma\frac{f(x)}{x-\alpha_1} =$$

$$\begin{aligned} & nx^{n-1} + \left.\begin{matrix} S_1 \\ + nA \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^{n-2} \\ + S_2 \\ + AS_1 \\ + nB \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^{n-3} \\ + S_3 \\ + AS_2 \\ + BS_1 \\ + nC \end{matrix}\right\} + \ldots + \begin{matrix} S_{n-1} \\ + AS_{n-2} \\ + BS_{n-3} \\ + CS_{n-4} \\ \cdots\cdots \\ + nL\,. \end{matrix} \end{aligned}$$

Weil nun ferner nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\frac{f(x)}{x-a_1} = f'(x)$$

$$= nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + 2Kx + L$$

ist; so ergiebt sich durch Vergleichung der einzelnen Glieder dieser beiden Ausdrücke von

$$\Sigma\frac{f(x)}{x-a_1}$$

die folgende Reihe höchst merkwürdiger Gleichungen:

$$0 = S_1 + A$$
$$0 = S_2 + AS_1 + 2B$$
$$0 = S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C$$
$$0 = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS_1 + 4D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = S_{n-1} + AS_{n-2} + BS_{n-3} + CS_{n-4} + \ldots + (n-1)L.$$

Multiplicirt man die gegebene Gleichung mit x^m, wo m jede positive ganze Zahl bezeichnet, die auch $= 0$ seyn kann, so erhält man

$$x^{n+m} + Ax^{n+m-1} + Bx^{n+m-2} + \ldots + Lx^{m+1} + Nx^m = 0,$$

und folglich, wenn man für x nach und nach die Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

der gegebenen Gleichung setzt:

$$\alpha_1^{n+m} + A\alpha_1^{n+m-1} + B\alpha_1^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_1^{m+1} + N\alpha_1^m = 0,$$
$$\alpha_2^{n+m} + A\alpha_2^{n+m-1} + B\alpha_2^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_2^{m+1} + N\alpha_2^m = 0,$$
$$\alpha_3^{n+m} + A\alpha_3^{n+m-1} + B\alpha_3^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_3^{m+1} + N\alpha_3^m = 0,$$
u. s. w. u. s. w.
$$\alpha_n^{n+m} + A\alpha_n^{n+m-1} + B\alpha_n^{n+m-2} + \ldots + L\alpha_n^{m+1} + N\alpha_n^m = 0;$$

also, wenn man diese Gleichungen zu einander addirt:

$$0 = S_{n+m} + AS_{n+m-1} + BS_{n+m-2} + \ldots + LS_{m+1} + NS_m$$

für jedes positive ganze m, welches auch $= 0$ seyn kann. Setzt man nun in dieser Gleichung nach und nach

$$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

und verbindet die auf diese Weise hervorgehenden Gleichungen mit den oben gefundenen Gleichungen; so erhält man die folgende Reihe merkwürdiger Gleichungen:

$$0 = S_1 + A$$
$$0 = S_2 + AS_1 + 2B$$
$$0 = S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C$$
$$0 = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS_1 + 4D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = S_n + AS_{n-1} + BS_{n-2} + CS_{n-3} + \ldots + nN$$
$$0 = S_{n+1} + AS_n + BS_{n-1} + CS_{n-2} + \ldots + NS_1$$

$$0 = S_{n+2} + AS_{n+1} + BS_n + CS_{n-1} + \ldots + NS_2$$
$$0 = S_{n+3} + AS_{n+2} + BS_{n+1} + CS_n + \ldots + NS_3$$

u. s. w. u. s. w.

Diese von Newton gefundenen Gleichungen sind deshalb so merkwürdig und wichtig, weil mittelst derselben die Summen der positiven ganzen Potenzen der Wurzeln einer jeden Gleichung aus den Coefficienten derselben berechnet werden können, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Man nennt den in diesen Gleichungen enthaltenen Satz nach seinem Erfinder den Newtonschen Satz. Ueber die Geschichte dieses Satzes s. m. den Artikel Combination (47.). Obiger Beweis ist mit einigen Abänderungen derselbe, welchen ich zuerst in meinen Mathematischen Abhandlungen. Altona 1822. S. 38. gegeben habe, und scheint sich mir durch Kürze und Strenge zu empfehlen.

Will man die Coefficienten einer Gleichung durch die Potenzensummen ihrer Wurzeln ausdrücken; so erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$A = -S_1,$$
$$B = -\frac{AS_1 + S_2}{2},$$
$$C = -\frac{BS_1 + AS_2 + S_3}{3},$$
$$D = -\frac{CS_1 + BS_2 + AS_3 + S_4}{4},$$
$$E = -\frac{DS_1 + CS_2 + BS_3 + AS_4 + S_5}{5}.$$

u. s. w. u. s. w.

Uebrigens kann man auch leicht die Summen der Potenzen der Wurzeln unmittelbar durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, wie folgende Formeln, die sich aus den obigen recurrenden Gleichungen für die Summen der Potenzen der Wurzeln leicht ergeben, zeigen:

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = A^2 - 2B,$$
$$S_3 = -A^3 + 3AB - 3C,$$
$$S^4 = A_4 - 4A^2B + 2B^2 + 4AC - 4D,$$
$$S^5 = -A_5 + 5A^3B - 5AB^2 - 5A^2C + 5BC + 5AD - 5E,$$
$$S^6 = A_6 - 6A^4B + 9A^2B^2 - 2B^3 + 6A^3C - 12ABC + 3C^2 - 6A^2D + 6BD + 6AE - 6F,$$

u. s. w. u. s. w.

29. Um nun auch Gleichungen zur Berechnung der Summen der negativen ganzen Potenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, wollen wir zuerst folgende Aufgabe auflösen:

Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$ sind, eine Gleichung zu finden, deren Wurzeln die Größen

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \frac{1}{\alpha_4}, \ldots \frac{1}{\alpha_n}$$

sind.

Die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens bezeichne man, wie gewöhnlich, durch $f(x)$; so ist für jedes x

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n);$$

also, wenn man $x = \frac{1}{y}$ setzt,

$$\frac{1}{y^n} + \frac{A}{y^{n-1}} + \frac{B}{y^{n-2}} + \ldots + \frac{L}{y} + N$$
$$= \left(\frac{1}{y} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{y} - \alpha_2\right)\left(\frac{1}{y} - \alpha_3\right)\ldots\left(\frac{1}{y} - \alpha_n\right)$$
$$= \frac{(1 - \alpha_1 y)(1 - \alpha_2 y)(1 - \alpha_3 y) \ldots (1 - \alpha_n y)}{y^n},$$

oder

$$1 + Ay + By^2 + \ldots + Ly^{n-1} + Ny^n$$
$$= (1 - \alpha_1 y)(1 - \alpha_2 y)(1 - \alpha_3 y) \ldots (1 - \alpha_n y),$$
$$y^n + \frac{L}{N} y^{n-1} + \ldots + \frac{B}{N} y^2 + \frac{A}{N} y + \frac{1}{N}$$
$$= \frac{(1 - \alpha_1 y)(1 - \alpha_2 y)(1 - \alpha_3 y) \ldots (1 - \alpha_n y)}{N}.$$

Nach dem in (26.) bewiesenen Satze ist aber

$$N = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n.$$

Also ist

$$y^n + \frac{L}{N} y^{n-1} + \ldots + \frac{B}{N} y^2 + \frac{A}{N} y + \frac{1}{N}$$
$$= \frac{(-1)^n (1 - \alpha_1 y)(1 - \alpha_2 y)(1 - \alpha_3 y) \ldots (1 - \alpha_n y)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n}$$
$$= \frac{(\alpha_1 y - 1)(\alpha_2 y - 1)(\alpha_3 y - 1) \ldots (\alpha_n y - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n}$$
$$= \left(y - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y - \frac{1}{\alpha_2}\right)\left(y - \frac{1}{\alpha_3}\right)\ldots\left(y - \frac{1}{\alpha_n}\right),$$

so daß also offenbar, wenn wir x für y schreiben, die Gleichung

$$x^n + \frac{L}{N} x^{n-1} + \ldots + \frac{B}{N} x^2 + \frac{A}{N} x + \frac{1}{N}$$

die gesuchte ist. Man nennt diese Gleichung in Bezug auf die gegebene Gleichung $f(x) = 0$ die Gleichung der reciproken Wurzeln.

30. Wendet man auf die Gleichung der reciproken Wurzeln die in (28.) bewiesenen Gleichungen an, bezeichnet die Summen der negativen Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ durch

$$S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, S_{-4}, S_{-5}, \ldots,$$

und setzt der Kürze wegen

$$\frac{L}{N} = A', \frac{K}{N} = B', \frac{I}{N} = C', \ldots \frac{A}{N} = L', \frac{1}{N} = N';$$

so erhält man:

$$0 = S_{-1} + A'$$
$$0 = S_{-2} + A'S_{-1} + 2B'$$
$$0 = S_{-3} + A'S_{-2} + B'S_{-1} + 3C'$$
$$0 = S_{-4} + A'S_{-3} + B'S_{-2} + C'S_{-1} + 4D'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = S_{-n} + A'S_{-(n-1)} + B'S_{-(n-2)} + C'S_{-(n-3)} + \ldots + nN'$$
$$0 = S_{-(n+1)} + A'S_{-n} + B'S_{-(n-1)} + C'S_{-(n-2)} + \ldots + N'S_{-1}$$
$$0 = S_{-(n+2)} + A'S_{-(n+1)} + B'S_{-n} + C'S_{-(n-1)} + \ldots + N'S_{-2}$$
$$0 = S_{-(n+3)} + A'S_{-(n+2)} + B'S_{-(n+1)} + C'S_{-n} + \ldots + N'S_{-3}.$$

u. s. w. u. s. w.

31. Wir wollen jetzt annehmen, daß alle Coefficienten der einzelnen Glieder der Gleichung $f(x) = 0$ reelle Größen seyen. Das erste oder höchste Glied dieser Gleichung wird, wie immer, als positiv angenommen, und der Coefficient dieses Gliedes ist die Einheit. Betrachtet man nun überhaupt die Reihe der Vorzeichen der einzelnen Glieder, so können in derselben an den verschiedenen Stellen entweder zwei gleiche Zeichen, wie $+ +$ oder $- -$, oder zwei ungleiche Zeichen, wie $+ -$ oder $- +$ auf einander folgen. Das Erste nennt man eine Folge, das Zweite einen Wechsel. Die Betrachtung dieser Zeichenfolgen und Zeichenwechsel ist, wie wir sogleich sehen werden, in der Theorie der Gleichungen mit lauter reellen Coefficienten von ganz besonderer Wichtigkeit.

32. Seyen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sämmtliche positive Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0;$$

so ist

$$f(x) = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$

wo X eine ganze rationale Function von x mit lauter reellen Coefficienten ist. Wir wollen

$$X = x^m + \ldots - Kx^k - \ldots + Px^p + \ldots - Qx^q - \ldots \pm Ux^u \pm \ldots \pm V$$

setzen, und nehmen an, daß $-Kx^k$ das erste negative Glied, $+Px^p$ das erste positive Glied nach $-Kx^k$, $-Qx^q$ das erste negative Glied nach $+Px^p$ ist, u. s. w. Am Ende werden einige Glieder mit gleichen positiven oder negativen Vorzeichen vorkommen; das erste dieser Glieder soll $\pm Ux^u$ seyn, so daß also alle Glieder von $\pm Ux^u$ bis $\pm V$ gleiche Vorzeichen haben, dem Gliede $\pm Ux^u$ aber ein Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen vorhergeht. Bildet man nun das Product $X(x-\alpha)$,

so wird man für dasselbe offenbar einen Ausdruck von folgender Form erhalten:

$$x^{m+1} .. - K'x^{k+1} .. + P'x^{p+1} .. - Q'x^{q+1} .. \pm U'x^{n+1} .. \mp \alpha V .$$

Vergleicht man nun die Ausdrücke von X und $X(x-\alpha)$ mit einander, so ist klar, daß in

$$x^{m+1} .. - K'x^{k+1} .. + P'x^{p+1} .. - Q'x^{q+1} .. \pm U'x^{n+1}$$

wenigstens eben so viele Zeichenwechsel vorkommen, wie in

$$x^m + .. - Kx^k - .. + Px^p + .. - .. \pm Ux^n .$$

In X kommt in dem Theile

$$\pm Ux^n \pm .. \pm V$$

kein, in $X(x-\alpha)$ dagegen in dem Theile

$$\pm U'x^{n+1} ... \mp \alpha V$$

wenigstens ein Zeichenwechsel vor, so daß also offenbar in jedem Falle $X(x-\alpha)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr enthält wie X.

Eben so hat also $X(x-\alpha)(x-\beta)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr wie $X(x-\alpha)$, folglich jederzeit wenigstens zwei Zeichenwechsel mehr als X. Das Product

$$X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

hat wenigstens einen Zeichenwechsel mehr als $X(x-\alpha)(x-\beta)$, folglich wenigstens drei Zeichenwechsel mehr als X. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es erhellet also hieraus mit völliger Deutlichkeit, daß, auch wenn X gar keinen Zeichenwechsel enthielte, in

$$f(x) = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots .$$

immer mindestens eben so viele Zeichenwechsel vorkommen müssen, wie die Gleichung

$$f(x) = 0$$

positive Wurzeln hat. Dieser Satz gilt immer, wie auch die Function $f(x)$ beschaffen seyn mag, namentlich auch dann noch, wenn dieselbe kein vollständiges Polynom ist, ohne daß man in diesem Falle die fehlenden Glieder durch Glieder mit dem Coefficienten Null zu ergänzen braucht.

Man nehme jetzt in der Gleichung $f(x) = 0$ die Coefficienten der Potenzen x^{n-1}, x^{n-3}, x^{n-5}, x^{n-7}, ... mit entgegengesetzten Vorzeichen; so erhält man eine neue Gleichung, welche wir durch

$$f'(x) = 0$$

bezeichnen wollen, und es erhellet leicht, daß die beiden Gleichungen

$$f(x) = 0, f'(x) = 0$$

gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln haben. Ist nämlich

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N ,$$

so ist

$$f'(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots + L(-1)^{n-1}x + N(-1)^n,$$

und, wenn a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist,

$$f(a) = a^n + Ba^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N.$$

Setzt man nun in der Function $f'(x)$

$$x = -a = (-1).a;$$

so wird

$$f'(-a) = a(-1)^n - Aa^{n-1}(-1)^{n-1} + Ba^{n-2}(-1)^{n-2} - \ldots.$$
$$\ldots + La(-1)(-1)^{n-1} + N(-1)^n$$
$$= a(-1)^n + Aa^{n-1}(-1)^n + Ba^{n-2}(-1)^n + \ldots.$$
$$\ldots, + La(-1)^n + N(-1)^n,$$

d. i.

$$f'(-a) = f(a).(-1)^n;$$

folglich, weil $f(a) = 0$ ist, auch

$$f'(-a) = 0,$$

so daß also $-a$ eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ ist, wie behauptet wurde.

Nach dem Obigen müssen in $f'(x)$ wenigstens eben so viele Zeichenwechsel vorkommen, wie die Gleichung $f'(x) = 0$ positive, d. i. nach dem so eben Bewiesenen, wie die Gleichung $f(x) = 0$ negative Wurzeln hat, wodurch wir auf das folgende überaus wichtige und merkwürdige Theorem geführt werden:

Die Gleichung $f(x) = 0$ kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als es Zeichenwechsel in $f(x)$ giebt, und nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenwechsel in $f'(x)$ sind.

Ist $f(x)$ ein vollständiges Polynom, so daß in $f(x)$ kein Glied fehlt, oder kein Coefficient $= 0$ ist; so entspricht offenbar jeder Zeichenfolge und jedem Zeichenwechsel in $f(x)$ respective ein Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge in $f'(x)$ und umgekehrt, woraus sich auf der Stelle ergiebt, daß man in diesem Falle das obige Theorem auch auf den folgenden Ausdruck bringen kann:

Wenn in $f(x)$ kein Coefficient $= 0$ ist, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr positive Wurzeln, als die Function $f(x)$ Zeichenwechsel, und nicht mehr negative Wurzeln, als diese Function Zeichenfolgen.

Dieser letztere Satz heißt gewöhnlich der Harriotische Lehrsatz, obgleich Descartes dessen eigentlicher Erfinder ist, indem derselbe zuerst in des Letztern Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des éssais de cette méthode. A Leyde. 1637. p. 373. vorzukommen scheint. In Harriots Werken findet er sich nicht. Der hier mitgetheilte schöne überaus ein-

fache Beweis ist von Gauß in Crelles Journal. B. III. S. 1. gegeben, und von Gergonne in den Annales de Mathématiques. T. XVIII. p. 352. wiederholt worden. Der von dem Verfasser dieser Supplemente in Crelles Journal. B. II. S. 335. gegebene Beweis beruhet gleichfalls auf eigenthümlichen Betrachtungen, ist aber nicht so einfach, wie der Beweis von Gauß, welcher zugleich vor allen übrigen Beweisen den Vorzug hat, daß er sich nicht auf den Fall beschränkt, wenn in $f(x)$ kein Glied fehlt oder kein Coefficient $= 0$ ist. Mehrere hierher gehörende literarische Notizen s. m. Th. II. S. 435., denen wir nur noch Aepinus: démonstration du theorème de Harriot. Mém. de Berlin. 1758. p. 354., und Fischer, de theoremate, cui Harriotico nomen vulgo datur. Berol. 1819. beifügen.

Fehlt kein Glied der Function $f(x)$ und hat die Gleichung

$$f(x) = 0$$

kein imaginären Wurzeln, so sey p die Anzahl der positiven, m die Anzahl der negativen Wurzeln, f die Anzahl der Zeichenfolgen, w die Anzahl der Zeichenwechsel in der Function $f(x)$. Ist nun wie gewöhnlich n der Grad der in Rede stehenden Gleichung, so ist

$$p + m = n, \; f + w = n;$$

also

$$p + m = f + w.$$

Nach dem Obigen ist

$$p \leqq w, \; m \leqq f.$$

Wäre nun $p < w$, so wäre wegen der Gleichung

$$p + m = f + w$$

offenbar $m > f$, welches gegen das Obige streitet. Daher muß $p = w$ und folglich $m = f$ seyn, so daß wir also jetzt folgenden Lehrsatz haben:

Wenn kein Glied der Function $f(x)$ fehlt und die Gleichung $f(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln hat; so ist die Anzahl der positiven Wurzeln dieser Gleichung jederzeit der Anzahl der Zeichenwechsel, die Anzahl der negativen Wurzeln der Anzahl der Zeichenfolgen in der Function $f(x)$ gleich.

In dem Falle, wo in der Function $f(x)$ Glieder fehlen, kann man über die Gleichung $f(x) = 0$ noch folgende Betrachtungen anstellen, wozu die Einführung der folgenden Bezeichnungen nöthig ist.

Die Anzahl der auf einander folgenden fehlenden Glieder kann theils gerade, theils ungerade seyn, und Reihen auf einander folgender Glieder können theils zwischen zwei in der Gleichung wirklich vorkommenden Gliedern mit gleichen, theils zwischen zwei

in der Gleichung wirklich vorkommenden Gliedern mit entgegengesetzter Vorzeichen fehlen.

α sey die Anzahl der fehlenden Reihen auf einander folgender Glieder mit gerader Gliederzahl zwischen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit gleichen Vorzeichen, und die Anzahl der Glieder in den einzelnen fehlenden Reihen wollen wir durch $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_\alpha$ bezeichnen.

Aehnliche Bedeutung mögen β und $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_\beta$ für die fehlenden Reihen mit ungerader Gliederzahl zwischen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit gleichen Vorzeichen haben.

γ sey die Anzahl der fehlenden Reihen mit gerader Gliederzahl zwischen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit entgegengesetzten Vorzeichen, und die Anzahl der Glieder in jeder einzelnen dieser fehlenden Reihen wollen wir durch $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_\gamma$ bezeichnen.

δ sey die Anzahl der fehlenden Reihen mit ungerader Gliederzahl zwischen zwei wirklich vorkommenden Gliedern der Gleichung mit entgegengesetzten Vorzeichen, und die Anzahl der Glieder in den einzelnen fehlenden Reihen soll durch $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots d_\delta$ bezeichnet werden.

Ist nun wieder n der Grad der Gleichung, w die Anzahl der Zeichenwechsel, f die Anzahl der Zeichenfolgen der in der Gleichung wirklich vorkommenden unmittelbar auf einander folgenden Glieder, zwischen denen keine andern Glieder fehlen; so ist offenbar

$$n = w + f + \left\{\begin{array}{l} \alpha + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_\alpha \\ + \beta + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_\beta \\ + \gamma + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\gamma \\ + \delta + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_\delta \end{array}\right\},$$

welches auf der Stelle erhellet, wenn man nur bedenkt, daß überhaupt durch das Fehlen von k auf einander folgenden Gliedern das Fehlen von $k+1$ Zeichenfolgen oder Zeichenwechseln bewirkt wird.

Statt der fehlenden Glieder denke man sich nun Glieder mit dem Coefficienten Null und beliebigem Vorzeichen gesetzt.

Bestimmt man aber die Vorzeichen der für die fehlenden Glieder gesetzten Glieder so, daß die Anzahl der Zeichenwechsel ein Minimum wird; so ist diese kleinste Anzahl der Zeichenwechsel, wie leicht erhellet,

$$w + \gamma + \delta,$$

und folglich nach dem oben bewiesenen Cartesischen Lehrsatze, wenn p die Anzahl der positiven Wurzeln bezeichnet,

$$p \leqq w + \gamma + \delta.$$

Bestimmt man ferner die Vorzeichen der für die fehlenden Glieder gesetzten Glieder so, daß die Anzahl der Zeichenfolgen ein Minimum wird; so ist diese kleinste Anzahl der Zeichenfolgen offenbar

$$f + \alpha + \delta ,$$

und folglich nach dem Carteſiſchen Lehrſatze, wenn m die Anzahl der negativen Wurzeln bezeichnet,

$$m \leqq f + \alpha + \delta .$$

Für die Anzahl $p + m$ der reellen Wurzeln überhaupt hat man alſo

$$p + m \leqq w + f + \alpha + \gamma + 2\delta ,$$

und folglich, wenn i die Anzahl der imaginären Wurzeln bezeichnet, da $p + m + i = n$ iſt:

$$i \geqq n - w - f - \alpha - \gamma - 2\delta ,$$

oder, wenn man für $n - w - f$ den ſich aus dem Obigen ergebenden Ausdruck ſetzt:

$$i \geqq \left\{ \begin{matrix} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_\alpha \\ + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_\beta \\ + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_\gamma \\ + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_\delta \end{matrix} \right\} + (\beta - \delta) .$$

Dies führt auf den folgenden Lehrſatz:

Wenn in $f(x)$ Glieder fehlen, ſo iſt die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nicht kleiner, d. i. wenigſtens eben ſo groß wie die Anzahl aller fehlenden Glieder, vermehrt um den Ueberſchuß der Anzahl der Reihen fehlender Glieder mit ungerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklichen Gliedern der Gleichung mit gleichen Vorzeichen über die Anzahl der Reihen fehlender Glieder mit ungerader Gliederzahl zwiſchen zwei wirklichen Gliedern der Gleichung mit entgegengeſetzten Vorzeichen.

Cauchy beſtimmt in ſeinem Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. Paris. 1821. p. 519. die Gränzen der Anzahl der poſitiven, negativen und imaginären Wurzeln einer Gleichung mit lauter reellen Coefficienten auf eine andere Weiſe, die ſich unmittelbar aus dem Carteſiſchen Lehrſatz ergiebt, und daher hier noch bemerkt werden mag. Fehlen nämlich auch Glieder in der Gleichung $f(x) = 0$, ſo kann man ſich dieſelben doch immer durch Glieder mit dem Coefficienten Null erſetzt denken, deren Vorzeichen ſich willkührlich annehmen laſſen. Nimmt man nun dieſe Vorzeichen ſo an, daß die Anzahl ſämmtlicher Wechſel ein Minimum wird, ſo ſey die Anzahl der Wechſel $= m'$; nimmt

man dieselben dagegen so an, daß die Anzahl der Folgen ein Minimum wird; so sey die Anzahl der Folgen $= m''$. Dies vorausgesetzt, so ergiebt sich aus dem Carteſiſchen Lehrſatze folgender Satz:

Die Anzahl der poſitiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ kann nicht größer als m', die Anzahl der negativen Wurzeln nicht größer als m'' ſeyn, und die Anzahl der imaginären Wurzeln iſt folglich, wenn n der Grad der Gleichung iſt, immer eben ſo groß oder größer wie

$$n - (m' + m'') .$$

33. Einen die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung betreffenden Satz hat L. Olivier in Crelles Journal. I. S. 223. mitgetheilt, welcher hier auch aufgenommen zu werden verdient. Die gegebene Gleichung ſey

$$1. \quad x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots + \alpha_n = 0 .$$

Für $x = -y$ wird

$$2. \quad y^n - \alpha_1 y^{n-1} + \alpha_2 y^{n-2} - \alpha_3 y^{n-3} + \ldots \pm \alpha_n = 0 ,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen iſt, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl iſt. Sind nun

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

die Wurzeln der Gleichung (1.), ſo ſind

$$-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, \ldots -x_n$$

die Wurzeln der Gleichung (2.), und es iſt folglich

$$3. \quad x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots + \alpha_n = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) ,$$

$$4. \quad x^n - \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} - \alpha_3 x^{n-3} + \ldots \pm \alpha_n = (x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)\ldots(x+x_n) .$$

Alſo iſt, wenn man die Größen auf der linken und rechten Seite dieſer Gleichungen in einander multiplicirt,

$$5. \quad \{x^n + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_4 x^{n-4} + \ldots\}^2 - \{\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_3 x^{n-3} + \alpha_5 x^{n-5} + \ldots\}^2 = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\ldots(x^2 - x_n^2) ,$$

d. i., wenn man der Kürze wegen

$$\alpha_1\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1 ,$$
$$\alpha_2\alpha_2 + 2\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_3 = \beta_2 ,$$
$$\alpha_3\alpha_3 - 2\alpha_6 + 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4 = \beta_3 ,$$
$$\alpha_4\alpha_4 + 2\alpha_8 - 2\alpha_1\alpha_7 + 2\alpha_2\alpha_6 - 2\alpha_3\alpha_5 = \beta_4 ,$$
$$\alpha_5\alpha_5 - 2\alpha_{10} + 2\alpha_1\alpha_9 - 2\alpha_2\alpha_8 + 2\alpha_3\alpha_7 - 2\alpha_4\alpha_6 = \beta_5 ,$$
u. ſ. w. u. ſ. w.

und $x^2 = z$ ſetzt:

$$6. \quad z^n - \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} - \beta_3 z^{n-3} + \ldots\ldots = (z-x_1^2)(z-x_2^2)(z-x_3^2)\ldots(z-x_n^2) ,$$

woraus man ſieht, daß

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, \ldots x_n^2$$

die n Wurzeln der Gleichung

$$7.\quad z^n - \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} - \beta_3 z^{n-3} + \ldots = 0;$$

oder

$$8.\quad x^n - \beta_1 x^{n-1} + \beta_2 x^{n-2} - \beta_3 x^{n-3} + \ldots = 0$$

sind. Daher sind die Wurzeln der Gleichung (1.) die Quadratwurzeln aus den Wurzeln der Gleichung (8.), woraus unmittelbar folgt, daß die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (1.) der Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung (8.), welche immer leicht aus der Gleichung (1.) abgeleitet werden kann, gleich ist. Die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung (8.) ist aber, die Function dieser Gleichung mag ein vollständiges oder ein unvollständiges Polynom seyn, nicht größer als die Anzahl der in ihr vorkommenden Zeichenwechsel. Also hat die Gleichung (1.) nie mehr reelle Wurzeln, wie die Gleichung (8.), welche aus jener immer leicht abgeleitet werden kann, Zeichenwechsel.

Ist z. B.

$$x^5 + x^3 + 3x^2 + 16x + 15 = 0$$

die gegebene Gleichung, so ist

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 16, \alpha_5 = 15;$$

also

$$\beta_1 = -2, \beta_2 = +33, \beta_3 = -23, \beta_4 = +166, \beta_5 = +225.$$

Folglich ist die Gleichung (8.) in diesem Falle

$$x^5 + 2x^4 + 33x^3 + 23x^2 + 166x - 225 = 0.$$

Da in dieser Gleichung nur ein Zeichenwechsel vorkommt, so kann die gegebene Gleichung nicht mehr als eine reelle Wurzel haben, und in der That sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$-1, -1 \pm \sqrt{-2}, \tfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-11}).$$

Ist ferner

$$x^6 - 10x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 27x + 36 = 0$$

die gegebene Gleichung, so ist

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -10, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 16, \alpha_5 = -27, \alpha_6 = 36;$$

also

$$\beta_1 = +20, \beta_2 = +132, \beta_3 = +264, \beta_4 = -680, \beta_5 = -423, \beta_6 = +1296.$$

Folglich ist die Gleichung (8.) in diesem Falle

$$x^6 - 20x^5 + 132x^4 - 264x^3 - 680x^2 + 423x + 1296 = 0.$$

Diese Gleichung hat vier Zeichenwechsel; also kann die gegebene Gleichung nicht mehr als vier reelle Wurzeln haben, und in der That sind die sechs Wurzeln derselben

$$+1, +3, -2, -3, \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-7}).$$

III. Von der Bestimmung der symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichungen.

34. Eine symmetrische Function der beliebigen Größen

$$a, b, c, d, \ldots i, k$$

heißt jede Function dieser Größen von solcher Beschaffenheit, daß dieselbe ihren Werth nicht ändert, wenn man in ihr zwei beliebige der in Rede stehenden Größen, von denen sie abhängt, mit einander vertauscht.

Jede symmetrische Function der Wurzeln einer beliebigen Gleichung mit reellen oder imaginären Coefficienten hat die überaus merkwürdige Eigenschaft, daß sich ihr Werth durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken läßt, ohne daß man die Wurzeln der Gleichung selbst zu kennen braucht. Diesen wichtigen Satz in recht helles Licht zu setzen, ist jetzt die Aufgabe unserer nächsten Untersuchungen, bei denen wir von dem folgenden Lehrsatze ausgehen.

35. Die n Wurzeln der Gleichung

$$1^*. \quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

deren Coefficienten reelle oder imaginäre Größen seyn können, seyen

$$a, b, c, d, \ldots i, k,$$

wobei wir zugleich annehmen wollen, daß diese Wurzeln sämmtlich unter einander ungleich sind. U sey eine beliebige Function der Wurzeln

$$a, b, c, d, \ldots i, k.$$

So wie diese Wurzeln offenbar Functionen der Coefficienten der Gleichung (1*.) sind, so kann man sich natürlich auch U durch diese Coefficienten ausgedrückt denken. Der durch die Coefficienten der Gleichung (1.) ausgedrückte Werth von U sey Ω. Nun wollen wir annehmen, daß man durch irgend ein Mittel die Function U auf die Form

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

gebracht habe, so daß die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ sämmtlich durch die Coefficienten A, B, C, ... L, N ausgedrückt sind. Bleibt dann die Gleichung

$$2^*. \quad \mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T} = \Omega$$

jederzeit richtig, wenn man für a irgend eine der Größen b, c, d, ... i, k setzt; so wird bei der Division der Größe

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

durch die Größe

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N,$$

indem man nämlich diese beiden Größen als Functionen von a betrachtet, ein von a unabhängiger Rest übrig bleiben, welcher der durch die Coefficienten der Gleichung (1*.) ausgedrückte Werth Ω der Function U ist.

Der bei der Division von

$$\mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}x + \mathfrak{T}$$

durch

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

bleibende Rest hat im Allgemeinen die Form

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu,$$

so daß also, wenn wir den bei dieser Division hervorgehenden Quotienten durch Q bezeichnen, für jedes x

$$3^*.\quad \mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}x + \mathfrak{T} = \{x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N\}Q + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu$$

ist. Nach der Voraussetzung ist nun

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T} = \Omega,$$
$$\mathfrak{A}b^m + \mathfrak{B}b^{m-1} + \mathfrak{C}b^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}b + \mathfrak{T} = \Omega,$$
$$\mathfrak{A}c^m + \mathfrak{B}c^{m-1} + \mathfrak{C}c^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}c + \mathfrak{T} = \Omega,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\mathfrak{A}k^m + \mathfrak{B}k^{m-1} + \mathfrak{C}k^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}k + \mathfrak{T} = \Omega$$

und

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N = 0,$$
$$b^n + Ab^{n-1} + Bb^{n-2} + \ldots + Lb + N = 0,$$
$$c^n + Ac^{n-1} + Bc^{n-2} + \ldots + Lc + N = 0,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$k^n + Ak^{n-1} + Bk^{n-2} + \ldots + Lk + N = 0.$$

Folglich ist wegen der Gleichung (3*.)

$$\alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} + \gamma a^{n-3} + \ldots + \lambda a + \mu = \Omega;$$
$$\alpha b^{n-1} + \beta b^{n-2} + \gamma b^{n-3} + \ldots + \lambda b + \mu = \Omega,$$
$$\alpha c^{n-1} + \beta c^{n-2} + \gamma c^{n-3} + \ldots + \lambda c + \mu = \Omega,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\alpha k^{n-1} + \beta k^{n-2} + \gamma k^{n-3} + \ldots + \lambda k + \mu = \Omega,$$

und die Gleichung

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu = \Omega$$

oder

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots \lambda x + \mu - \Omega = 0$$

hat folglich die n unter einander ungleichen Wurzeln

$$a, b, c, d, \ldots i, k,$$

welches offenbar nur dann der Fall seyn kann, wenn

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$$

ist, woraus dann ferner

$$\mu - \Omega = 0$$

oder $\Omega = \mu$ folgt. Man sieht also, daß der bei der Division von

$$\mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}x + \mathfrak{T}$$

durch

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

bleibende Rest eine von x unabhängige Größe und der Werth dieses Restes $= \Omega$ ist. Daher ist natürlich auch der bei der Division von

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

durch

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N$$

bleibende Rest eine von a unabhängige Größe und der Werth dieses Restes ist $= \Omega$, wie bewiesen werden sollte.

36. Bevor wir weiter gehen können, müssen wir noch folgenden Satz beweisen:

Wenn man mit $x + a$ in die Größe

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

dividirt; so ist der übrig bleibende Rest jederzeit eine von x unabhängige Größe, welche man erhält, wenn man im Dividendus $x = -a$ setzt.

Der durch die in Rede stehende Division hervorgehende Quotient sey

$$A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M';$$

der Rest, welcher offenbar eine constante Größe ist, sey R; so ist

$$\begin{aligned} &Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N \\ &= (x + a)\{A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M'\} \\ &\quad + R \\ &= A'x^n + \left.\begin{matrix} B' \\ + A'a \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left.\begin{matrix} C' \\ + B'a \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \ldots + \left.\begin{matrix} M' \\ + L'a \end{matrix}\right\} x + M'a + R. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} A &= A', \\ B &= B' + A'a, \\ C &= C' + B'a, \\ &\ldots\ldots \\ M &= M' + L'a, \\ N &= R + M'a, \end{aligned}$$

woraus,

$$A' = A,$$
$$B' = B - Aa,$$
$$C' = C - Ba + Aa^2,$$
$$D' = D - Ca + Ba^2 - Aa^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M' = M - La + Ka^2 - Ia^3 + \ldots + Aa^{n-1}(-1)^{n-1};$$

also

$$R = N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ia^4 - \ldots - Aa^n(-1)^{n-1}$$
$$= N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ia^4 - \ldots + Aa^n(-1)^n,$$

d. i.

$$R = N + M(-a) + L(-a)^2 + K(-a)^3 + \ldots + A(-a)^n$$

oder

$$R = A(-a)^n + B(-a)^{n-1} + C(-a)^{n-2} + \ldots + M(-a) + N,$$

wie bewiesen werden sollte.

37. Zuerst sey die quadratische Gleichung

$$4^*. \quad x^2 + Ax + B = 0$$

gegeben, deren Coefficienten reelle und imaginäre Größen seyn können. Die beiden unter einander ungleichen Wurzeln dieser Gleichung seyen a, b; so ist nach (26.)

$$5^*. \quad a + b = -A.$$

Wenn nun $f(a, b)$ eine beliebige ganze rationale symmetrische Function von a, b ist; so wird man, wenn man

$$b = -A - a$$

setzt, diese Function immer leicht auf die Form

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

bringen können, so daß also

$$f(a, b) = f(a, -A - a)$$
$$= \mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

ist. Weil aber nach der Voraussetzung $f(a, b)$ eine symmetrische Function von a, b ist; so ist offenbar

$$f(a, b) = f(b, a) = f(b, -A - b)$$
$$= \mathfrak{A}b^m + \mathfrak{B}b^{m-1} + \mathfrak{C}b^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}b + \mathfrak{T}.$$

Bezeichnet also, wie in (35.), Ω den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth von $f(a, b)$; so ist klar, daß die Gleichung

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T} = \Omega$$

auch gilt, wenn man b für a setzt. Um also Ω zu finden, wird man nach (35.) mit der Größe

$$a^2 + Aa + B$$

in die Größe

$$\mathfrak{A}a^m + \mathfrak{B}a^{m-1} + \mathfrak{C}a^{m-2} + \ldots + \mathfrak{S}a + \mathfrak{T}$$

dividiren und den übrig bleibenden Rest bemerken, welcher der

durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$, d. i. die Größe Ω, seyn wird.

Betrachtet man $f(a, b)$ als Function von b und dividirt mit

$$b + a + A$$

hinein; so ist nach (36.) der übrig bleibende Rest der Werth der Function $f(a, b)$, welchen dieselbe erhält, wenn man

$$b = -A - a$$

setzt, d. i.

$$f(a, -A - a)$$

oder die Größe

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + Sa + T,$$

und man kann also, um die Function $f(a, b)$ durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken oder die Größe Ω zu finden, auch auf folgende Art verfahren:

Man betrachte $f(a, b)$ als Function von b, dividire in dieselbe mit

$$6^*. \quad b + a + A$$

hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von a betrachtet, mit

$$7^*. \quad a^2 + Aa + B$$

hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$.

Setzt man

$$\{a\} = a^2 + Aa + B, \quad P = x^2 + Ax + B,$$

so wird $\{a\}$ aus P erhalten, wenn man in letztere Function $x = a$ setzt. Setzt man nun

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a},$$

so ist, wie man leicht findet,

$$Q = x + a + A,$$

und man erhält also, wenn man

$$\{b\} = b + a + A$$

setzt, die Größe $\{b\}$ aus Q, wenn man in letzterer Function $x = b$ setzt.

Daher läßt sich die obige Regel zur Berechnung des gesuchten Werths von $f(a, b)$ nun auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Man setze

$$P = x^2 + Ax + B$$

und bezeichne durch

$$\{a\}, \{b\}$$

die Werthe 1. der Function P für $x = a$; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für $x = b$. Dann dividire man in $f(a, b)$, als Function von b betrachtet, mit $\{b\}$ hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von a betrachtet, mit $\{a\}$ hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der gesuchte Werth von $f(a, b)$.

38. Ferner sey die cubische Gleichung

$$8^*. \quad x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben, deren Coefficienten reelle und imaginäre Größen seyn können. Die drei Wurzeln dieser Gleichung, die wir immer als unter einander ungleich betrachten, seyen a, b, c; so ist

$$9^*. \quad a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0$$

oder

$$C = -a^3 - Aa^2 - Ba .$$

Also ist

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x - a)$$
$$= (x - a)\{x^2 + (a + A)x + (a^2 + Aa + B)\}$$

und b, c sind folglich offenbar die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$10^*. \quad x^2 + (a + A)x + (a^2 + Aa + B) = 0 ,$$

Ist nun $f(a, b, c)$ eine ganze rationale symmetrische Function von a, b, c, so kann man dieselbe zuerst bloß als eine ganze rationale symmetrische Function von b, c betrachten, und nach (37.) durch die Coefficienten der Gleichung (10.*) ausdrücken. Dadurch wird offenbar $f(a, b, c)$ als eine ganze rationale Function von a dargestellt. Dividirt man nun in diesen Ausdruck von $f(a, b, c)$, als Function von a betrachtet, mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein, so ist der bei dieser Division bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen cubischen Gleichung (8.*) ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$, welcher gesucht wurde, wie aus dem in (35.) bewiesenen Satze unmittelbar folgt.

Nach (37.) hat man also auf folgende Art zu verfahren:

Man setze

$$Q = x^2 + (a + A)x + (a^2 + Aa + B)$$

und bezeichne durch

$$\{b\}, \{c\}$$

die Werthe 1. der Function Q für $x = b$; 2. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für $x = c$. Dann dividire man in $f(a, b, c)$, als Function von c betrachtet, mit {c} hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von b betrachtet, mit {b} hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der als eine Function von a dargestellte Werth der Function $f(a, b, c)$. Dividirt man nun in diesen Rest mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest nach (35.) der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (8.*) ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$, welcher gesucht wurde.

Bemerkt man nun aber, daß nach dem Obigen die Function Q erhalten wird, wenn man

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

von

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

subtrahirt, in den Rest mit $x - a$ dividirt und den Quotienten bemerkt; so ist klar, daß sich obige Regel auch auf folgenden Ausdruck bringen läßt:

Man setze

$$P = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

und bezeichne durch

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}$$

die Werthe 1. der Function P für $x = a$; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für $x = b$; 3. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für $x = c$. Dann dividire man in $f(a, b, c)$, als Function von c betrachtet, mit {c} hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von b betrachtet, mit {b} hinein, bemerke wieder den Rest, und dividire in denselben, als Function von a betrachtet, mit {a} hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$.

39. Auf ähnliche Weise sey nun

11*. $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

eine Gleichung des vierten Grads mit reellen oder imaginären Coefficienten, deren unter einander ungleiche Wurzeln a, b, c, d sind; so ist

12*. $a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0$

oder

$$D = -a^4 - Aa^3 - Ba^2 - Ca.$$

Also ist

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$= x^4 - a^4 + A(x^3 - a^3) + B(x^2 - a^2) + C(x - a)$$
$$= (x-a)\{x^3 + (a+A)x^2 + (a^2 + Aa + B)x + (a^3 + Aa^2 + Ba + C)\},$$

und b, c, d sind folglich offenbar die Wurzeln der Gleichung

13*. $x^3 + (a+A)x^2 + (a^2 + Aa + B)x + (a^3 + Aa^2 + Ba + C) = 0.$

Ist nun $f(a, b, c, d)$ eine ganze rationale symmetrische Function von a, b, c, d; so kann man dieselbe zuerst bloß als eine ganze rationale symmetrische Function von b, c, d betrachten, und nach (38.) durch die Coefficienten der Gleichung (13.*) ausdrücken. Dadurch erhält man $f(a, b, c, d)$ als eine Function von a ausgedrückt. Dividirt man nun in diesen Ausdruck mit

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$$

hinein, so ist nach (35.) der Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (11*.) ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$, welcher gesucht wurde. Um diesen Werth zu finden, wird man also nach (38.) auf folgende Art zu verfahren haben:

Man setze

$$Q = x^3 + (a+A)x^2 + (a^2 + Aa + B)x + (a^3 + Aa^2 + Ba + C)$$

und bezeichne durch

$$\{b\}, \{c\}, \{d\}$$

die Werthe 1. der Function Q für $x = b$; 2. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für $x = c$; 3. der Function

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c}$$

für $x = d$. Dann dividire man in $f(a, b, c, d)$, als Function von d betrachtet, mit $\{d\}$ hinein, bemerke den Rest, dividire denselben, als Function von c betrachtet, durch $\{c\}$, bemerke wieder den Rest, und dividire denselben, als Function von b betrachtet, durch $\{b\}$. Der bei dieser Division bleibende Rest ist der als Function von a ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$. Diesen Rest dividire man also durch

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D,$$

so ist der bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (11.*) ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d)$, welcher gesucht wird.

Bemerkt man nun aber wieder, daß nach dem Obigen die Function Q erhalten wird, wenn man

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$$

von

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

subtrahirt, in den Rest mit $x - a$ dividirt und den Quotienten bemerkt; so ist klar, daß man die obige Regel auch auf folgenden Ausdruck bringen kann:

Man setze

$$P = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

und bezeichne durch

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$$

die Werthe 1. der Function P für $x = a$; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für $x = b$; 3. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für $x = c$; 4. der Function

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c}$$

für $x = d$. Dann dividire man in $f(a, b, c, d)$, als Function von d betrachtet, mit {d} hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von c betrachtet, mit {c}, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von b betrachtet, mit {b}, bemerke wieder den Rest, und dividire in denselben, als Function von a betrachtet, mit {a}; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d)$.

40. Wie man auf dem angezeigten Wege weiter fortschreiten kann, liegt deutlich vor Augen, so daß wir also nun auf das folgende sehr wichtige allgemeine Theorem geführt werden:

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

seyen a, b, c, d, ... i, k, und $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$ sey eine beliebige ganze rationale symmetrische Function, welche durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung, die reelle und imaginäre Größen seyn können, ausgedrückt werden soll. Man setze

$$P = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

und bezeichne durch

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \ldots \{i\}, \{k\}$$

die Werthe 1. der Function P für $x = a$; 2. der Function

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a}$$

für $x = b$; 3. der Function

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b}$$

für $x = c$; 4. der Function

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c}$$

für $x = d$; 5. der Function

$$T = \frac{S - \{c\}}{x - d}$$

für $x = e$, u. s. w. bis zu Ende. Dann dividire man $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$, als Function von k betrachtet, durch $\{k\}$, bemerke den Rest, dividire denselben, als Function von i betrachtet, durch $\{i\}$, bemerke wieder den Rest, dividire denselben, als Function von h betrachtet, durch $\{h\}$, und setze dieses Verfahren fort, bis man einen Rest, als Function von a betrachtet, durch $\{a\}$ dividirt hat. Der bei dieser letzten Division bleibende Rest ist der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$.

Nach dem Obigen ist dieser Satz eigentlich noch der Bedingung zu unterwerfen, daß die Wurzeln a, b, c, d, ... i, k der gegebenen Gleichung unter einander sämmtlich ungleich sind. Indeß erhellet durch das folgende einfache Raisonnement leicht, daß dies nicht nöthig ist, und unser Satz auch gültig bleibt, wenn unter den Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleiche Wurzeln vorkommen. Bezeichnet nämlich, die Wurzeln als sämmtlich unter einander ungleich angenommen, wie schon früher, Ω den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth der ganzen rationalen symmetrischen Function $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$; so ist

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega,$$

und aus der eben gelehrten Bestimmungsweise von Ω erhellet unmittelbar, daß unter den gemachten Voraussetzungen Ω immer eine ganze rationale Function der Coefficienten

$$A, B, C, D, \ldots L, N$$

ist. Die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

bleibt nach dem Obigen richtig, wenn nur alle Wurzeln der gegebenen Gleichung unter einander ungleich sind, wie klein auch sonst ihre Unterschiede seyn mögen. Nun kann man sich aber offenbar vorstellen, daß die Coefficienten

$$A, B, C, D, \ldots L, N$$

der gegebenen Gleichung sich auf eine solche Weise stetig ändern, daß zwei oder mehrere Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung sich fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Unter dieser Voraussetzung hört die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

nie auf, Statt zu finden, und wird also offenbar auch dann noch Statt finden, wenn die gedachten Differenzen ihre Gränze Null wirklich erreichen, oder, was dasselbe ist, zwei oder mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleich werden.

Von unserm obigen allgemeinen Lehrsatze wollen wir nun einige Anwendungen zur wirklichen Bestimmung einiger ganzen rationalen symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben machen.

41. Sey zuerst die cubische Gleichung

$$x^3 + Bx + C = 0,$$

deren Wurzeln, wie oben, durch a, b, c bezeichnet werden sollen, gegeben. Man soll die ganze rationale symmetrische Function

$$U = b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2$$

der Wurzeln a, b, c durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken.

Es ist

$$P = x^3 + Bx + C, \quad \{a\} = a^3 + Ba + C;$$

folglich

$$P - \{a\} = x^3 - a^3 + B(x - a)$$

Also

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a} = x^2 + ax + a^2 + B,$$

und daher

$$\{b\} = b^2 + ab + a^2 + B.$$

Also ist

$$Q - \{b\} = x^2 - b^2 + a(x - b),$$

woraus

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b} = x + b + a;$$

also

$$\{c\} = c + b + a.$$

Dividirt man nun mit

$$c + b + a$$

in die Function U, als Function von c betrachtet, d. i. in

$$(b + a)c^2 + (b^2 + a^2)c + ab^2 + a^2b$$

hinein; so bleibt der Rest

$$3ab^2 + 3a^2b .$$

Dividirt man in diesen Rest, als Function von b betrachtet, mit

$$b^2 + ab + a^2 + B$$

hinein; so bleibt der Rest

$$-3a^3 - 3Ba .$$

Dividirt man endlich in diesen Rest, als Function von a betrachtet, mit

$$a^3 + Ba + C$$

hinein; so bleibt 3 C als Rest. Dieser Rest ist der Werth der gegebenen symmetrischen Function, d. i.

$$b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 = 3C .$$

42. Die gegebene Gleichung sey

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

und

$$U = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d)$$

sey die gegebene symmetrische Function ihrer Wurzeln a, b, c, d. In diesem Falle ist

$$P = x^4 + Bx^2 + Cx + D ,$$

also

$$\{a\} = a^4 + Ba^3 + Ca + D ;$$

folglich

$$P - \{a\} = x^4 - a^4 + B(x^2 - a^2) + C(x - a)$$

und hieraus

$$Q = \frac{P - \{a\}}{x - a} = x^3 + ax^2 + (a^2 + B)x + a^3 + Ba + C ;$$

also

$$\{b\} = b^3 + ab^2 + (a^2 + B)b + a^3 + Ba + C .$$

Folglich

$$Q - \{b\} = x^3 - b^3 + a(x^2 - b^2) + (a^2 + B)(x - b) ,$$

$$R = \frac{Q - \{b\}}{x - b} = x^2 + (b + a)x + b^2 + ab + a^2 + B ,$$

$$\{c\} = c^2 + (b + a)c + b^2 + ab + a^2 + B ,$$

$$R - \{c\} = x^2 - c^2 + (b + a)(x - c) ,$$

$$S = \frac{R - \{c\}}{x - c} = x + c + b + a ; \quad \{d\} = d + c + b + a .$$

Die fernere Rechnung kann man sich in diesem Falle aber sehr auf folgende Art erleichtern. Nach (26.) ist nämlich

$$a + b + c + d = 0 ,$$

oder

$$d = -a - b - c .$$

Also ist

$$a + d = -(b + c) ,$$
$$b + d = -(a + c) ,$$
$$c + d = -(a + b) ,$$

und folglich

$$U = -\{(a + b)(a + c)(b + c)\}^2 ,$$

wo man nun statt U die einfachere symmetrische Function

$$U' = (a + b)(a + c)(b + c)$$

entwickeln kann, aus der sich dann der Werth von U leicht herleiten läßt. Entwickelt man U' nach Potenzen von c, so erhält man

$$U' = (b + a)c^2 + (b + a)^2 c + ab^2 + a^2 b .$$

Dividirt man nun mit

$$d + c + b + a$$

in U, d. i. in

$$(b + a)c^2 + (b + a)^2 c + ab^2 + a^2 b ,$$

als Function von d betrachtet, hinein; so ist der Rest natürlich

$$(b + a)c^2 + (b + a)^2 c + ab^2 + a^2 b.$$

Dividirt man in diese Größe, als Function von c betrachtet, mit

$$c^2 + (b + a)c + b^2 + ab + a^2 + B$$

hinein, so bleibt als Rest

$$-b^3 - ab^2 - (a^2 + B)b - a^3 - Ba .$$

Dividirt man ferner in diese Größe, als Function von b betrachtet, mit

$$b^3 + ab^2 + (a^2 + B)b + a^3 + Ba + C$$

hinein, so bleibt + C als Rest. Dividirt man in diesen Rest, als Function von a betrachtet, mit

$$a^4 + Ba^2 + Ca + D$$

hinein, so bleibt natürlich + C selbst als Rest, und es ist folglich

$$(a + b)(a + c)(b + c) = C .$$

Also ist nach dem Obigen

$$(a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d) = -C^2 .$$

Die Division endigt sich hier schon bei der dritten Operation, und ähnliche Vereinfachungen des Calculs bieten sich überhaupt öfters dar.

43. Die gegebene Gleichung sey die quadratische Gleichung

$$x^2 + Ax + B = 0 .$$

Man soll die symmetrische Function

$$U = (a - b)^2$$

ihrer Wurzeln a, b bestimmen. Es ist in diesem Falle

$$P = x^2 + Ax + B, \quad [a] = a^2 + Aa + B;$$

folglich

$$P - [a] = x^2 - a^2 + A(x - a),$$

und daher

$$Q = \frac{P - [a]}{x - a} = x + a + A;$$

also

$$[b] = b + a + A.$$

Entwickelt man U nach Potenzen von b, so erhält man

$$U = b^2 - 2ab + a^2.$$

Dividirt man mit

$$b + a + A$$

in die Größe

$$b^2 - 2ab + a^2,$$

als Function von b betrachtet, hinein; so bleibt als Rest

$$4a^2 + 4Aa + A^2.$$

Dividirt man in diese Größe, als Function von a betrachtet, mit

$$a^2 + Aa + B$$

hinein; so bleibt

$$A^2 - 4B$$

als Rest. Also ist

$$(a - b)^2 = A^2 - 4B.$$

Die Richtigkeit dieses Resultats kann man auf folgende Art prüfen. Nach (26.) ist

$$a + b = -A,$$

und nach dem Obigen ist, weil a eine Wurzel der gegebenen quadratischen Gleichung ist,

$$a^2 + Aa + B = 0.$$

Da nun

$$b = -a - A$$

ist; so ist

$$U = (a - b)^2 = (2a + A)^2 = A^2 + 4(a^2 + Aa).$$

Weil nun

$$a^2 + Aa = -B$$

ist; so ist

$$(a - b)^2 = A^2 - 4B,$$

wie wir schon vorher gefunden haben.

44. Die gegebene Gleichung sey die cubische Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Man soll die symmetrische Function

$$U = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$$

ihrer Wurzeln a, b, c bestimmen.

Um in diesem und in ähnlichen Fällen die symmetrische Function U bloß durch a und die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, so daß nämlich die Wurzeln b, c aus dem obigen Ausdrucke von U eliminirt werden, kann man auch auf folgende Art verfahren. Da a eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, so ist

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0 .$$

Folglich ist für jedes x

$$\begin{aligned} & x^3 + Ax^2 + Bx + C \\ &= x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x - a) \\ &= (x-a)\{x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B\} . \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x-a)(x-b)(x-c) .$$

Folglich ist für jedes x

$$(x-b)(x-c) = x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B ,$$

und daher für $x = a$

$$(a-b)(a-c) = 3a^2 + 2Aa + B .$$

Also ist

$$U = (b-c)^2(3a^2 + 2Aa + B)^2 .$$

Da nun ferner b, c die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B = 0$$

sind; so ist nach (43.)

$$\begin{aligned} (b-c)^2 &= (a+A)^2 - 4(a^2 + Aa + B) \\ &= -(3a^2 + 2Aa - A^2 + 4B) . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$U = -(3a^2 + 2Aa + B)^2(3a^2 + 2Aa - A^2 + 4B) .$$

Entwickelt man nun U nach Potenzen von a und dividirt dann mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein, so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der gesuchte Werth von U. Nach gehöriger Rechnung ergiebt sich

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = A^2B^2 - 4A^3C - 4B^3 - 27C^2 + 18ABC .$$

Für $A = 0$ ist

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = -4B^3 - 27C^2 .$$

Letzterer Werth unserer symmetrischen Function entspricht einer cubischen Gleichung, in der das zweite Glied fehlt. Bekanntlich läßt sich aber aus jeder cubischen Gleichung das zweite Glied wegschaffen. In diesem Falle ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} U &= -(3a^2 + B)^2(3a^2 + 4B) \\ &= -27a^6 - 54Ba^4 - 27B^2a^2 - 4B^3 . \end{aligned}$$

Dividirt man in diese Größe mit

$$a^3 + Ba + C$$

hinein, so bleibt die Größe

$$-4B^3 - 27C^2$$

als Rest, welches der schon oben aus der allgemeinen Formel abgeleitete Werth von U in dem vorliegenden speciellen Falle ist.

45. Das Product der Quadrate aller Differenzen je zweier Wurzeln einer gegebenen Gleichung ist, wie leicht erhellet, immer eine ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln der gegebenen Gleichung und kann daher immer nach den obigen Regeln durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Weil aber dieses Product in mehreren Beziehungen von besonderer Wichtigkeit ist, so wollen wir jetzt noch zeigen, wie dasselbe immer ohne große Schwierigkeit für eine beliebige Gleichung des nten Grades gefunden werden kann, wenn man dasselbe für jede Gleichung des $(n-1)$ten Grades finden, d. h. durch die Coefficienten der in Rede stehenden Gleichung ausdrücken kann, ohne die Wurzeln derselben selbst zu kennen, wodurch die Entwickelung dieser Producte sehr erleichtert wird. Sey also wieder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

eine ganz beliebige Gleichung des nten Grades, deren Wurzeln

$$a, b, c, d, \ldots i, k$$

seyn mögen, und sey nun

$$\begin{aligned} U = {} & (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(a-e)^2..(a-i)^2(a-k)^2 \\ & \times (b-c)^2(b-d)^2(b-e)^2..(b-i)^2(b-k)^2 \\ & \times (c-d)^2(c-e)^2..(c-i)^2(c-k)^2 \\ & \times (d-e)^2..(d-i)^2(d-k)^2 \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \times (h-i)^2(h-k)^2 \\ & \times (i-k)^2 . \end{aligned}$$

Weil a eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist; so ist

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ca + N = 0 .$$

Folglich ist für jedes x

$$\begin{aligned} & x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N \\ = {} & x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x-a), \end{aligned}$$

oder, weil die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens bekanntlich dem Producte

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-i)(x-k)$$

gleich ist, für jedes x:

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-i)(x-k) \\ = {} & x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x-a) , \end{aligned}$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $x - a$ dividirt, für jedes x

$$\begin{aligned}(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-i)(x-k)\\ = x^{n-1}\\ + (a+A)x^{n-2}\\ + (a^2+Aa+B)x^{n-3}\\ + (a^3+Aa^2+Ba+C)x^{n-4}\\ \cdots\cdots\cdots\\ + a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+L;\end{aligned}$$

folglich für $x = a$

$$\begin{aligned}(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-i)(a-k)\\ = na^{n-1}+(n-1)Aa^{n-2}+(n-2)Ba^{n-3}+\ldots+L.\end{aligned}$$

Auch ist klar, daß b, c, d, ... i, k die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned}0 = x^{n-1}\\ + (a+A)x^{n-2}\\ + (a^2+Aa+B)x^{n-3}\\ + (a^3+Aa^2+Ba+C)x^{n-4}\\ \cdots\cdots\cdots\\ + a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+L\end{aligned}$$

sind. Weil wir nun annehmen, daß man für jede Gleichung des $(n-1)$ten Grades das Product der Quadrate der Differenzen je zweier Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken kann; so kann man das Product

$$\begin{aligned}(b-c)^2(b-d)^2(b-e)^2\ldots(b-i)^2(b-k)^2\\ \times(c-d)^2(c-e)^2\ldots(c-i)^2(c-k)^2\\ \times(d-e)^2\ldots(d-i)^2(d-k)^2\\ \cdots\cdots\cdots\\ \times(h-i)^2(h-k)^2\\ \times(i-k)^2\end{aligned}$$

durch die Coefficienten der obigen Gleichung des $(n-1)$ten Grades ausdrücken. Bezeichnen wir den dadurch hervorgehenden Ausdruck durch V; so ist V nur noch von a und den Coefficienten A, B, C, ... L abhängig, und nach dem Obigen ist nun

$$U = V\{na^{n-1}+(n-1)Aa^{n-2}+(n-2)Ba^{n-3}+\ldots+L\}^2,$$

wo also auch U bloß von a und den Coefficienten A, B, C, ... L abhängig ist. Das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in vorhergehender Gleichung läßt sich immer durch ganz elementare Rechnungen nach Potenzen von a entwickeln. Dividirt man dann in dieses so entwickelte Product mit der Größe

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N,$$

so ist der bei dieser Division bleibende Rest nach dem Obigen von a unabhängig und liefert den bloß durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth der symmetrischen Function U.

Es ist klar, daß das durch U bezeichnete Product bloß dann verschwinden kann, wenn die Gleichung gleiche Wurzeln hat. Ist dies nicht der Fall, so ist U jederzeit eine ganze rationale Function der Coefficienten A, B, C, ... L, N, und hat einen bestimmten positiven Werth, der nicht $= 0$ ist. Sind also die Coefficienten A, B, C, ... L, N alle ganze Zahlen, so ist offenbar auch U eine ganze Zahl und daher immer entweder $= 1$ oder > 1, vorausgesetzt, daß die gegebene Gleichung keine einander gleichen Wurzeln hat.

46. Wir haben jetzt ausführlich gezeigt, daß jede ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung immer durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln der Gleichung selbst zu kennen, wobei sich zugleich auch zeigte, daß der sich ergebende Ausdruck immer eine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung war. Kaum bedarf es nun noch einer Erläuterung, daß überhaupt jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Hat man nämlich z. B. die rationale gebrochene Function

$$U = \frac{abc}{ab + ac + bc}$$

der drei Wurzeln a, b, c einer cubischen Gleichung, so sind natürlich Zähler und Nenner symmetrische Functionen von a, b, c. Da man nun nach den entwickelten Regeln sowohl abc, als auch $ab + ac + bc$, durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken kann, ohne a, b, c selbst zu kennen, so gilt dies natürlich auch von der Function U, wobei sich nun aber natürlich von selbst versteht, daß der sich für U ergebende Ausdruck jetzt keine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung mehr ist. Hat man die irrationale symmetrische Function

$$U = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

der drei Wurzeln a, b, c einer cubischen Gleichung, so kann man die ganze rationale Function

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, ohne die Wurzeln selbst zu kennen, folglich auch die Function U.

Man sieht also, daß jede symmetrische Function der Wurzeln einer beliebigen Gleichung jederzeit durch die Coefficienten derselben ausgedrückt werden kann, ohne daß man die Wurzeln der Gleichung selbst zu kennen braucht,

welches unstreitig eins der merkwürdigsten und wichtigsten Resultate der ganzen Algebra ist. In dem Artikel Symmetrische Function ist gezeigt, daß jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch bloße Potenzensummen der Wurzeln ausgedrückt werden kann. Mittelst des in (28.) bewiesenen Newton'-

schen Satzes kann man die Potenzensummen der Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Also erhellet auch auf diese Art, daß jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Der von uns oben eingeschlagene Weg bietet, wie es uns scheint, zugleich die bequemsten Methoden zur wirklichen Entwickelung der symmetrischen Functionen der Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung dar, weshalb derselbe hier vorzugsweise von uns betreten worden ist. Der angeführte Artikel wird aber zweckmäßig mit dem Studium des gegenwärtigen Artikels verbunden. Größerer Ausführlichkeit wegen s. m. auch die a. a. O. angeführten Schriften, vorzüglich die Schrift von M. Hirsch. Beizufügen ist diesen Schriften noch das Complément des élémens d'Algèbre. p. 1. von Lacroix und die schon in (21.) angeführte in jeder Beziehung treffliche Abhandlung von Cauchy, welcher wir bei der obigen Darstellung vorzüglich gefolgt sind.

IV. Auflösung der numerischen Gleichungen.

A. Einige vorläufige Sätze.

47. Um bei der Auflösung der numerischen Gleichungen, d. h. der Gleichungen mit numerischen oder in bestimmten Zahlen gegebenen Coefficienten möglichst elementar zu verfahren, ist es nöthig, einige Begriffe und Sätze, namentlich über die ganzen rationalen algebraischen Functionen, vorauszuschicken, auf denen das Folgende vorzüglich beruhet. Eine ganze rationale algebraische Function heißt bekanntlich, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet, jede Function von der Form

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n .$$

Wenn man jedes Glied einer ganzen rationalen algebraischen Function mit dem Exponenten der entsprechenden Potenz von x multiplicirt und diesen Exponenten der Potenz von x selbst um eine Einheit vermindert; so heißt die auf diese Art erhaltene Function die erste derivirte Function der gegebenen oder primitiven Function, und wird, wenn letztere durch $f(x)$ bezeichnet wird, durch $f'(x)$ bezeichnet. Für

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

ist also

$$f'(x) = 1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1} .$$

Nimmt man von $f'(x)$ wieder die erste derivirte Function ganz auf dieselbe Weise, so heißt dieselbe in Bezug auf die primitive Function $f(x)$ die zweite derivirte Function und wird durch $f''(x)$ bezeichnet. Die erste derivirte Function von $f''(x)$ heißt die dritte derivirte Function von $f(x)$ und

wird durch $f'''(x)$ bezeichnet, wobei nun zugleich erhellet, wie man auf diese Art weiter gehen kann. In Bezug auf die oben angenommene allgemeine Form der primitiven Function haben wir also

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n ,$$
$$f'(x) = 1.a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + n a_n x^{n-1} ,$$
$$f''(x) = 1.2\,a_2 + 2.3\,a_3 x + 3.4\,a_4 x^2 + \ldots + (n-1)\,n a_n x^{n-2} ,$$
$$f'''(x) = 1.2.3\,a_3 + 2.3.4\,a_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)n a_n x^{n-3} ,$$
$$f^{IV}(x) = 1.2.3.4\,a_4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)n a_n x^{n-4} ,$$

u. s. w. u. s. w.

$$f^{(n-1)}(x) = 1.2.3\ldots(n-1)\,a_{n-1} + 2.3.4\ldots n a_n x ,$$
$$f^{(n)}(x) = 1.2.3.4\ldots n a_n ,$$

woraus zugleich erhellet, daß die nte derivirte Function jeder ganzen rationalen algebraischen Function des nten Grades eine constante Größe ist, und alle folgenden derivirten Functionen verschwinden. Setzt man in den obigen Ausdrücken $x = 0$, so erhält man

$$a = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1},\ a_2 = \frac{f''(0)}{1.2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3},\ \ldots a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n},$$

d. i. allgemein

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k},$$

und man kann also jede ganze rationale algebraische Function auf folgenden sehr merkwürdigen Ausdruck bringen:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}x^n .$$

Setzen wir in diesem Ausdruck $x + i$, wo i eine ganz beliebige positive oder negative Größe bezeichnet, für x; so erhalten wir

$$f(x+i) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}(x+i) + \frac{f''(0)}{1.2}(x+i)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}(x+i)^n,$$

und hieraus, wenn man sich die Potenzen von $x + i$ entwickelt denkt und das Resultat nach Potenzen von i ordnet:

$$f(x+i) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}x^n$$
$$+ \frac{i}{1}\left\{f'(0) + \frac{f''(0)}{1}x + \frac{f'''(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots(n-1)}x^{n-1}\right\}$$
$$+ \frac{i^2}{1.2}\left\{f''(0) + \frac{f'''(0)}{1}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots(n-2)}x^{n-2}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\left\{f^{(n-1)}(0) + \frac{f^{(n)}(0)}{1}x\right\}$$
$$+ \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(0),$$

woraus sich nach dem Obigen auf der Stelle

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{i^{n-1}}{1..(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x)$$

ergiebt, eine Formel, von der wir im Folgenden vielfachen Gebrauch machen werden.

48. Wir wollen nun einige einfache Regeln zur Entwickelung der derivirten Functionen beweisen.

I. Sey

$$f(x) = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

und, wenn A eine beliebige constante Größe bezeichnet, $F(x) = Af(x)$; so ist

$$F(x) = Aa + Aa_1x + Aa_2x^2 + Aa_3x^3 + \ldots + Aa_nx^n,$$
$$F'(x) = Aa_1 + 2Aa_2x + 3Aa_3x^2 + \ldots + nAa_nx^{n-1}$$
$$= A\{a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}\},$$

d. i. $F'(x) = Af'(x)$.

II. Wenn

$$f(x) = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n,$$
$$\varphi(x) = \alpha + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \ldots + \alpha_kx^k$$

ist, wobei wir $n \gtreqless k$ setzen wollen; so ist, für $f(x)+\varphi(x)=F(x)$,

$$F(x) = a + \alpha + (a_1 + \alpha_1)x + (a_2 + \alpha_2)x^2 + \ldots.$$
$$\ldots + (a_k + \alpha_k)x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_nx^n,$$
$$F'(x) = a_1 + \alpha_1 + 2(a_2 + \alpha_2)x + 3(a_3 + \alpha_3)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + k(a_k + \alpha_k)x^{k-1} + (k+1)a_{k+1}x^k + \ldots + na_nx^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1}$$
$$+ \alpha_1 + 2\alpha_2x + 3\alpha_3x^2 + 4\alpha_3x^3 + \ldots + k\alpha_kx^{k-1},$$

d. i. $F'(x) = f'(x) + \varphi'(x)$.

III. Ist $F(x) = f(x) - \varphi(x)$, so kann man

$$F(x) = f(x) + (-1)\cdot\varphi(x)$$

setzen, und aus I. und II. folgt dann auf der Stelle

$$F'(x) = f'(x) + (-1)\cdot\varphi'(x),$$

d. i. $F'(x) = f'(x) - \varphi'(x)$.

IV. Sey nun wieder

$$f(x) = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

und $F(x) = x^k f(x)$; so ist

$$F(x) = ax^k + a_1x^{k+1} + a_2x^{k+2} + \ldots + a_nx^{k+n},$$
$$F'(x) = kax^{k-1} + (k+1)a_1x^k + (k+2)a_2x^{k+1} + \ldots + (k+n)a_nx^{k+n-1}$$
$$= k\{a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n\}x^{k-1}$$
$$+ \{a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}\}x^k,$$

d. i.

$$F'(x) = kx^{k-1}f(x) + x^kf'(x).$$

V. Für $F(x) = Ax^k f(x)$ ist also

$$F'(x) = kAx^{k-1} f(x) + Ax^k f'(x) .$$

VI. Für

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

und $F(x) = f(x) . \varphi(x)$ ist

$$F(x) = a\varphi(x) + a_1 x\varphi(x) + a_2 x^2 \varphi(x) + \ldots + a_n x^n \varphi(x) ;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} F'(x) = a\varphi'(x) &+ a_1 \{x\varphi'(x) + 1\varphi(x)\} \\ &+ a_2 \{x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x)\} \\ &+ a_3 \{x^3 \varphi'(x) + 3x^2\varphi(x)\} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \\ &+ a_n \{x^n \varphi'(x) + nx^{n-1}\varphi(x)\} \\ = \{a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n\} &\varphi'(x) \\ + \{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}\} &\varphi(x) ; \end{aligned}$$

folglich

$$F'(x) = f(x) . \varphi'(x) + \varphi(x) . f'(x) .$$

VII. Für $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ist

$$f(x) = F(x) . \varphi(x) ,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$f'(x) = F(x) . \varphi'(x) + \varphi(x) . F'(x) ,$$

woraus

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x) . \varphi'(x)}{\varphi(x)} ,$$

und, wenn man für $F(x)$ seinen obigen Ausdruck setzt,

$$F'(x) = \frac{\varphi(x) . f'(x) - f(x) . \varphi'(x)}{\{\varphi(x)\}^2} .$$

VIII. Setzen wir

$$f_n(x) = (x + a)^n ,$$

also $f_0(x) = 1$; so ist

$$f_n(x) = (x + a) f_{n-1}(x) ,$$

und folglich nach **VI.**

$$f'_n(x) = (x + a) f'_{n-1}(x) + f_{n-1}(x) ,$$

d. i.

$$f'_n(x) = (x + a) \{f'_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)\} .$$

Also ist

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= 1 , \\ f'_2(x) &= (x + a) \{f'_1(x) + f_0(x)\} = 2(x + a) , \\ f'_3(x) &= (x + a) \{f'_2(x) + f_1(x)\} = 3(x + a)^2 , \\ f'_4(x) &= (x + a) \{f'_3(x) + f_2(x)\} = 4(x + a)^3 , \\ f'_5(x) &= (x + a) \{f'_4(x) + f_3(x)\} = 5(x + a)^4 , \\ &\text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Folglich ist allgemein

$$f'_n(x) = n(x+a)^{n-1},$$

wie sich auch leicht beweisen läßt, wenn man $f_n(x) = (x+a)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt.

49. Wenn

$$f(x) = ax^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + \ldots + a_k x^{n+k}$$

ist; so kann man den absoluten Werth von x immer so klein nehmen, daß das Vorzeichen des entsprechenden Werthes der Function mit dem Vorzeichen ihres ersten Gliedes ax^n einerlei ist, oder bloß durch dieses Glied bestimmt wird, wobei wir zugleich immer annehmen wollen, daß die Function für den in Rede stehenden Werth von x mit Berücksichtigung seines Vorzeichens nicht verschwindet. Um dies zu zeigen, seyen

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$$

die absoluten Werthe der Coefficienten

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k;$$

der absolute Werth von x sey ξ; die größte unter den Größen

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$$

sey α_e. Nimmt man nun

$$\xi < \frac{\alpha}{k\alpha_e},$$

so ist offenbar auch $\xi < 1$, wenn nur k nicht $= 0$ ist, in welchem Falle sich der zu beweisende Satz von selbst versteht. Die Größen

$$\frac{\alpha}{k\alpha_1}, \frac{\alpha}{k\alpha_2}, \frac{\alpha}{k\alpha_3}, \frac{\alpha}{k\alpha_4}, \ldots \frac{\alpha}{k\alpha_k}$$

sind sämmtlich nicht kleiner wie die Größe $\frac{\alpha}{k\alpha_e}$, und es ist folglich

$$\xi < \frac{\alpha}{k\alpha_1}, \xi < \frac{\alpha}{k\alpha_2}, \xi < \frac{\alpha}{k\alpha_3}, \ldots \xi < \frac{\alpha}{k\alpha_k};$$

$$\alpha_1\xi < \frac{\alpha}{k}, \alpha_2\xi < \frac{\alpha}{k}, \alpha_3\xi < \frac{\alpha}{k}, \ldots \alpha_k\xi < \frac{\alpha}{k};$$

also, weil $\xi < 1$ ist, um so mehr

$$\alpha_1\xi < \frac{\alpha}{k}, \alpha_2\xi^2 < \frac{\alpha}{k}, \alpha_3\xi^3 < \frac{\alpha}{k}, \ldots \alpha_k\xi^k < \frac{\alpha}{k};$$

folglich, wenn man addirt,

$$\alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \ldots + \alpha_k\xi^k < \alpha,$$

$$\alpha_1\xi^{n+1} + \alpha_2\xi^{n+2} + \alpha_3\xi^{n+3} + \ldots + \alpha_k\xi^{n+k} < a\xi^n.$$

Also ist offenbar um so mehr der absolute Werth von ax^n größer wie der absolute Werth von

$$a_1x^{n+1} + a_2x^{n+2} + a_3x^{n+3} + \ldots + a_kx^{n+k},$$

so daß also augenscheinlich, wenn man den absoluten Werth von $x = \xi$ setzt, das Vorzeichen des entsprechenden Werths der Function $f(x)$ bloß von dem Gliede ax^n abhängt.

50. Man kann aber auch den absoluten Werth von x immer so groß nehmen, daß das Vorzeichen des entsprechenden Werths der Function

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n+1} + a_3x^{n+2} + \ldots + a_kx^{n+k}$$

bloß durch das Zeichen des Gliedes a_kx^{n+k} bestimmt wird. Es ist nämlich

$$f(x) = x^{n+k}\left\{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \frac{a_{k-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a}{x^k}\right\},$$

und nach (49.) kann man den absoluten Werth von $\frac{1}{x}$ so klein, den absoluten Werth von x also so groß nehmen, daß das Zeichen der Größe

$$a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \frac{a_{k-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a}{x^k}$$

bloß von a_k, das Zeichen der Function $f(x)$ folglich bloß von a_kx^{n+k} abhängt, wie behauptet wurde.

51. Wenn

$$f(x) = ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} + \ldots,$$
$$f_1(x) = a_1x^{n'} + b_1x^{n'+1} + c_1x^{n'+2} + \ldots,$$
$$f_2(x) = a_2x^{n''} + b_2x^{n''+1} + c_2x^{n''+2} + \ldots,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

mehrere ganze rationale algebraische Functionen sind; so erhellet aus dem Vorhergehenden auch leicht, daß man den absoluten Werth von x immer so bestimmen kann, daß die Vorzeichen der Werthe aller dieser Functionen bloß durch die Vorzeichen ihrer entsprechenden ersten Glieder

$$ax^n,\ a_1x^{n'},\ a_2x^{n''},\ a_3x^{n'''},\ \ldots.$$

bestimmt werden. Setzen wir nun im Folgenden mehrere gegebene ganze rationale algebraische Functionen ihren ersten Gliedern gleich, z. B.

$$f(x) = ax^n,\ f_1(x) = a_1x^{n'},\ f_2(x) = a_2x^{n''},\ \ldots;$$

so soll dies stets bloß so viel heißen, daß der absolute Werth von x so klein genommen oder überhaupt so bestimmt worden sey, daß die Vorzeichen der Werthe der sämmtlichen gegebenen Functionen bloß von den Vorzeichen ihrer ersten Glieder abhängen.

Setzt man dagegen Functionen ihren letzten oder höchsten Gliedern, d. i. den Gliedern, welche die höchste Potenz von x enthalten, gleich, oder sagt man, daß diese Functionen sich sämmlich auf ihre höchsten Glieder reduciren; so hat man damit wieder immer bloß den Sinn zu verbinden, daß der absolute Werth von x so groß genommen sey, daß die Vorzeichen der Functionen bloß von den Vorzeichen der in Rede stehenden Glieder abhängen.

52. Nach (47.) ist

$$f(a+i) = f(a) + \frac{i}{1}f'(a) + \frac{i^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a),$$

wenn a jetzt irgend einen gewissen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Größe x bezeichnet, und nach (49.) kann man den absoluten Werth von i so klein nehmen, daß das Vorzeichen der Größe

$$\frac{i}{1}f'(a) + \frac{i^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a)$$

bloß von dem Gliede $if'(a)$ abhängt. Denkt man sich also den absoluten Werth von i so klein genommen, daß dieser Bedingung genügt wird; so kann man in dem in (51.) näher angedeuteten Sinne

$$\frac{i}{1}f'(a) + \frac{i^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a),$$

oder

$$f(a+i) = f(a) + if'(a)$$

setzen, woraus nun Folgendes hervorgeht:

I. Wenn $f'(a)$ positiv ist; so wird $f(x)$ in der Nähe des Werths a von x von $f(a)$ an mit x gleichzeitig zu- und abnehmen.

II. Ist aber $f'(a)$ negativ, so wird $f(x)$ in der Nähe des Werthes a von x, wenn x von a an zu- oder abnimmt, von $f(a)$ an respective ab- oder zunehmen.

III. Ist nun $f'(x)$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, d. h., wenn wir $b > a$ setzen, von $x = a$ bis $x = b$ stets positiv; so wird $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ stets wachsen, wenn man x von $x = a$ bis $x = b$ wachsen läßt.

IV. Ist aber $f'(x)$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, d. h., wenn wir wieder $b > a$ setzen, von $x = a$ bis $x = b$ stets negativ; so wird $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ stets abnehmen, wenn man x von $x = a$ bis $x = b$ wachsen läßt.

V. Aendert also $f'(x)$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ sein Zeichen nicht; so wird $f(x)$ zwischen diesen Gränzen entweder stets wachsen oder stets abnehmen, wobei a und b ganz beliebige positive oder negative Größen sind.

VI. Aus dem Obigen geht auch mit völliger Deutlichkeit hervor, daß jede ganze rationale algebraische Function sich zwischen jeden zwei beliebigen Gränzen stetig verändert. Es ist nämlich

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x).$$

Bezeichnet nun N eine beliebig kleine positive Größe; so kann man, wie aus (49.) erhellet, den absoluten Werth von i immer so klein nehmen, daß der absolute Werth von

$$\frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x)$$

kleiner als **N** ist, woraus man sieht, daß unendlich kleinen Aenderungen von x stets unendlich kleine Aenderungen der Function entsprechen, oder daß jede ganze rationale algebraische Function sich zwischen jeden zwei beliebigen Gränzen, also auch zwischen den Gränzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$, jederzeit stetig verändert. Obgleich dies eigentlich schon für sich klar und früher auch schon gebraucht worden ist; so haben wir der obigen Erläuterung hier doch einigen Raum vergönnt, weil von der Stetigkeit der ganzen rationalen Function überhaupt, vorzüglich aber im Folgenden, so vielfacher Gebrauch gemacht wird. Da alle derivirten Functionen wieder ganze rationale algebraische Functionen sind; so sind auch alle derivirten Functionen jeder ganzen rationalen algebraischen Function zwischen jeden zwei beliebigen Gränzen stetig.

53. Seyen jetzt **A** und **B** respective der kleinste und größte Werth der Function

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$$

zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = a$, d. h. der kleinste und größte unter allen den Werthen, welche diese Function erhält, wenn man sich x vom $x = 0$ bis $x = a$ stetig verändern läßt, und $f(x)$ sey eine für $x = 0$ verschwindende ganze rationale algebraische Function; so ist

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

jederzeit eine Mittelgröße zwischen **A** und **B**, d. h. nicht kleiner wie **A** und nicht größer wie **B**.

Um dies zu beweisen sey i eine unendlich kleine positive Größe, die nur nicht null selbst ist, sonst aber beliebig klein angenommen werden kann; so ist, wenn wir

$$A - i = A', \quad B + i = B'$$

setzen, für jedes x von $x = 0$ bis $x = a$,

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} > A', \quad \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} < B'$$

oder

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - A' > 0, \quad \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - B' < 0,$$

so daß also diese beiden Größen ihre Vorzeichen in dem in Rede stehenden Intervall nicht ändern, und zwar die erste stets > 0, die zweite stets < 0 ist. Also ist auch in diesem Intervall die eine der Größen

$$nx^{n-1}\left\{\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - A'\right\}, \quad nx^{n-1}\left\{\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} - B'\right\},$$

d. i. die eine der Größen

$$f'(x) - nA'x^{n-1},\ f'(x) - nB'x^{n-1}$$

ohne Beziehung stets positiv, die andere stets negativ. Diese beiden Größen sind respective die derivirten Functionen von

$$f(x) - A'x^n,\ f(x) - B'x^n,$$

und es wird also nach (52.) die eine dieser beiden Größen von $x = 0$ bis $x = a$ stets wachsen, die andere dagegen stets abnehmen. Weil nun aber nach der Voraussetzung die beiden obigen Functionen für $x = 0$ verschwinden; so ist klar, daß die eine der beiden Größen

$$f(a) - A'a^n,\ f(a) - B'a^n$$

jederzeit > 0, die andere dagegen < 0 ist. Folglich ist auch, wenn man mit a^n dividirt, die eine der beiden Größen

$$\frac{f(a)}{a^n} - A',\ \frac{f(a)}{a^n} - B'$$

jederzeit positiv, die andere dagegen negativ, d. i. die eine > 0, die andere < 0. Weil nun

$$\left\{\frac{f(a)}{a^n} - A'\right\} - \left\{\frac{f(a)}{a^n} - B'\right\} = B' - A'$$

und nach der Voraussetzung $B' - A' > 0$ ist; so ist offenbar

$$\frac{f(a)}{a^n} - A' > 0,\ \frac{f(a)}{a^n} - B' < 0$$

oder

$$\frac{f(a)}{a^n} > A',\ \frac{f(a)}{a^n} < B'.$$

Weil nun aber

$$A - i = A',\ B + i = B',$$

ist, und i beliebig klein genommen werden kann, wenn es nur nicht null selbst wird; so ist klar, daß

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

jederzeit eine Mittelgröße zwischen A und B, d. h. nicht kleiner wie A, nicht größer wie B ist, wie behauptet wurde *).

54. Die Function $\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$ ist offenbar zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = a$ stetig, wobei man nur zu beachten hat, daß man, statt x wirklich $= 0$ zu setzen, an dieser Gränze immer eine unendlich wenig von null verschiedene zwischen 0 und a liegende Größe sich für x gesetzt denken kann, und

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

*) Wegen weiterer Entwickelung und größerer Verallgemeinerung dieses Satzes s. m. den Artikel Taylors Lehrsatz i. d. Z. Für unsern jetzigen Zweck ist das Obige hinreichend.

ist nach (53.) eine Mittelgröße zwischen dem kleinsten und größten unter allen Werthen von

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$$

von $x = 0$ bis $x = a$. Also muß unter diesen Werthen von

$$\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}$$

jederzeit mindestens einer vorkommen, welcher der Größe

$$\frac{f(a)}{a^n}$$

gleich ist. Da dieser Werth der in Rede stehenden Function einem Mittelwerthe von x zwischen 0 und a entspricht, und jede Mittelgröße zwischen 0 und a offenbar durch ϱa bezeichnet werden kann, wo ϱ eine die Einheit nicht übersteigende positive Größe ist; so ist klar, daß man unter der in (53.) gemachten Voraussetzung, daß $f(0) = 0$ ist, jederzeit

$$\frac{f(a)}{a^n} = \frac{f'(\varrho a)}{n(\varrho a)^{n-1}}$$

oder nun überhaupt

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}}$$

setzen kann.

55. Verschwinden $f(x)$ und $f'(x)$ für $x = 0$, so ist nach der vorhergehenden Gleichung, wenn immer ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ... positive die Einheit nicht übersteigende Größen bezeichnen,

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}},$$

$$\frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}} = \frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}};$$

also

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}},$$

oder, weil $\varrho\varrho'$ offenbar auch eine positive die Einheit nicht übersteigende Größe ist,

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f''(\varrho x)}{n(n-1)(\varrho x)^{n-2}}.$$

Verschwinden $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ für $x = 0$, so ist eben so nach (54.)

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}},$$

$$\frac{f'(\varrho x)}{n(\varrho x)^{n-1}} = \frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}},$$

$$\frac{f''(\varrho\varrho' x)}{n(n-1)(\varrho\varrho' x)^{n-2}} = \frac{f'''(\varrho\varrho'\varrho'' x)}{n(n-1)(n-2)(\varrho\varrho'\varrho'' x)^{n-3}};$$

also

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'''(\varrho\varrho'\varrho''x)}{n(n-1)(n-2)(\varrho\varrho'\varrho''x)^{n-3}},$$

oder, weil $\varrho\varrho'\varrho''$ eine positive die Einheit nicht übersteigende Größe ist,

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'''(\varrho x)}{n(n-1)(n-2)(\varrho x)^{n-3}}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen könnte, ist klar. Wenn

$$f(x), f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ verschwinden, so ist

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\varrho x)}{1.2.3\ldots n},$$

wie aus dem Vorhergehenden leicht erhellet.

56. Bevor wir weitere Anwendungen hiervon machen, schalten wir noch folgende Betrachtung über die derivirten Functionen ein. Sey

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n;$$

so ist

$$f(x+i) = a + a_1(x+i) + a_2(x+i)^2 + \ldots + a_n(x+i)^n.$$

Diese Function wollen wir nun als Function von $x + i$, als eine einfache veränderliche Größe, und als Function von i betrachten. In ersterer Beziehung setzen wir $x + i = z$, also

$$f(z) = a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n.$$

Nehmen wir nun die erste derivirte Function in Bezug auf z als veränderliche Größe; so erhalten wir

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + na_n z^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2(x+i) + 3a_3(x+i)^2 + \ldots + na_n(x+i)^{n-1}.$$

Betrachten wir $f(x+i)$ als Function von i, so wollen wir $f(x+i) = \varphi(i)$ setzen. Dann ist nach den in (48.) entwickelten Regeln

$$\varphi'(i) = a_1 + 2a_2(x+i) + 3a_3(x+i)^2 + \ldots + na_n(x+i)^{n-1},$$

d. i. $f'(z) = \varphi'(i)$; folglich erhält man einerlei Resultat, wenn man von $f(x+i)$ die erste derivirte Function in Bezug auf $x + i$ als einfache veränderliche Größe oder in Bezug auf i als veränderliche Größe entwickelt. Will man also $\varphi'(i)$ haben, so entwickelt man $f'(x)$ und schreibt $x + i$ für x. Dies wird sogleich seine Anwendung finden.

57. **I.** Man betrachte

$$f(x+i) - f(x)$$

als Function von i und setze zu dem Ende

$$f(x+i) - f(x) = F(i);$$

so ist

$$F(0) = f(x) - f(x) = 0.$$

und $F(i)$ verschwindet also für $i = 0$. Also ist nach (55.) für $n = 1$

$$\frac{F(i)}{i} = F'(\varrho i),$$

wo ϱ dieselbe Bedeutung hat wie a. a. O. Aus der Gleichung

$$F(i) = f(x + i) - f(x),$$

wo $f(x)$ kein i enthält und daher constant ist, folgt

$$F'(i) = f'(x + i),$$

wo nach (56.) $f'(x + i)$ aus $f'(x)$ erhalten wird, wenn man $x + i$ für x setzt. Also ist

$$F'(\varrho i) = f'(x + \varrho i),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{f(x + i) - f(x)}{i} = f'(x + \varrho i),$$

d. i.

$$f(x + i) = f(x) + i f'(x + \varrho i).$$

II. Sey ferner

$$f(x + i) - f(x) - \frac{i}{1} f'(x) = F(i),$$

so ist

$$F'(i) = f'(x + i) - f'(x);$$

folglich verschwinden offenbar $F(i)$ und $F'(i)$ für $i = 0$. Also ist nach (55.) für $n = 2$

$$\frac{F(i)}{i^2} = \frac{F''(\varrho i)}{1.2}.$$

Aber

$$F''(i) = f''(x + i)$$

und folglich

$$F''(\varrho i) = f''(x + \varrho i).$$

Dies giebt nach dem Obigen

$$\frac{f(x+i) - f(x) - \frac{i}{1} f'(x)}{i^2} = \frac{f''(x + \varrho i)}{1.2}$$

oder

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x + \varrho i).$$

III. Setzt man

$$f(x+i) - f(x) - \frac{i}{1} f'(x) - \frac{i^2}{1.2} f''(x) = F(i),$$

so ist

$$F'(i) = f'(x+i) - f'(x) - \frac{i}{1} f''(x),$$

$$F''(i) = f''(x+i) - f''(x),$$

und $F(i)$, $F'(i)$, $F''(i)$ verschwinden also für $i = 0$. Also ist nach (55.) für $n = 3$

$$\frac{F(i)}{i^3} = \frac{F'''(\varrho i)}{1.2.3}.$$

Nun ist aber

$$F'''(i) = f'''(x+i)$$

und

$$F'''(\varrho i) = f'''(x+\varrho i).$$

Also ist nach dem Obigen

$$\frac{f(x+i) - f(x) - \frac{i}{1}f'(x) - \frac{i^2}{1.2}f''(x)}{i^3} = \frac{f'''(x+\varrho i)}{1.2.3},$$

d. i.

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x+\varrho i).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen könnte, ist klar. Das Vorhergehende ist aber zu unserm gegenwärtigen Zwecke mehr als hinreichend.

58. Mit der Lehre von den derivirten Functionen hängen mehrere Sätze von den Gleichungen mit gleichen Wurzeln zusammen, die wir im Folgenden brauchen und daher hier noch kurz entwickeln wollen.

I. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ des nten Grades nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= \alpha$ sind; so hat die derivirte Gleichung $f'(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als $k-1$ Wurzeln, die $= \alpha$ sind, wobei sich von selbst versteht, daß k nicht $= 0$ seyn darf.

Da die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= \alpha$ sind; so ist

$$f(x) = (x-\alpha)^k \varphi(x),$$

und $\varphi(\alpha)$ ist nicht $= 0$. Nimmt man nun die derivirten Functionen, so erhält man nach den aus dem Obigen bekannten Regeln

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-\alpha)^k \varphi'(x) + k(x-\alpha)^{k-1}\varphi(x) \\ &= (x-\alpha)^{k-1}\{(x-\alpha)\varphi'(x) + k\varphi(x)\}, \end{aligned}$$

und übersieht also hieraus auf der Stelle, daß die Gleichung $f'(x) = 0$ jederzeit $k-1$ Wurzeln hat, deren jede $= \alpha$ ist. Daß aber diese Gleichung auch nicht mehr als $k-1$ Wurzeln hat, die $= \alpha$ sind, erhellet eben so leicht. Sollte dieselbe nämlich k Wurzeln haben, die $= \alpha$ sind; so müßte offenbar $x-\alpha$ in der ganzen rationalen Function

$$(x-\alpha)\varphi'(x) + k\varphi(x)$$

aufgehen und diese Function also für $x = \alpha$ verschwinden, welches nicht möglich ist, da dieselbe für diesen Werth der unbe-

kannten Größe $= k\varphi(\alpha)$ wird, und nach der Voraussetzung weder k, noch $\varphi(\alpha)$, $= 0$ ist.

II. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= \alpha$ sind; so haben die Gleichungen

$$f'(x) = 0,\ f''(x) = 0,\ f'''(x) = 0,\ \ldots f^{(k-1)}(x) = 0,\ f^{(k)}(x) = 0$$

respective nicht mehr und nicht weniger als $k-1$, $k-2$, $k-3$, ... 2, 1, 0 Wurzeln, die $= \alpha$ sind.

Daß dies eine unmittelbare Folge aus dem Vorhergehenden ist, erhellet leicht. Daß k nicht $= 0$ seyn darf, versteht sich von selbst.

III. Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(k-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ sämmtlich verschwinden, aber $f^{(k)}(\alpha)$ nicht $= 0$ ist; so hat die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln, die $= \alpha$ sind.

Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche $= \alpha$ sind, sey $= p$, so ist $p > 0$, weil nach der Voraussetzung $f(\alpha) = 0$ ist. Daher verschwinden nach II. die Functionen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(p-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ sämmtlich, $f^{(p)}(\alpha)$ ist aber nicht $= 0$. Wäre nun $p > k$, so wäre $p-1$ mindestens $= k$, und es würde also $f^{(k)}(\alpha) = 0$ seyn, welches gegen die Voraussetzung ist. Wäre aber $p < k$, so wäre $k-1$ mindestens $= p$, und es müßte also $f^{(p)}(\alpha) = 0$ seyn, welches wieder nicht Statt finden kann. Daher ist $p = k$ und unser Satz also bewiesen. Daß dieser Satz, wenigstens gewissermaßen, auch für $k = 0$ gilt, erhellet leicht, weil für diesen Werth $f^{(k)}(\alpha)$ in $f(\alpha)$ übergeht, nach der Voraussetzung also $f(\alpha)$ nicht $= 0$, die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche $= \alpha$ sind, folglich $= 0$ ist.

IV. Sey jetzt

$$f(x) = A(x-a)^m(x-b)^p(x-c)^q \ldots .,$$

wo A eine beliebige constante Größe bezeichnet, und a, b, c, ... sämmtlich unter einander ungleich seyn sollen. Nun findet man leicht durch Entwickelung der ersten derivirten Function

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{p}{x-b} + \frac{q}{x-c} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{m(x-b)(x-c)..+p(x-a)(x-c)..+q(x-a)(x-b)..+\ldots.}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens respective durch $F(x)$ und $F_1(x)$ bezeichnet,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)}.$$

Sey nun ferner $\psi(x)$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$; so sind, wenn wir

$$\frac{f'(x)}{\psi(x)} = \varphi(x),\ \frac{f(x)}{\psi(x)} = \varphi_1(x)$$

setzen, $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ zwei ganze rationale algebraische Functionen von x, die für keinen Werth von x zugleich verschwinden, und es ist offenbar

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\ ;$$

also

$$F(x).\varphi_1(x) = \varphi(x).F_1(x)$$

für jedes x. Für $x=a$ ist folglich

$$F(a).\varphi_1(a) = \varphi(a).F_1(a)\ ,$$

d. i., weil $F_1(a) = 0$ ist,

$$F(a).\varphi_1(a) = 0\ ,$$

und folglich, weil $F(a)$ offenbar nicht $= 0$ ist, $\varphi_1(a) = 0$; also, weil $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verschwinden, $\varphi(a)$ nicht $= 0$. Weil $\varphi_1(a) = 0$ ist, so geht $x-a$ in $\varphi_1(x)$ auf, und

$$\frac{\varphi_1(x)}{x-a} = \varphi_2(x)$$

ist also eine ganze rationale algebraische Function. Aus dem Obigen ergiebt sich nun auf der Stelle

$$F(x).\frac{\varphi_1(x)}{x-a} = \varphi(x).\frac{F_1(x)}{x-a}\ ,$$

d. i.

$$F(x).\varphi_2(x) = \varphi(x).F_2(x)\ ;$$

wenn wir

$$(x-b)(x-c)(x-d)\ldots. = F_2(x)$$

setzen. Für $x = a$ ist also

$$F(a).\varphi_2(a) = \varphi(a).F_2(a)\ ,$$

wo weder $\varphi(a)$, noch $F_2(a)$, $= 0$, also auch $\varphi_2(a)$ nicht $= 0$ ist. Hieraus sieht man, daß die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ die Wurzel $x = a$ nur ein Mal enthält, und ganz auf dieselbe Art überzeugt man sich, daß diese Gleichung auch jede der Wurzeln $x = b, c, d, \ldots.$, zugleich aber auch jede nur ein Mal enthält, so daß also

$$\varphi_1(x) = 0$$

eine Gleichung ist, welche alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und jede dieser Wurzeln nur ein Mal, übrigens auch keine andern Wurzeln, enthält. Daß nämlich die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ auch keine andern Wurzeln wie a, b, c, d, ... enthält, erhellet leicht auf folgende Art. Nach dem Obigen ist für jedes x

$$F(x).\varphi_1(x) = \varphi(x).F_1(x)\ .$$

Wäre nun g eine nicht unter a, b, c, d, ... vorkommende Größe und $\varphi_1(g) = 0$, so daß nämlich g eine Wurzel der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ wäre; so müßte offenbar auch

$$\varphi(g) . F_1(g) = 0 ,$$

und folglich entweder $\varphi(g)$, oder $F_1(g)$, $= 0$ seyn. Beides ist aber nicht möglich, weil $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verschwinden, und

$$F_1(g) = (g-a)(g-b)(g-c) .....$$

offenbar nicht $= 0$ ist, da g unter den Größen a, b, c, d, ... nicht vorkommt. Man sieht also, daß die Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ bloß die Wurzeln a, b, c, d, ... hat, und auch jede nur ein Mal enthält. Die Function $\varphi_1(x)$ erhält man, wenn man $f(x)$ durch den größten gemeinschaftlichen Divisor $\psi(x)$ von $f(x)$ und $f'(x)$ dividirt, und kann also immer leicht eine Gleichung bilden, welche alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, jede dieser Wurzeln nur ein Mal, und übrigens keine andern Wurzeln enthält. Durch Auflösung der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ erhält man also alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und wird nun auch in allen Fällen durch mehrmalige successive Division mit $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... in die Function $f(x)$ leicht bestimmen können, wie oft jede dieser Wurzeln in der Gleichung $f(x) = 0$ vorkommt.

Man kann sich nun aber auch leicht eine Gleichung bilden, welche bloß alle die Wurzeln enthält, welche in der Gleichung $f(x) = 0$ mehr als ein Mal vorkommen. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\psi(x) . \varphi_1(x) = f(x) ,$$

und folglich

$$\psi(x) . \frac{\varphi_1(x)}{x-a} = \frac{f(x)}{x-a} ,$$

d. i., wenn wir wieder

$$\frac{\varphi_1(x)}{x-a} = \varphi_2(x)$$

setzen, wo $\varphi_2(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet, die für $x = a$ nicht verschwindet:

$$\psi(x) . \varphi_2(x) = A(x-a)^{m-1}(x-b)^{p}(x-c)^{q} .....$$

Da nun $\varphi_2(a)$ nicht $= 0$, und folglich $x-a$ kein Factor von $\varphi_2(x)$ ist; so sieht man, daß $\psi(x)$ den Factor $x-a$ nur $(m-1)$mal enthält. Ganz eben so enthält $\psi(x)$ den Factor $x-b$ nur $(p-1)$mal, den Factor $x-c$ nur $(q-1)$mal u. s. w., und überhaupt keine andern Factoren. Daher enthält die Gleichung

$$\psi(x) = 0$$

die Wurzeln a, b, c, ... der Gleichung $f(x) = 0$ respective $(m-1)$mal, $(p-1)$mal, $(q-1)$mal, u. s. w., und außerdem keine andern Wurzeln. Eine in der Gleichung $f(x) = 0$ nur

ein Mal vorkommende Wurzel enthält die Gleichung $\psi(x) = 0$ also gar nicht, und diese Gleichung enthält folglich bloß die Wurzeln, welche die Gleichung $f(x) = 0$ mehr als ein Mal enthält. $\psi(x)$ ist der größte gemeinschaftliche Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$. Ist dieser größte gemeinschaftliche Divisor eine constante Größe, so versteht sich von selbst, daß die Gleichung $f(x) = 0$ gar keine gleichen Wurzeln hat.

59. Noch verdient folgender Satz bemerkt zu werden. Wir wollen annehmen, daß a, b, c, d, ... p, q die sämmtlichen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind; auch mögen diese Wurzeln in vorstehender Reihe absteigend nach ihrer Größe geordnet und sämmtlich unter einander ungleich seyn. Bezeichnet nun $\varphi(x)$ das Product aller imaginären einfachen Factoren der Function $f(x)$; so ist bekanntlich

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q)\varphi(x),$$

und folglich

$$\begin{aligned} f'(x) = \{ & (x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-p)(x-q) \\ & + (x-a)(x-c)(x-d)\ldots(x-p)(x-q) \\ & + (x-a)(x-b)(x-d)\ldots(x-p)(x-q) \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-o)(x-q) \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-o)(x-p)\} \varphi(x) \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)(x-q)\varphi'(x). \end{aligned}$$

Da die imaginären Wurzeln bekanntlich immer paarweise von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ vorhanden sind, und

$$(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1}) = (x-\alpha)^2+\beta^2$$

ist; so ist $\varphi(x)$ ein Product von der Form

$$\varphi(x) = \{(x-\alpha)^2+\beta^2\}\{(x-\alpha')^2+\beta'^2\}\{(x-\alpha'')^2+\beta''^2\}\ldots,$$

und daher für jedes x positiv. Also ist

$$\begin{aligned} f'(a) &= (a-b)(a-c)(a-d)..(a-p)(a-q)\varphi(a) > 0, \\ f'(b) &= (b-a)(b-c)(b-d)..(b-p)(b-q)\varphi(b) < 0, \\ f'(c) &= (c-a)(c-b)(c-d)..(c-p)(c-q)\varphi(c) > 0, \\ f'(d) &= (d-a)(d-b)(d-c)..(d-p)(d-q)\varphi(d) < 0, \\ &\text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

woraus sich nach (9.) unmittelbar folgender Satz ergiebt:

Zwischen jeden zwei nächsten reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegt immer mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, auch selbst dann, wenn unter den reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gleiche vorkommen, weil das Obige richtig bleibt, wie klein man auch die Unterschiede der reellen Wurzeln dieser Gleichung annehmen mag.

B. Von den Zeichenreihen.

60. Die gegebene Gleichung, deren Coefficienten wir jetzt sämmtlich als reelle Größen annehmen, sey nun wieder, wie immer in diesem Artikel,

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0 .$$

Entwickelt man die derivirten Functionen von $f(x)$ und schreibt dieselben in umgekehrter Ordnung; so erhält man die Reihe

$$f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x), \ldots . f'(x), f(x) ,$$

welche im Folgenden in der Kürze bloß durch $f^{(n)}f$ bezeichnet und die Functionenreihe genannt werden soll. Setzt man nun für x einen bestimmten Werth a, und ordnet die Vorzeichen der einzelnen Glieder der Reihe

$$f^{(n)}(a), f^{(n-1)}(a), f^{(n-2)}(a), \ldots . f'(a), f'(a)$$

in eine Reihe, so soll diese Reihe die der Functionenreihe $f^{(n)}f$ für den Werth a der veränderlichen Größe entsprechende Zeichenreihe genannt und durch (a) bezeichnet werden, wobei wir zugleich noch bemerken, daß, wenn für $x = a$ Glieder der Functionenreihe verschwinden, in der Zeichenreihe (a) an den entsprechenden Stellen jederzeit 0 geschrieben wird, wie sich von selbst versteht. Diese Zeichenreihen spielen bei der Auflösung der numerischen Gleichungen, wie wir im Folgenden sehen werden, eine große Rolle, und sollen daher hier zunächst einer ausführlichen Betrachtung gewürdigt werden.

61. Weil, wie leicht erhellet,

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3 \ldots n$$

ist; so ist das erste Glied jeder Zeichenreihe offenbar +.

Für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ reducirt sich jede der in der Functionenreihe $f^{(n)}f$ enthaltenen Functionen auf ihr erstes oder höchstes Glied (51.). Deshalb enthält die Zeichenreihe $(-\infty)$ offenbar bloß Zeichenwechsel, die Zeichenreihe $(+\infty)$ dagegen bloß Zeichenfolgen. Die Anzahl der Zeichenwechsel in $(-\infty)$ sowohl, als auch die Anzahl der Zeichenfolgen in $(+\infty)$ ist $= n$. Die Anzahl der Zeichenwechsel in $(+\infty)$ ist null, und die Zeichenreihe $(+\infty)$ hat also n Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe $(-\infty)$.

Wir wollen uns nun denken, daß x von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wachse, und wollen die Veränderungen aufmerksam betrachten, welche dabei die den einzelnen Werthen von x entsprechenden Zeichenreihen erleiden, wobei wir zunächst die sich auf der Stelle ergebende Bemerkung machen, daß überhaupt keine Veränderung mit den Zeichenreihen vorgehen kann, wenn nicht ein oder einige Glieder der Functionenreihe für einen gewissen Werth von x verschwinden, indem wegen der Stetigkeit der ganzen rationalen al-

gebraischen Functionen zwischen jeden zwei beliebigen Gränzen keine solche Function vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt vom Negativen zum Positiven übergehen kann, ohne zwischen beiden Zuständen zu verschwinden, wobei man auch (9.) vergleichen mag.

62. Durch i soll im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bestimmt wird, immer eine positive unendlich kleine Größe bezeichnet werden, so daß also $a - i$ und $a + i$ zwei dem Werthe a von x auf beiden Seiten unendlich nahe liegende oder nächst benachbarte Werthe dieser veränderlichen Größe, $(a - i)$ und $(a + i)$ also zwei der Zeichenreihe (a) nächst benachbarte Zeichenreihen sind. Dies vorausgesetzt, legen wir uns nun zunächst die Frage vor, wie man aus der Zeichenreihe (a) immer mit Leichtigkeit die beiden nächst benachbarten Zeichenreihen $(a - i)$ und $(a + i)$ ableiten oder bilden kann.

I. Wir wollen zuerst annehmen, daß das beliebige Glied $f^{(k)}(x)$ der Functionenreihe für $x = a$ nicht verschwinde, so daß also $f^{(k)}(a)$ nicht null, das entsprechende Glied der Zeichenreihe (a) also auch nicht 0, sondern $\pm$ ist. Nach dem Obigen ist

$$f^{(k)}(a \pm i) = f^{(k)}(a) \pm \frac{i}{1} f^{(k+1)}(a) + \ldots + \frac{(-i)^{n-k}}{1 \ldots (n-k)} f^{(n-k)}(a),$$

und i kann immer so klein genommen werden, daß das Zeichen der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, d. h. das Zeichen von $f^{(k)}(a \pm i)$, bloß von dem Zeichen des ersten Gliedes $f^{(k)}(a)$, welches nach der Voraussetzung nicht null ist, abhängt oder mit dem Zeichen dieses Gliedes einerlei ist. Wenn also das dem Gliede $f^{(k)}(a)$ der Functionenreihe entsprechende Glied der Zeichenreihe (a) $\pm$ ist; so sind mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander auch die entsprechenden Glieder der Zeichenreihen $(a - i)$ und $(a + i)$ $\pm$. Für jedes Glied der Zeichenreihe (a), welches nicht null ist, hat man also in den Zeichenreihen $(a - i)$ und $(a + i)$ dasselbe Zeichen zu setzen.

II. Nun wollen wir aber annehmen, daß die den Gliedern

$$f^{(k+1)}(a), f^{(k)}(a), f^{(k-1)}(a), f^{(k-2)}(a), \ldots f^{(k-e)}(a)$$

der Functionenreihe entsprechenden Glieder der Zeichenreihe (a) respective

$$\pm 0000 \ldots 00$$

sind; so ist nach dem Obigen, indem man vorzüglich auch die in (51.) gemachten Bemerkungen berücksichtigt:

$$f^{(k)}(a \pm i) = \pm \frac{i}{1} f^{(k+1)}(a),$$

$$f^{(k-1)}(a \pm i) = \frac{i^2}{1.2} f^{(k+1)}(a),$$

$$f^{(k-2)}(a \pm i) = \pm \frac{i^3}{1.2.3} f^{(k+1)}(a) \,,$$

$$f^{(k-3)}(a \pm i) = \frac{i^4}{1 \ldots 4} f^{(k+1)}(a) \,,$$

u. s. w. u. s. w.

$$f^{(k-e)}(a \pm i) = (\pm 1)^{e+1} \cdot \frac{i^{e+1}}{1 \ldots (e+1)} f^{(k+1)}(a) \,.$$

Dies erhellet aus dem Obigen auf der Stelle, wenn man nur bedenkt, daß die Größen

$$f^{(k)}(a), f^{(k-1)}(a), f^{(k-2)}(a), \ldots f^{(k-e)}(a)$$

sämmtlich null sind.

Man sieht nun hieraus und aus **I.**, daß die den Gliedern

$$\pm 0000 \ldots 00$$

der Zeichenreihe (a) entsprechenden Glieder der Zeichenreihe (a — i) jederzeit

$$\pm \mp \pm \mp \pm \ldots \begin{cases} (-)^{e+1} \\ (-)^{e} \end{cases}$$

sind, so daß nämlich in diesem Theile der Zeichenreihe (a — i) die Zeichen vom ersten bis zum letzten Gliede beständig abwechseln. Die den Gliedern

$$\pm 0000 \ldots 00$$

der Zeichenreihe (a) entsprechenden Glieder der Zeichenreihe (a + i) sind dagegen

$$\pm \pm \pm \pm \pm \ldots \pm \,,$$

so daß nämlich in diesem Theile der Zeichenreihe (a + i) jedes Glied vom ersten bis zum letzten dem vorhergehenden Gliede gleich ist.

III. Aus **I.** und **II.** ergiebt sich nun unmittelbar folgende sehr einfache Regel zur Bildung der Zeichenreihen (a — i) und (a + i) aus der Zeichenreihe (a):

Ueber und unter jedes Glied der Zeichenreihe (a), welches nicht null ist, schreibe man dasselbe Zeichen. Dagegen schreibe man über jedes Glied der Reihe (a), welches null ist, das entgegengesetzte Zeichen von dem, welches in der Reihe (a — i) nach der linken Seite hin unmittelbar vorher geht; unter jedes Glied der Reihe (a), welches null ist, schreibe man aber ein dem in der Reihe (a + i) nach der linken Seite hin unmittelbar vorhergehenden gleiches Zeichen.

Fourier, welchem in neuester Zeit die Auflösung der numerischen Gleichungen die meiste Ausbildung und Vervollkommnung verdankt, nennt diese wichtige in der Anwendung sehr leichte Regel die Regel des doppelten Zeichens, und bezeichnet

sehr zweckmäßig die von a unendlich wenig verschiedenen Größen $a - i$ und $a + i$ bloß durch $< a$ und $> a$, die Zeichenreihen $(a - i)$ und $(a + i)$ also durch $(< a)$ und $(> a)$. Das folgende Beispiel wird die Anwendung der Regel des doppelten Zeichens erläutern:

$(< a) = + - + - + - + - + + + - + - + - + - - +$
$(a) = + - + 0\ 0\ 0\ 0 - 0\ 0\ 0 + + 0 + 0\ 0\ 0\ 0\ 0 - +$
$(> a) = + - + + + + + - - - - + + + + + + + + + - +$

63. Wir wollen nun ferner im Allgemeinen die Anzahl der in der Reihe $(a + i)$ oder $(> a)$ vorkommenden Zeichenwechsel mit der in der Reihe $(a - i)$ oder $(< a)$ enthaltenen Zeichenwechsel vergleichen.

I. Zuerst betrachten wir eine Gruppe auf einander folgender Glieder der Reihe (a), die sämmtlich 0 sind und von zwei nicht verschwindenden Gliedern auf beiden Seiten eingeschlossen oder begränzt werden, wobei nun aber wieder zwei Fälle zu unterscheiden sind, je nachdem die einschließenden oder begränzenden Glieder einander gleich oder entgegengesetzt sind. Die Anzahl der auf einander folgenden Glieder, welche sämmtlich 0 sind, wollen wir wie in (62.) $= e + 1$ setzen.

1. Haben wir also zunächst die Gruppe

$$\pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots .\ 0\ 0\ \pm$$

der Reihe (a), so giebt die Regel des doppelten Zeichens für die Reihen $(< a)$ und $(> a)$ nach dem Vorhergehenden:

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \ldots \begin{Bmatrix}(-)^{e+1}\\(-)^{e}\end{Bmatrix} \pm$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ldots\ldots 0\ \pm$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \ldots\ldots\ldots \pm \pm,$$

wo man nun wieder zwei Fälle unterscheiden muß, je nachdem die Anzahl der verschwindenden Glieder, welche wir durch $e + 1$ bezeichnet haben, eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

a. Wenn die Anzahl der verschwindenden Glieder eine gerade Zahl ist, so ist

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \ldots \pm \pm$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ 0\ \pm$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \ldots \pm \pm.$$

In diesem Falle hat also die Zeichenreihe $(> a)$ offenbar $e + 1$ Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe $(< a)$, natürlich nicht im Ganzen, sondern immer bloß in Bezug auf die hier betrachteten Gruppen.

b. Wenn die Anzahl der verschwindenden Glieder eine ungerade Zahl ist, so ist

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \mp \pm$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ 0 \pm$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \pm .$$

In diesem Falle hat also die Reihe $(> a)$ jederzeit $\varepsilon + 2$ Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe $(< a)$.

2. Haben wir ferner die Gruppe

$$\pm\ 00000 \ldots\ 00 \mp$$

der Reihe (a), so giebt die Regel des doppelten Zeichens

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \begin{Bmatrix}(-)^{\varepsilon+1}\\(-)^{\varepsilon}\end{Bmatrix} \mp$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ldots\ 0 \mp$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \ldots\ldots \pm \mp .$$

a. Ist nun die Anzahl der verschwindenden Glieder eine gerade Zahl; so ist

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \pm \mp$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ 0 \mp$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \mp .$$

In diesem Falle hat also die Zeichenreihe $(> a)$ wieder $\varepsilon + 1$ Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe $(< a)$.

b. Ist die Anzahl der verschwindenden Glieder eine ungerade Zahl, so ist

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \mp \mp$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ 0 \mp$$
$$(> (a)) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \mp .$$

Weil sich in diesem Falle die Zeichenfolge $\mp \mp$ am Ende der ersten Reihe in den Wechsel $\pm \mp$ am Ende der letzten Reihe verwandelt, so hat die Reihe $(> a)$ offenbar nur ε Zeichenwechsel weniger wie die Reihe $(< a)$.

3. Das Ergebniß aus allem Vorhergehenden ist Folgendes:

Wenn mehrere auf einander folgende Glieder der Reihe (a), deren Anzahl wir jetzt durch ε bezeichnen wollen, 0 sind und von zwei nicht verschwindenden Gliedern eingeschlossen werden; so hat

a. wenn ε eine gerade Zahl ist, die Reihe $(> a)$ jederzeit ε Zeichenwechsel weniger wie die Reihe $(< a)$.

b. Ist aber ε eine ungerade Zahl, so hat die Reihe $(> a)$ jederzeit $\varepsilon + 1$ oder $\varepsilon - 1$ Zeichenwechsel weniger wie die Reihe $(< a)$, je nachdem respective die beiden in Rede stehenden nicht verschwin-

denden Glieder einander gleich oder entgegengesetzt sind.

c. Ueberhaupt ist aber die Anzahl der Zeichenwechsel, welche unter den hier gemachten Voraussetzungen die Zeichenreihe ($> a$) weniger wie die Zeichenreihe ($< a$) hat, jederzeit eine gerade Zahl, wobei nur noch erinnert werden mag, daß diese Zahl, wie leicht erhellet, auch in gewissen Fällen $= 0$ seyn kann.

II. Wir betrachten nun ferner den Fall, wo die Reihe (a) sich auf folgende Art endigt:

$$\pm\ 00000 \ldots 00,$$

so daß nämlich das letzte Glied $f(x)$ der Functionenreihe sich mit unter den für $x = a$ verschwindenden Gliedern befindet, und wollen nun wieder die Anzahl der verschwindenden Glieder durch ε bezeichnen. Mittelst der Regel des doppelten Zeichens erhalten wir auf der Stelle:

1. wenn ε gerade ist:

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \mp \pm$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ 0\ 0$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \pm$$

2. wenn ε ungerade ist:

$$(< a) \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp \pm \mp \cdots \pm \mp$$
$$(a) \ldots\ldots \pm\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ 0\ 0$$
$$(> a) \ldots\ldots \pm \pm \pm \pm \pm \pm \cdots \pm \pm,$$

so daß also in beiden Fällen die Reihe ($> a$) offenbar ε Zeichenwechsel weniger wie die Reihe ($< a$) hat.

In diesem Falle hat, was vorzüglich zu bemerken ist, nach 58. III. die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr und nicht weniger als ε reelle Wurzeln, deren jede $= a$ ist, so daß also für jede dieser reellen Wurzeln ein Zeichenwechsel in eine Zeichenfolge übergeht oder verschwindet.

III. Wenn nun, wie es auch der Fall seyn kann, mehrere Gruppen von Gliedern der Reihe (a) von der ersten oder zweiten der beiden vorher betrachteten Arten null sind, so läßt sich zwar die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe ($> a$) im Allgemeinen aus der Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe ($< a$) nicht herleiten, oder vielmehr die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe ($< a$) und ($> a$) nicht im Allgemeinen bestimmen; man kann aber doch nach dem Vorhergehenden Folgendes mit Gewißheit behaupten:

1. Die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe ($> a$) ist nie größer wie die Anzahl der Zeichenwech-

sel der Reihe ($< a$). Die Differenz, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe ($> a$) von der Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe ($< a$) abzieht, ist also nie eine negative Zahl, kann aber wohl $= 0$ seyn.

2. Wenn das letzte Glied $f(x)$ der Functionenreihe für $x = a$ nicht verschwindet, oder a keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist; so ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe ($< a$) und der Reihe ($> a$) jederzeit eine gerade Zahl, wodurch aber nicht ausgeschlossen ist, daß diese Differenz $= 0$ seyn kann.

3. Wenn ε letzte Glieder der Functionenreihe in ununterbrochener Folge für $x = a$ verschwinden, d. h. wenn die Gleichung $f(x) = 0$ ε Wurzeln hat, die sämmtlich $= a$ sind; so hat die Zeichenreihe ($> a$) jederzeit mindestens ε Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe ($< a$). Für jede reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, welche $= a$ ist, hat die Zeichenreihe ($> a$) einen Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe ($< a$).

64. Wir wollen uns nun vorstellen, daß, wenn a und b zwei beliebe reelle Größen sind, und $b > a$ ist, wo a auch $= -\infty$, $b = +\infty$ seyn kann, x von $x = a$ bis $x = b$ stetig wächst; so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar Folgendes:

I. Das erste Glied jeder Zeichenreihe ist $+$.

II. Die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $(-\infty)$ ist $= n$.

III. Die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $(+\infty)$ ist $= 0$.

IV. Die Reihe $(+\infty)$ hat also n, d. h. eben so viele Zeichenwechsel weniger als die Reihe $(-\infty)$, wie die gegebene Gleichung überhaupt Wurzeln hat.

V. Wächst x stetig von $-\infty$ bis $+\infty$, so nimmt die Anzahl der Zeichenwechsel in den einzelnen Zeichenreihen nie zu, und vermindert sich überhaupt successive von n bis 0.

VI. Die Zeichenreihe (b) kann höchstens n Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe (a) haben. Die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (b) ist nie größer wie die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (a). Zieht man also die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (b) von der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (a) ab, so kann die Differenz nie negativ, wohl aber $= 0$ seyn.

VII. Für jede einzelne zwischen den Gränzen a und b liegende reelle Wurzel der gegebenen Gleichung verschwindet ein Zeichenwechsel. Liegen also zwischen den Gränzen a und b m reelle Wurzeln der Gleichung, so muß die Zeichenreihe (b) min-

deſtens m Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe (a) haben, wobei noch beſonders bemerkt werden mag, daß hierbei ſowohl alle zwiſchen a und b liegende reelle Wurzeln der Gleichung unter einander ungleich, oder alle, oder theilweiſe einander gleich ſeyn können.

VIII. Hat daher die Zeichenreihe (b) nicht weniger Zeichenwechſel wie die Zeichenreihe (a), ſo daß alſo die Anzahl der Zeichenwechſel in beiden Reihen dieſelbe, oder die Differenz, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (b) von der Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (a) abzieht, $= 0$ iſt; ſo kann zwiſchen a und b keine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegen. Hat aber die Reihe (b) m Zeichenwechſel weniger wie die Reihe (a), ſo können zwiſchen a und b m reelle Wurzeln der Gleichung liegen, aber nicht mehr; nur darf man durchaus nicht ſchließen, daß zwiſchen dieſen Gränzen auch wirklich m reelle Wurzeln liegen müſſen, weil das Verſchwinden der Zeichenwechſel, wie wir im Vorhergehenden geſehen haben, auch dadurch herbeigeführt werden kann, daß Glieder der Functionenreihe verſchwinden, ohne daß zugleich auch das letzte Glied der Functionenreihe, d. i. die Function $f(x)$, für denſelben zwiſchen a und b liegenden Werth von x verſchwindet.

IX. Wenn $f(x)$ für keinen zwiſchen a und b liegenden Werth von x verſchwindet, zwiſchen a und b alſo keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt; ſo iſt die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe (a) und der Reihe (b) jederzeit eine gerade Zahl. Iſt alſo die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe (a) und der Anzahl der Zeichenwechſel in der Reihe (b) eine ungerade Zahl; ſo kann man immer ſicher ſchließen, daß zwiſchen a und b mindeſtens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt. Iſt die in Rede ſtehende Differenz die Einheit, ſo liegt zwiſchen a und b jederzeit eine reelle Wurzel, aber auch nicht mehr, weil ſonſt nach dem Vorhergehenden auch die in Rede ſtehende Differenz nothwendig größer als die Einheit ſeyn müßte.

Auch ergiebt ſich aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß, wenn die Differenz zwiſchen der Anzahl der Zeichenwechſel der Reihe (a) und der Reihe (b) eine gerade Zahl iſt, zwiſchen a und b auch nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen kann. Hat dagegen die Zeichenreihe (b) eine ungerade Anzahl von Zeichenwechſeln weniger wie die Zeichenreihe (a), ſo kann zwiſchen a und b auch nur eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen. Daß im letztern Falle zwiſchen a und b immer mindeſtens eine reelle Wurzel liegen muß, haben wir kurz zuvor geſehen.

X. Wenn die Zeichenreihe (b) m Zeichenwechſel weniger wie die Zeichenreihe (a) hat, man aber aus andern Gründen weiß, daß zwiſchen a und b nur k, wo k auch $= 0$ ſeyn kann, reelle

Wurzeln liegen können; so kann man, wie aus allem Vorhergehenden unzweideutig hervorgeht, immer sicher schließen, daß die gegebene Gleichung $m - k$ imaginäre Wurzeln hat. In einem solchen Falle sagt man auch, daß in dem Intervall $a\,b$ $m - k$ reelle Wurzeln, oder überhaupt $m - k$ Wurzeln fehlen.

XI. Wenn für $x = a$ ε auf einander folgende Glieder der Functionenreihe verschwinden und das letzte Glied $f(x)$ der Functionenreihe sich unter diesen verschwindenden Gliedern nicht befindet; so gehen, wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, von $a - i$ bis $a + i$, wenn ε gerade ist, eine eben so große Anzahl von Zeichenwechseln, wenn dagegen ε eine ungerade Zahl ist, $\varepsilon - 1$ oder $\varepsilon + 1$ Zeichenwechsel verloren, je nachdem die den verschwindenden Gliedern nächst benachbarten nicht verschwindenden Glieder für denselben Werth von x entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben. Weil nun, da i eine unendlich kleine Größe ist, zwischen $a - i$ und $a + i$ bloß a liegt, und nach der Voraussetzung a keine Wurzel der gegebenen Gleichung ist; so liegt zwischen $a - i$ und $a + i$ keine reelle Wurzel derselben, oder die Anzahl der zwischen $a - i$ und $a + i$ liegenden reellen Wurzeln ist $= 0$. Man kann also nach X jederzeit sicher schließen, daß unter den gemachten Voraussetzungen, wenn ε eine gerade Zahl ist, die gegebene Gleichung ε, wenn dagegen ε eine ungerade Zahl ist, $\varepsilon - 1$ oder $\varepsilon + 1$ imaginäre Wurzeln hat, je nachdem die den verschwindenden nächst benachbarten nicht verschwindenden Glieder der Functionenreihe für denselben Werth von x entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben. Diesen Satz hat schon de Gua gefunden.

XII. Die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $(< a)$ und in der Reihe $(> a)$ ist, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, wenn a keine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, jederzeit eine gerade Zahl. Ist diese Differenz nun $= 2\mu$, so ist, weil zwischen $< a$ und $> a$, oder zwischen $a - i$ und $a + i$ bloß a liegt, und a keine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, klar, daß die gegebene Gleichung jederzeit 2μ imaginäre Wurzeln hat.

Man kann dies aber auch noch erweitern, indem nämlich nach X. leicht erhellet, daß, wenn die Zeichenreihe $(> a)$ überhaupt m Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe $(< a)$, die Gleichung $f(x) = 0$ aber nicht mehr und nicht weniger als k Wurzeln hat, die $= a$ sind, dieselbe jederzeit $m - k$ imaginäre Wurzeln haben muß.

XIII. Wenn die beiden beliebigen Zeichenreihen (a) und (b) identisch sind, d. h. ganz aus denselben Gliedern bestehen, welches wir durch $(a) = (b)$ andeuten wollen; so ist für jeden zwischen a und b liegenden Werth c von x

$$(a) = (c) = (b).$$

Da man nämlich in der Reihe $f^{(n)}f$ eine beliebige Anzahl auf

einander folgender Glieder vom Ende an weglassen kann, und allen auf diese Art hervorgehenden Functionenreihen für $x = a$ und $x = b$ nach der Voraussetzung identische Zeichenreihen entsprechen; so erhellet aus VIII., daß keine der Gleichungen

$$f^{(n)}(x) = 0,\ f^{(n-1)}(x) = 0,\ f^{(n-2)}(x) = 0,\ \ldots f(x) = 0$$

eine reelle Wurzel zwischen a und b haben kann. Hätten aber überhaupt $f^{(n-k)}(a)$ und $f^{(n-k)}(c)$ ungleiche Vorzeichen; so müßte nach (9.) mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(n-k)}(x) = 0$ zwischen a und c, also, weil nach der Voraussetzung c zwischen a und b liegt, auch zwischen a und b liegen, welches mit dem Vorhergehenden in Widerspruch steht. Also müssen $f^{(n-k)}(a)$ und $f^{(n-k)}(c)$ gleiche Vorzeichen haben, und es ist folglich offenbar (a) = (c) = (b), wie bewiesen werden sollte.

XIV. Man kann auch leicht beweisen, daß, wenn zwei beliebige Zeichenreihen (a) und (b) eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln enthalten, jede dazwischen liegende Zeichenreihe (c) eine eben so große Anzahl von Zeichenwechseln enthalten muß. Ist nämlich w die Anzahl der Zeichenwechsel in (a) und in (b), w' die Anzahl der Zeichenwechsel in (c); so wäre nach V., wenn w' nicht = w wäre, weil $c > a$ ist, $w' < w$, und, weil $b > c$ ist, $w' > w$, welches beides zugleich nicht Statt finden kann. Daher ist $w' = w$.

XV. Wenn das letzte Glied einer Zeichenreihe + ist, so ist die Anzahl der in ihr enthaltenen Zeichenwechsel jederzeit eine gerade Zahl.

Dies erhellet auf der Stelle, wenn man sich für jede Gruppe auf einander folgender gleicher Glieder der Zeichenreihe nur eins dieser Glieder gesetzt denkt, wodurch man eine Reihe von der Form

$$+ - + - + - \ldots - +$$

erhält, in welcher offenbar die Anzahl der Zeichenwechsel von der Anzahl der Zeichenwechsel in der primitiven Zeichenreihe nicht verschieden und augenscheinlich eine gerade Zahl ist.

XVI. Wenn das letzte Glied einer Zeichenreihe — ist; so ist die Anzahl der in ihr enthaltenen Zeichenwechsel jederzeit eine ungerade Zahl.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet eben so leicht und ganz auf dieselbe Weise wie die Richtigkeit des vorhergehenden.

XVII. Wenn die Anzahl der in einer Zeichenreihe enthaltenen Zeichenwechsel eine gerade Zahl ist, so ist das letzte Glied dieser Zeichenreihe +.

XVIII. Wenn die Anzahl der in einer Zeichenreihe enthaltenen Zeichenwechsel eine ungerade Zahl ist, so ist das letzte Glied dieser Zeichenreihe —.

65. Wenn man die Anzahl der Zeichenwechsel zählt, welche in den Zeichenreihen (a) und (b) bis zu jedem beliebigen Gliede derselben vorgekommen sind, und die auf diese Weise erhaltenen zu gleichstelligen Gliedern gehörenden Zahlen von einander abzieht; so heißen die auf diese Weise hervorgehenden Differenzen, welche, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, unter der Voraussetzung, daß $b > a$ ist, nie negativ seyn können, die dem Intervall **ab** entsprechenden **Indices**, und die Reihe dieser Zahlen nennt man die dem Intervall **ab** entsprechende **Indexreihe**. Wir werden im Folgenden die Indices immer zwischen die beiden entsprechenden Zeichenreihen schreiben, wie z. B. in folgendem Falle:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} + & - & + & + & + & - & - & + & + & - & + & + & - & + & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ + & - & - & - & - & - & + & + & + & + & + & - & - & + & + \end{array}.$$

Für die Functionenreihe $f^{(n)}f$ und das beliebige Interall **ab** sollen die Indices überhaupt durch

$$0,\ \delta',\ \delta'',\ \delta''',\ \ldots\ \delta^{(n-2)},\ \delta^{(n-1)},\ \delta^{(n)}$$

bezeichnet werden, so daß dem Gliede $f^{(n-k)}(x)$ der Functionenreihe überhaupt der Index $\delta^{(k)}$ entspricht. Ueber diese Indices ist die leicht zu rechtfertigende, für das Folgende aber sehr wichtige Bemerkung zu machen, daß, wenn überhaupt $\delta^{(k)}$ und $\delta^{(k+1)}$ zwei einander nächst benachbarte Indices sind, $\delta^{(k+1)}$ jederzeit entweder $= \delta^{(k)}$, oder $= \delta^{(k)} - 1$, oder $= \delta^{(k)} + 1$ ist. Um dies zu beweisen seyen $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}'_1$ die Zahlen, welche angeben, wie viele in den Zeichenreihen (a) und (b) bis zu den den Indices $\delta^{(k)}$ und $\delta^{(k+1)}$ entsprechenden Gliedern derselben Zeichenwechsel vorgekommen sind; so erhellet aus der Entstehung dieser Zahlen auf der Stelle, daß jede folgende der nächst vorhergehenden entweder gleich, oder nur um eine Einheit größer als dieselbe ist, weil die Anzahl der Zeichenwechsel, indem man von einem beliebigen Gliede zu dem nächst folgenden übergeht, entweder ungeändert bleibt oder um eine Einheit zunimmt. Daher ist entweder $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$ oder $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + 1$, und eben so, ohne Beziehung auf das Vorhergehende, entweder $\mathbf{K}'_1 = \mathbf{K}_1$ oder $\mathbf{K}'_1 = \mathbf{K}_1 + 1$. Also sind, weil $\delta^{(k)} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_1$, $\delta^{(k+1)} = \mathbf{K}' - \mathbf{K}'_1$ ist, die folgenden vier Fälle möglich:

1. $\delta^{(k+1)} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_1 = \delta^{(k)}$,
2. $\delta^{(k+1)} = \mathbf{K} - (\mathbf{K}_1 + 1) = \delta^{(k)} - 1$,
3. $\delta^{(k+1)} = (\mathbf{K} + 1) - \mathbf{K}_1 = \delta^{(k)} + 1$,
4. $\delta^{(k+1)} = (\mathbf{K} + 1) - (\mathbf{K}_1 + 1) = \delta^{(k)}$,

wodurch unser Satz bewiesen ist. Auch ergiebt sich hieraus nun sogleich, daß entweder $\delta^{(k-1)} = \delta^{(k)}$, oder $\delta^{(k-1)} = \delta^{(k)} - 1$, oder $\delta^{(k-1)} = \delta^{(k)} + 1$ ist.

66. Aus (64. XV. XVI.) ergiebt sich auf der Stelle auch Folgendes:

I. Wenn zwei aus einer gleichen Anzahl von Gliedern bestehende Zeichenreihen sich mit zwei gleichen Gliedern endigen; so ist der den beiden letzten Gliedern entsprechende Index jederzeit eine gerade Zahl.

II. Wenn zwei aus einer gleichen Anzahl von Gliedern bestehende Zeichenreihen sich mit zwei ungleichen Gliedern endigen; so ist der den beiden letzten Gliedern entsprechende Index jederzeit eine ungerade Zahl.

III. Wenn der den letzten Gliedern zweier aus einer gleichen Anzahl von Gliedern bestehenden Zeichenreihen entsprechende Index eine gerade Zahl ist; so sind die letzten Glieder der beiden Zeichenreihen einander gleich.

IV. Wenn der den letzten Gliedern zweier aus einer gleichen Anzahl von Gliedern bestehenden Zeichenreihen entsprechende Index eine ungerade Zahl ist; so sind die letzten Glieder der beiden Zeichenreihen ungleich.

C. Hauptlehrsätze.

67. Wir wollen jetzt einige Theoreme beweisen, welche nebst der Lehre von den Zeichenreihen der Auflösungsmethode der numerischen Gleichungen, welche wir im Folgenden kennen lernen werden, vorzüglich zum Grunde liegen, und daher in der obigen Ueberschrift auch als Hauptlehrsätze bezeichnet worden sind, weil sie in der That nebst der Lehre von den Zeichenreihen das eigentliche Fundament aller folgenden Untersuchungen bilden.

Zu dem Ende setzen wir, daß a und b, wo $b > a$ ist, wieder zwei beliebige reelle Größen sind, welche man für x in die Functionenreihe $f^{(n)}f$ gesetzt, und dadurch die beiden Zeichenreihen (a), (b), und die dem Intervall a b entsprechende Indexreihe erhalten hat. Auf die Beschaffenheit dieser Indexreihe kommt es, wie wir sehen werden, im Folgenden ganz vorzüglich an. Hier werden wir in dieser Beziehung von einigen Voraussetzungen ausgehen, daraus mehrere wichtige Folgerungen ziehen, späterhin zeigen, wie sich die in Rede stehenden Voraussetzungen in allen Fällen realisiren lassen, und dann die aus denselben hier gezogenen Folgerungen zur Auflösung der numerischen Gleichungen anwenden.

Zuerst wollen wir annehmen, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall a b entsprechenden Indexreihe 0 0 1 sind. Dann wissen wir aus dem Vorhergehenden, daß in dem Intervall a b eine, aber auch nur eine, reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, keine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegt, oder mit andern Worten, daß die Function $f(x)$ für einen, aber auch nur einen, reellen Werth von x zwischen a und b, den wir $= \alpha$ setzen wollen, verschwindet, daß aber weder die Function $f'(x)$, noch die Fun-

ction $f''(x)$, für einen zwischen a und b liegenden reellen Werth von x verschwindet, woraus denn nach (9.) weiter von selbst folgt, daß die Functionen $f'(x)$ und $f''(x)$, wenn man x von $x = a$ bis $x = b$ stetig wachsen läßt, ihre Vorzeichen nie ändern. a und b sind zwei Gränzen der einen in dem Intervall ab liegenden reellen Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$, und es kommt uns jetzt vorzüglich darauf an, zu zeigen, wie man, wenn die Voraussetzung, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Inderreihe 001 sind, erfüllt ist, aus den Gränzen a und b nach und nach immer engere und engere Gränzen der reellen Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$ ableiten kann, eine Untersuchung, die für das Folgende von der größten Wichtigkeit ist.

Zuerst bemerken wir nun in dieser Beziehung, daß, wie aus (66. III.) auf der Stelle folgt, wenn die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Inderreihe 001 sind, in Bezug auf die drei letzten Glieder der Zeichenreihen (a) und (b) nur die folgenden vier Fälle Statt finden können:

1. (a) = ... + + −
   (b) = ... + + +
2. (a) = ... + − +
   (b) = ... + − −
3. (a) = ... − + −
   (b) = ... − + +
4. (a) = ... − − +
   (b) = ... − − −

Diese vier Fälle wollen wir jetzt nach der Reihe, jeden einzeln, durchgehen, indem wir bemerken, daß im Folgenden ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''', ..., wie schon in (55.), immer positive die Einheit nicht übersteigende Größen bezeichnen sollen.

I. Sey

(a) = ... + + −
(b) = ... + + +

Weil $f'(x)$ und $f''(x)$ in dem Intervall ab ihre Vorzeichen nicht ändern, so ist in diesem Intervall sowohl $f'(x)$, als auch $f''(x)$, stets positiv.

1. Betrachten wir zuvörderst b als einen ersten Näherungswerth der reellen Wurzel α, und setzen $\alpha = b - \Theta$; so ist, weil b die obere Gränze ist, Θ positiv. Nach (57.) ist

$$f(b-\Theta) = f(b) - \Theta f'(b-\varrho\Theta),$$

d. i., weil $f(b-\Theta) = f(\alpha) = 0$ ist,

$$f(b) - \Theta f'(b-\varrho\Theta) = 0,$$

und hieraus

$$\Theta = \frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)} .$$

Ferner ist nach (57.)

$$f'(b-\varrho\Theta) = f'(b) - \varrho\Theta f''(b-\varrho'\varrho\Theta) .$$

$b-\varrho'\varrho\Theta$ ist offenbar eine Mittelgröße zwischen $b-\Theta$ und b, d. i. zwischen α und b, folglich auch zwischen a und b. Daher ist $f''(b-\varrho'\varrho\Theta)$ positiv, und folglich

$$f'(b-\varrho\Theta) < f'(b) ,$$

wobei zugleich klar ist, daß diese beiden Größen positiv sind. Da nun auch $f(b)$ positiv ist, so ist

$$\frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(b)} ,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(b)} .$$

Folglich ist

$$b-\Theta < b - \frac{f(b)}{f'(b)} ,$$

d. i., weil $b-\Theta = \alpha$ ist,

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(b)} .$$

Weil ferner $f(b)$ und $f'(b)$ beide positiv sind, und folglich auch $\frac{f(b)}{f'(b)}$ positiv ist; so ist

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b ,$$

und man sieht also, daß

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b ist.

2. Betrachten wir ferner die untere Gränze a als einen ersten Näherungswerth von α, und setzen $\alpha = a + \Theta'$, so ist Θ' positiv, und nach (57.) haben wir wieder:

$$f(a+\Theta') = f(a) + \Theta' f'(a + \varrho\Theta') ,$$

d. i., weil $f(a+\Theta') = f(\alpha) = 0$ ist,

$$f(a) + \Theta' f'(a + \varrho\Theta') = 0 ,$$

woraus

$$\Theta' = -\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')}$$

folgt. $a + \varrho\Theta'$ ist eine Mittelgröße zwischen a und $a+\Theta'$, d. i. zwischen a und α, also auch zwischen a und b. Setzen wir folglich $a + \varrho\Theta' = b - \Theta''$, so ist Θ'' positiv, und nach (57.) haben wir

$$f'(a + \varrho\Theta') = f'(b - \Theta') = f'(b) - \Theta'' f''(b - \varrho'\Theta''),$$

wo $b - \varrho'\Theta''$ eine Mittelgröße zwischen $b - \Theta''$ und b, d. i. zwischen $a + \varrho\Theta'$ und b, also auch zwischen a und b, folglich $f''(b - \varrho'\Theta'')$ positiv, und daher

$$f'(a + \varrho\Theta') < f'(b)$$

ist, wobei zugleich auf der Stelle erhellet, daß diese beiden Größen positiv sind. Da nun $f(a)$ negativ ist, so ist

$$-\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')} > -\frac{f(a)}{f'(b)},$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Theta' > -\frac{f(a)}{f'(b)};$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(b)},$$

d. i., weil $a + \Theta' = \alpha$ ist,

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

Auch ist, weil $-\frac{f(a)}{f'(b)}$ positiv ist,

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)} > a,$$

und folglich offenbar

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

II. Sey ferner

$$(a) = \ldots. + - +$$
$$(b) = \ldots. + - -;$$

so ist $f'(x)$ in dem Intervall ab stets negativ, $f''(x)$ dagegen in demselben Intervall stets positiv.

1. Sey $\alpha = b - \Theta$, wo Θ positiv ist, so ist nach (57.)

$$f(b - \Theta) = f(\alpha) = f(b) - \Theta f(b - \varrho\Theta) = 0;$$

folglich

$$\Theta = \frac{f(b)}{f'(b - \varrho\Theta)}.$$

$b - \varrho\Theta$ ist eine Mittelgröße zwischen $b - \Theta$ und b, d. i. zwischen α und b, also auch zwischen a und b. Setzen wir folglich $b - \varrho\Theta = a + \Theta''$, so ist Θ'' positiv, und wir haben nun wieder nach (57.)

$$f'(b - \varrho\Theta) = f'(a + \Theta'') = f'(a) + \Theta'' f''(a + \varrho'\Theta''),$$

wo $a + \varrho'\Theta''$ eine Mittelgröße zwischen a und $a + \Theta''$, d. i.

zwischen a und $b - \varrho\Theta$, also auch zwischen a und b, und folglich $f''(a + \varrho'\Theta'')$ positiv, also

$$f'(b - \varrho\Theta) > f'(a)$$

ist, wobei man zugleich noch zu bemerken hat, daß diese beiden Größen offenbar negativ sind. Weil nun auch $f(b)$ negativ ist, so ist

$$\frac{f(b)}{f'(b - \varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(a)};$$

folglich

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(a)};$$

also

$$b - \Theta < b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(a)}.$$

Weil ferner $\frac{f(b)}{f'(a)}$ positiv ist, so ist

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)} < b,$$

und folglich offenbar

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b.

2. Sey ferner $\alpha = a + \Theta'$, so ist Θ' positiv, und

$$f(a + \Theta') = f(\alpha) = f(a) + \Theta' f'(a + \varrho\Theta') = 0;$$

also

$$\Theta' = -\frac{f(a)}{f'(a + \varrho\Theta')}.$$

Ferner ist

$$f'(a + \varrho\Theta') = f'(a) + \varrho\Theta' f''(a + \varrho'\varrho\Theta'),$$

und $f''(a + \varrho'\varrho\Theta')$ ist, wie leicht erhellet, positiv. Also ist

$$f'(a + \varrho\Theta') > f'(a),$$

und diese beiden Größen sind offenbar negativ. Also ist, weil $f(a)$ positiv ist,

$$-\frac{f(a)}{f'(a + \varrho\Theta')} > -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\Theta' > -\frac{f(a)}{f'(a)};$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

d. i.

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(a)} .$$

Weil ferner $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ positiv ist, so ist

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a ,$$

und folglich offenbar

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

III. Wenn ferner

$$(a) = \ldots . - + -$$
$$(b) = \ldots . - + +$$

ist; so ist $f'(x)$ in dem Intervall ab stets positiv, $f''(x)$ dagegen stets negativ.

1. Sey $\alpha = b - \Theta$, so ist Θ positiv, und nach (57.) haben wir wieder

$$f(b - \Theta) = f(\alpha) = f(b) - \Theta f'(b - \varrho\Theta) = 0 ,$$

also

$$f\Theta = \frac{f(b)}{f'(b - \varrho\Theta)} .$$

$b - \varrho\Theta$ ist eine Mittelgröße zwischen $b - \Theta$ und b, d. i. zwischen α und b, also auch zwischen a und b. Setzen wir also $b - \varrho\Theta = a + \Theta'$, so ist Θ'' positiv, und wir haben wieder

$$f'(b - \varrho\Theta) = f'(a + \Theta'') = f'(a) + \Theta'' f''(a + \varrho'\Theta'') ,$$

d. i., weil, wie leicht erhellet, $f''(a + \varrho'\Theta'')$ negativ ist,

$$f'(b - \varrho\Theta) < f'(a) .$$

Diese beiden Größen sind, so wie $f(b)$, positiv. Also ist

$$\frac{f(b)}{f'(b - \varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(a)} ,$$

d. i.

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(a)} ;$$

folglich

$$b - \Theta < b - \frac{f(b)}{f'(a)} ,$$

d. i.

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(a)} .$$

Weil ferner $\frac{f(b)}{f'(a)}$ positiv ist, so ist

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)} < b ,$$

und folglich

$$b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b.

2. Für $\alpha = a + \Theta'$, wo Θ' positiv ist, haben wir wieder

$$f(a + \Theta') = f(\alpha) = f(a) + \Theta' f'(a + \varrho\Theta') = 0 ,$$

$$\Theta' = - \frac{f(a)}{f'(a + \varrho\Theta')} .$$

Ferner ist

$$f'(a + \varrho\Theta') = f'(a) + \varrho\Theta' f''(a + \varrho'\varrho\Theta') ,$$

und folglich, weil $f''(a + \varrho'\varrho\Theta')$ offenbar negativ ist,

$$f'(a + \varrho\Theta') < f'(a) .$$

Da nun diese beiden Größen, wie sogleich erhellet, positiv sind, $f(a)$ aber negativ ist; so ist

$$- \frac{f(a)}{f'(a + \varrho\Theta')} > - \frac{f(a)}{f'(a)} ,$$

d. i.

$$\Theta' > - \frac{f(a)}{f'(a)} ,$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(a)} ,$$

oder

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(a)} .$$

Weil ferner $- \frac{f(a)}{f'(a)}$ positiv ist, so ist

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a ,$$

und es ist folglich

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

IV. Für

$$(a) = \ldots\ldots - - +$$
$$(b) = \ldots\ldots - - -$$

ist in dem Intervall ab sowohl $f'(x)$, als auch $f''(x)$, stets negativ

1. Für $\alpha = b - \Theta$, wo Θ positiv ist, ist

$$f(b - \Theta) = f(\alpha) = f(b) - \Theta f'(b - \varrho\Theta) = 0 ,$$

$$\Theta = \frac{f(b)}{f'(b - \varrho\Theta)} .$$

Da nun

$$f'(b-\varrho\Theta) = f'(b) - \varrho\Theta f''(b-\varrho'\varrho\Theta),$$

und, wie leicht erhellet, $f''(b-\varrho'\varrho\Theta)$ negativ ist; so ist

$$f'(b-\varrho\Theta) > f'(b);$$

also, weil diese beiden Größen, so wie $f(b)$, negativ sind,

$$\frac{f(b)}{f'(b-\varrho\Theta)} > \frac{f(b)}{f'(b)},$$

d. i.

$$\Theta > \frac{f(b)}{f'(b)},$$

und folglich

$$b - \Theta < b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

d. i.

$$\alpha < b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Weil ferner $\frac{f(b)}{f'(b)}$ positiv ist, so ist

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

also offenbar

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

eine nähere obere Gränze von α wie b.

2. Ferner sey $\alpha = a + \Theta'$, wo Θ' positiv ist, so ist

$$f(a+\Theta') = f(\alpha) = f(a) + \Theta' f'(a + \varrho\Theta') = 0,$$

$$\Theta' = -\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')}.$$

$a + \varrho\Theta'$ ist eine Mittelgröße zwischen a und b; folglich ist, wenn man $a + \varrho\Theta' = b - \Theta''$ setzt, Θ'' positiv. Weil nun

$$f'(a + \varrho\Theta') = f'(b - \Theta'') = f'(b) - \Theta'' f''(b-\varrho'\Theta'')$$

und $f''(b - \varrho'\Theta'')$ offenbar negativ ist; so ist

$$f'(a + \varrho\Theta') > f'(b),$$

und diese beiden Größen sind offenbar negativ. Also ist, weil $f(a)$ positiv ist,

$$-\frac{f(a)}{f'(a+\varrho\Theta')} > -\frac{f(a)}{f'(b)},$$

d. i.

$$\Theta' > -\frac{f(a)}{f'(b)};$$

folglich

$$a + \Theta' > a - \frac{f(a)}{f'(b)};$$

d. i.

$$\alpha > a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

Weil ferner $-\frac{f(a)}{f'(b)}$ positiv ist, so ist

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)} > a,$$

und folglich offenbar

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)}$$

eine nähere untere Gränze von α wie a.

V. Fassen wir nun alles Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich Folgendes:

1. Wenn

$$\begin{matrix}(a) = \ldots. + + - \\ (b) = \ldots. + + +\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots. - - + \\ (b) = \ldots. - - -\end{matrix}$$

ist; so sind

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

jederzeit zwei Gränzen der reellen Wurzel α, nämlich a' die untere, b' die obere Gränze, so daß

$$a' < \alpha,\ b' > \alpha$$

ist. Ferner ist immer

$$a' > a,\ b' < b,$$

und folglich jederzeit das Intervall a' b' ein innerhalb ab liegendes, also engeres, Intervall, so daß folglich a', b engere Gränzen von α sind wie a, b, und immer

$$b' - a' < b - a$$

ist.

2. Ist aber

$$\begin{matrix}(a) = \ldots. + - + \\ (b) = \ldots. + - -\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots. - + - \\ (b) = \ldots. - + +\end{matrix};$$

so sind

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

jederzeit zwei Gränzen von α, nämlich a' wieder die untere, b' die obere Gränze, so daß

$$a' < \alpha,\ b' > \alpha$$

ist. Ferner ist auch jetzt immer

$$a' > a,\ b' < b,$$

d. i. a' b' ein engeres innerhalb ab liegendes Intervall, so daß also a', b' engere Gränzen von α sind, wie a, b, und immer

$$b' - a' < b - a$$

ist.

VI. Weil das Intervall a' b' innerhalb des Intervalls ab liegt, so erhellet nun auch sehr leicht, daß für

$$\left.\begin{array}{l}(a) = \ldots + + - \\ (b) = \ldots + + + \\ (a) = \ldots - - + \\ (b) = \ldots - - - \\ (a) = \ldots + - + \\ (b) = \ldots + - - \\ (a) = \ldots - + - \\ (b) = \ldots - + +\end{array}\right\} \text{jederzeit respective auch} \left\{\begin{array}{l}(a') = \ldots + + - \\ (b') = \ldots + + + \\ (a') = \ldots - - + \\ (b') = \ldots - - - \\ (a') = \ldots + - + \\ (b') = \ldots + - - \\ (a') = \ldots - + - \\ (b') = \ldots - + +\end{array}\right.$$

ist, so wie auch offenbar die drei letzten Glieder der dem Intervall a'b' entsprechenden Indexreihe 001 seyn müssen, wobei man (64. XIV.) zu vergleichen hat.

1. Wenn daher

$$\begin{array}{l}(a) = \ldots + + - \\ (b) = \ldots + + +\end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l}(a) = \ldots - - + \\ (b) = \ldots - - -\end{array}$$

ist; so erhält man mittelst der Formeln

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')},\ b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(b'')},\ b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(b''')},\ b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(b''')};$$

u. s. w. u. s. w.

jederzeit eine Reihe sich immer enger und enger zusammenziehender Gränzen der Wurzel α, und die durch a bezeichneten Gränzen sind immer die untern, die durch b bezeichneten dagegen die obern Gränzen.

2. Ist dagegen

$$\begin{array}{l}(a) = \ldots + - + \\ (b) + \ldots + - -\end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l}(a) = \ldots - + - \\ (b) = \ldots - + +\end{array};$$

so erhält man mittelst der Formeln

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')},\ b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')},\ b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(a'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(a''')},\ b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(a''')};$$

u. s. w. u. s. w.

eine Reihe sich immer enger und enger zusammenziehender Gränzen der Wurzel α, und die durch a bezeichneten Gränzen sind

wieder immer die untern, die durch b bezeichneten dagegen die obern Gränzen.

VII. Des Folgenden wegen ist hierbei nun noch folgende Bemerkung zu machen. Wir sind nämlich im Vorhergehenden von der Voraussetzung ausgegangen, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall a b entspeechenden Indexreihe 0 0 1 seyn sollen. Ueberblickt man aber den ganzen obigen Beweis nochmals aufmerksam im Zusammenhange, so wird man finden, daß alle Schlüsse völlig richtig bleiben, wenn man nur überzeugt ist, daß die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind: 1. Die den Gränzen a und b des Intervalls a b entsprechenden Werthe $f(a)$ und $f(b)$ der Function $f(x)$ müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben. 2. Weder die Function $f'(x)$, noch die Function $f''(x)$, darf in dem Intervall a b ihr Zeichen ändern, oder, was dasselbe ist, in dem Intervall a b darf weder eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, noch eine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, liegen. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann man zugleich versichert seyn, daß zwischen a und b jederzeit eine, aber auch nur e i n e, reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt. Daß eine reelle Wurzel dieser Gleichung zwischen a und b liegt, folgt unmittelbar aus (9.), weil nach der Voraussetzung $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Daß nur e i n e reelle Wurzel der in Rede stehenden Gleichung zwischen a und b liegt, erhellet eben so leicht auf folgende Art. Weil nämlich nach der Voraussetzung die Function $f'(x)$ ihr Zeichen in dem Intervall a b nie ändert, so wird nach (52. V.) die Function $f(x)$ in diesem Intervall entweder fortwährend wachsen, oder fortwährend abnehmen, und kann also in demselben offenbar auch nur e i n Mal verschwinden, da sie natürlich nur e i n Mal ihr Zeichen ändern oder vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt vom Negativen zum Positiven übergehen kann. Also auch dann, wenn man nur weiß, daß die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, bleibt alles Vorhergehende richtig. Der Fall, wo die drei letzten Glieder der dem Intervall a b entsprechenden Indexreihe 0 0 1 sind, kommt aber, wie wir weiter unten sehen werden, in der Praxis der Auflösung der numerischen Gleichungen vorzüglich vor.

68. Da man zwei einander immer näher und näher kommende Gränzen der gesuchten Wurzel α kennt, so läßt sich nun auch jederzeit der Fehler beurtheilen, welchen man begeht, wenn man die eine von zwei zusammengehörenden Gränzen als einen Näherungswerth für die Wurzel α selbst setzt, indem dieser Fehler offenbar jederzeit kleiner wie der Unterschied zwischen den beiden in Rede stehenden Gränzen seyn wird, so daß also dieser Unterschied, welchen man kennt, da man die Gränzen kennt, jederzeit eine Größe ist, welche der begangene Fehler seiner absoluten Größe nach nicht übersteigen kann, wobei man noch zu merken hat, daß man eine solche Größe gewöhnlich die F e h l e r-

gränze nennt; immer faßt man hierbei aber bloß die absoluten Werthe der in Rede stehenden Größen in's Auge. Man kann jedoch die Größe des Fehlers noch auf eine andere sehr merkwürdige Weise bestimmen, über die wir nun das Nöthige beibringen wollen.

Diese zweite Methode, den Fehler zu bestimmen, setzt aber, was man wohl zu merken hat, voraus, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe 0001 sind, indem vorher bloß erfordert wurde, daß die drei letzten Glieder dieser Indexreihe die Folge 001 bildeten. Entsprechen die vier letzten Glieder der in Rede stehenden Indexreihe der Bedingung 0001, so ändert offenbar auch die dritte derivirte Function $f'''(x)$ in dem Intervall ab ihr Zeichen nicht, und ist also in demselben entweder stets positiv oder stets negativ.

1. Sey nun, indem wir im Folgenden immer

$$b-a=i,\ b'-a'=i',\ b''-a''=i'',\ b'''-a'''=i''',\ \ldots$$

setzen, zuerst wieder

$$\begin{matrix}(a)=\ldots.+++-\\(b)=\ldots.+++\end{matrix}\quad\text{oder}\quad\begin{matrix}(a)=\ldots.---+\\(b)=\ldots.---;\end{matrix}$$

so sind

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(b)},\quad b'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

eine untere und eine obere Gränze der gesuchten Wurzel α. Also ist

$$b'-a'=b-a-\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)},$$

d. i.

$$i'=i-\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)}.$$

Weil $a=b-i$ ist, so ist nach (57.)

$$f(a)=f(b-i)=f(b)-if'(b)+\tfrac{1}{2}i^2f''(b-\varrho i),$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)}=i-\frac{i^2f''(b-\varrho i)}{2f'(b)};$$

also

$$i'=i^2.\frac{f''(b-\varrho i)}{2f'(b)}.$$

Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite ist bekannt, der Zähler dagegen ist eine noch unbekannte Größe. Bezeichnet aber Θ eine positive Größe, die wir uns jetzt als unendlich klein denken wollen, und ist f eine beliebige zwischen a und b liegende Größe; so übersieht man, weil nach (57.)

$$f''(f+\Theta)=f''(f)+\Theta f'''(f+\varrho\Theta)$$

ist, und $f'''(x)$ in dem Intervall ab stets einerlei Vorzeichen behält, daß die Function $f''(x)$ in diesem Intervall entweder fortwährend zu- oder fortwährend abnimmt, welches ganz auf dieselbe Art auch von der Function $f'(x)$ erhellet, übrigens sich auch

unmittelbar aus (52. V.) ergiebt. Bezeichnet nun **A** den kleinsten von den beiden absoluten Werthen der Größen $f'(a)$ und $f'(b)$, dagegen **B** den größten von den beiden absoluten Werthen der Größen $f''(a)$ und $f''(b)$; so ist offenbar immer

$$\frac{f''(b-\varrho i)}{2f'(b)} < \frac{B}{2A},$$

wobei man nur zu bemerken hat, daß $b - \varrho i$ immer eine Mittelgröße zwischen $b - i$ und b, d. i. zwischen a und b ist. Also ist nach dem Vorhergehenden immer

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},$$

woraus sich nun ferner, da für die sämmtlichen Intervalle ab, $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$, $a^{IV}b^{IV}$, ..., von denen immer jedes folgende innerhalb des vorhergehenden liegt, offenbar ganz dieselben Verhältnisse Statt finden, unmittelbar

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},\ i'' < i'^2 . \frac{B}{2A},\ i''' < i''^2 . \frac{B}{2A},\ i^{IV} < i'''^2 . \frac{B}{2A}, \ldots,$$

also auch

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},\ i'' < i^4 . \left(\frac{B}{2A}\right)^3,\ i''' < i^8 . \left(\frac{B}{2A}\right)^7,\ i^{IV} < i^{16} . \left(\frac{B}{2A}\right)^{15}, \ldots$$

ergiebt.

2. Ist ferner

$$\begin{array}{ll} (a) = \ldots . + - + & \\ (b) = \ldots . + - - & \text{oder} \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a) = \ldots . - + - \\ (b) = \ldots . - + + ; \end{array}$$

so sind

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

eine untere und eine obere Gränze der Wurzel α; also ist

$$b' - a' = b - a - \frac{f(b) - f(a)}{f'(a)},$$

$$i' = i - \frac{f(b) - f(a)}{f'(a)}.$$

Weil nun $b = a + i$ ist, so ist

$$f(b) = f(a + i) = f(a) + if'(a) + \tfrac{1}{2}i^2 f''(a + \varrho i),$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f'(a)} = i + \frac{i^2 f''(a + \varrho i)}{2f(a)},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$i' = -i^2 . \frac{f''(a+\varrho i)}{2f'(a)}.$$

Hieraus ergiebt sich ganz auf dieselbe Art wie vorher

$$i' < i^2 . \frac{B}{2A},\ i'' < i'^2 \frac{B}{2A},\ i''' < i''^2 . \frac{B}{2A},\ i^{IV} < i'''^2 . \frac{B}{2A}, \ldots;$$

also auch

$i' < i^2 \cdot \frac{B}{2A}$, $i'' < i^4 \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^3$, $i''' < i^8 \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^7$, $i^{IV} < i^{16} \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^{15}$, ...

wo **A**, **B** ganz dieselbe Bedeutung wie vorher haben.

3. Fassen wir alles Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich das folgende in jeder Beziehung höchst wichtige Theorem, von dem wir weiter unten bei der Auflösung der Gleichungen vielfachen Gebrauch machen werden:

Wenn die vier letzten Glieder der dem Intervall **ab** entsprechenden Indexreihe 0001 sind, und, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, **A** die kleinere der beiden Größen $f'(a)$ und $f'(b)$, **B** die größere der beiden Größen $f''(a)$ und $f''(b)$ bezeichnet, übrigens i, i', i'', i''', ... ihre vorige Bedeutung behalten; so sind sämmtliche Glieder der Reihe

$$i, i', i'', i''', i^{IV}, \ldots\ldots$$

vom zweiten an kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$i, i^2 \cdot \frac{B}{2A}, i'^2 \cdot \frac{B}{2A}, i''^2 \cdot \frac{B}{2A}, i'''^2 \cdot \frac{B}{2A}, \ldots,$$

oder auch kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$i, i^2 \cdot \frac{B}{2A}, i^4 \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^3, i^8 \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^7, i^{16} \cdot \left(\frac{B}{2A}\right)^{15}, \ldots\ldots$$

4. Noch ist hier eine ähnliche Bemerkung wie in (67. VII.) zu machen, indem man nämlich auf der Stelle übersieht, daß alles Vorhergehende richtig bleibt, wenn man nur überzeugt ist: 1. Daß die den Gränzwerthen **a** und **b** entsprechenden Werthe $f(a)$ und $f(b)$ der Function $f(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; 2. daß keine der Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ in dem Intervall **ab** ihr Zeichen ändert.

69. Aus dem Vorhergehenden läßt sich noch ein anderer sehr merkwürdiger Satz ableiten, welcher uns ebenfalls bei der Auflösung der numerischen Gleichungen von dem größten Nutzen seyn wird. Wir gehen dabei von den folgenden Voraussetzungen aus: 1. Zwischen den Gränzen **a**, **b** soll keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegen. 2. Die Gleichung $f(x) = 0$ soll dagegen eine, aber auch nur eine, reelle Wurzel zwischen den in Rede stehenden Gränzen haben. 3. Was die Gleichung $f(x) = 0$ betrifft, so wollen wir annehmen, daß man aus andern Gründen wisse, daß entweder keine oder zwei, also weder bloß eine, noch mehr als zwei, reelle Wurzeln derselben zwischen **a** und **b** liegen, und verlangen nun eben ein Kriterium zu haben, mittelst dessen man erkennen kann, ob das Eine oder das Andere Statt findet. Läßt sich nun auch kein allgemeines Kriterium finden, mittelst dessen man in jedem Falle die

in Rede stehende Entscheidung geben kann; so wird sich doch mittelst des auch an sich merkwürdigen Satzes, den wir jetzt beweisen werden, in vielen Fällen sicher der Fall erkennen lassen, wo unter den obigen Voraussetzungen keine reelle Wurzel zwischen a und b liegt, und schon dies ist, wie wir späterhin sehen werden, für die Auflösung der numerischen Gleichungen von der größten Wichtigkeit. Größerer Deutlichkeit wegen bemerken wir noch, daß die obigen Voraussetzungen z. B. für das Intervall a b dann jederzeit vollständig erfüllt sind, wenn die drei letzten Glieder der demselben entsprechenden Indexreihe 0 1 2 sind, indem dann, wie aus der Lehre von den Zeichenreihen unmittelbar folgt, zwischen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, zwischen denselben Gränzen aber bloß entweder keine oder zwei reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen können. Der Fall, auf welchen wir hier vorläufig und beispielsweise hingedeutet haben, ist derjenige, auf welchen wir das Theorem, welches wir jetzt beweisen wollen, vorzüglich anwenden werden.

Wir wollen nun einmal annehmen, daß zwischen a und b zwei, aber nicht mehr, reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen, und wollen sehen, was sich hieraus, indem wir zugleich für's Erste die beiden in Rede stehenden reellen Wurzeln als ungleich annehmen, unter den übrigen obigen Voraussetzungen weiter schließen läßt.

1. Weil die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b zwei, aber auch nur zwei, ungleiche reelle Wurzeln hat, die wir durch α und β bezeichnen wollen, so daß β die größere von beiden Wurzeln bezeichnet; so ist zuvörderst klar, daß $f(a)$ und $f(b)$ gleiche Vorzeichen haben, wie sehr leicht auf folgende Art gezeigt werden kann. Weil α, β die beiden zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, und $\beta > \alpha$, $b > a$ ist; so ist $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$, und a, α, β, b sind in dieser Folge aufsteigend nach ihrer Größe geordnet. Weil ferner die Gleichung $f(x) = 0$ bloß die beiden reellen Wurzeln α, β in dem Intervall a b hat; so liegt in keinem der Intervalle $a\alpha$, $\alpha\beta$, βb eine reelle Wurzel dieser Gleichung, und es haben folglich, wenn i eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, sowohl die Größen $f(a)$, $f(\alpha - i)$, als auch die Größen $f(\alpha + i)$, $f(\beta - i)$ und $f(\beta + i)$ $f(b)$ mit einander gleiche Vorzeichen. Weil nun aber $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$ ist; so haben sowohl die Größen $f(\alpha - i)$, $f(\alpha + i)$, als auch die Größen $f(\beta - i)$, $f(\beta + i)$, entgegengesetzte Vorzeichen, und wir erhalten also, alles Vorhergehende zusammen nehmend, folgende Darstellung:

$$f(a) \ldots f(\alpha - i) \ldots f(\alpha + i) \ldots f(\beta - i) \ldots f(\beta + i) \ldots f(b)$$
$$\pm \ldots \pm \ldots \mp \ldots \mp \ldots \pm \ldots \pm$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß $f(a)$ und $f(b)$, wie behauptet wurde, gleiche Vorzeichen haben.

2. Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat nach der Voraussetzung zwischen a und b eine reelle Wurzel, die wir γ nennen wollen, so daß also $f'(\gamma) = 0$ ist. $f(\gamma)$ ist aber nicht $= 0$, weil sonst nach aus dem Obigen bekannten Sätzen die Gleichung $f(x) = 0$ zwei der zwischen a und b liegenden reellen Größe γ gleiche Wurzeln haben würde, welches gegen die Voraussetzung ist, weil wir angenommen haben, daß diese Gleichung zwischen a und b zwei, aber auch nur zwei, ungleiche reelle Wurzeln haben soll. Ferner ist klar, daß die Function $f'(x)$ in keinem der Intervalle $a\gamma$ und γb ihr Zeichen ändert, weil mit einer Aenderung des Zeichens einer Function immer ein Durchgang derselben durch Null verbunden ist, nach der Voraussetzung die Gleichung $f'(x) = 0$ aber nur eine zwischen a und b liegende reelle Wurzel hat.

3. Da die Function $f'(x)$, wie wir so eben gesehen haben, sowohl in dem Intervall $a\gamma$, als auch in dem Intervall γb, fortwährend dasselbe Zeichen behält; so ergiebt sich aus (52. V.), daß die Function $f(x)$ in jedem dieser Intervalle entweder fortwährend wächst, oder fortwährend abnimmt. Hätte also $f(\gamma)$, welches bekanntlich nicht $= 0$ ist, mit $f(a)$, folglich nach dem Vorhergehenden auch mit $f(b)$, einerlei Vorzeichen; so könnte offenbar weder in dem Intervall $a\gamma$, noch in dem Intervall γb, die Function $f(x)$ irgend ein Mal verschwinden, welches man sich auf bekannte Weise mittelst Darstellung der Function durch eine Curve sehr anschaulich machen kann, obgleich es sich auch von selbst versteht, daß eine positive oder negative Größe nicht $= 0$ werden oder verschwinden kann, wenn sie respective bis zu einer andern positiven oder negativen Größe entweder stets zu- oder stets abnimmt. Hätte also $f(\gamma)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ einerlei Vorzeichen, so könnte weder in dem Intervall $a\gamma$, noch in dem Intervall γb, eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen, und diese Gleichung würde also überhaupt in dem Intervall ab keine reelle Wurzel haben, welches gegen die Voraussetzung ist. Daher hat $f(\gamma)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen, woraus ferner auf der Stelle folgt, daß die kleinere reelle Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$ in dem Intervall $a\gamma$, die größere reelle Wurzel β dieser Gleichung dagegen in dem Intervall $\gamma\beta$, die reelle Wurzel γ der Gleichung $f'(x) = 0$ folglich immer in dem Intervall $\alpha\beta$ oder zwischen α und β liegt. Andere reelle Wurzeln außer α und β hat die Gleichung $f(x) = 0$ überhaupt nicht, so daß also auch in dem Intervall $a\gamma$ bloß die eine reelle Wurzel α, in dem Intervall γb bloß die eine reelle Wurzel β liegt.

4. Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat nach der Voraussetzung zwischen a und b keine reelle Wurzel; also haben $f''(a)$, $f''(b)$ einerlei Vorzeichen, und die Function $f''(x)$ ändert überhaupt in dem Intervall ab ihr Zeichen niemals, verschwindet also auch in diesem Intervall nirgends, so daß folglich auch $f''(\gamma)$ nicht $= 0$ ist.

5. Vorzüglich kommt es nun ferner auf die Bestimmung des Vorzeichens der Größe $f''(\gamma)$ an, welche, wie wir so eben gesehen haben, nicht $= 0$ ist. Lassen wir i wieder eine unendlich kleine positive Größe bezeichnen, so ist nach (57.)

$$f(\gamma - i) = f(\gamma) - if'(\gamma) + \tfrac{1}{2}i^2 f''(\gamma - \varrho i),$$

d. i., weil $f'(\gamma) = 0$ ist,

$$f(\gamma - i) = f(\gamma) + \tfrac{1}{2}i^2 f''(\gamma - \varrho i).$$

Nehmen wir nun zuerst an, daß $f(\gamma)$ positiv sey; so wäre, wenn auch $f''(\gamma)$, und folglich, weil $f''(x)$ in dem Intervall ab sein Zeichen nie ändert, auch $f''(\gamma - \varrho i)$ positiv wäre,

$$f(\gamma - i) > f(\gamma).$$

Da nun nach dem Vorhergehenden, wenn man x von $x = a$ bis $x = \gamma$ wachsen läßt, $f(x)$ entweder stets wächst, oder stets abnimmt; so würde unter der obigen Voraussetzung auch $f(a) > f(\gamma)$, folglich, weil $f(\gamma)$ positiv ist, auch $f(a)$ positiv seyn, da wir doch im Gegentheil aus dem Vorhergehenden wissen, daß $f(\gamma)$ und $f(a)$ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist also $f(\gamma)$ positiv, so muß $f''(\gamma)$ negativ seyn.

Wäre ferner $f(\gamma)$ negativ und auch $f''(\gamma)$ negativ, so wäre auch $f''(\gamma - \varrho i)$ negativ, weil $f''(x)$ in dem Intervall ab sein Zeichen nie ändert, und folglich

$$f(\gamma - i) < f(\gamma).$$

Weil nun $f(x)$, wenn man x von $x = a$ bis $x = \gamma$ wachsen läßt, entweder stets wächst oder stets abnimmt; so würde unter der obigen Voraussetzung auch $f(a) < f(\gamma)$, und folglich, weil $f(\gamma)$ negativ ist, auch $f(a)$ negativ seyn, welches nach dem Obigen ungereimt ist, weil $f(\gamma)$ und $f(a)$ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist also $f(\gamma)$ negativ, so ist $f''(\gamma)$ positiv, und man sieht also, daß überhaupt $f(\gamma)$ und $f''(\gamma)$ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen.

6. Da also $f(\gamma)$ und $f''(\gamma)$ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist die dem Werthe γ von x entsprechende Zeichenreihe:

$$(\gamma) = \ldots\ldots \pm 0 \mp$$

Hieraus ergiebt sich mittelst der Regel des doppelten Zeichens das Schema:

$$(\gamma - i) = \ldots\ldots \pm + +$$
$$(\gamma) = \ldots\ldots \pm 0 \mp$$
$$(\gamma + i) = \ldots\ldots \pm \pm \mp$$

Nehmen wir hierzu nun ferner, daß nach dem Vorhergehenden $f(\gamma)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, daß $f'(x)$ weder in dem Intervall $a\gamma$, noch in dem Intervall γb, sein Zeichen ändert, und daß $f''(x)$ in dem Intervall ab fort-

während ein und dasselbe Vorzeichen behält; so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgendes Schema:

$$\begin{aligned}
(a) &= \ldots\ldots \pm \mp \pm \\
&\ldots\ldots \\
(\gamma - i) &= \ldots\ldots \pm + \mp \\
(\gamma) &= \ldots\ldots \pm 0 \mp \\
(\gamma + i) &= \ldots\ldots \pm + \mp \\
&\ldots\ldots \\
(b) &= \ldots\ldots \pm \pm \pm
\end{aligned}$$

7. Betrachten wir nun a und $\gamma - i$ als Gränzen der einen in dem Intervall $a\gamma$ liegenden reellen Wurzel α der Gleichung $f(x) = 0$; so ist für diese Gränzen:

$$\begin{aligned}
(a) &= \ldots\ldots \pm \mp \pm \\
(\gamma - i) &= \ldots\ldots \pm + \mp
\end{aligned}$$

und folglich nach (67. VI. 2.)

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} < \alpha .$$

Betrachten wir ferner $\gamma + i$ und b als Gränzen der einen in dem Intervall γb liegenden reellen Wurzel β der Gleichung $f(x) = 0$; so ist für diese Gränzen:

$$\begin{aligned}
(\gamma + i) &= \ldots\ldots \pm \pm \mp \\
(b) &= \ldots\ldots \pm \pm \pm
\end{aligned}$$

und folglich nach (67. VI. 1.)

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} > \beta .$$

Also ist

$$\left\{a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right\} - \left\{b - \frac{f(b)}{f'(b)}\right\} < \alpha - \beta ,$$

$$a - b + \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < \alpha - \beta ,$$

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a - (\beta - \alpha) ;$$

folglich, weil $\beta > \alpha$, $\beta - \alpha$ positiv ist, um so mehr

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a .$$

Bisher ist zwar angenommen worden, daß α und β ungleich sind. Da aber auch dann, wenn α und β einander unendlich nahe kommen oder $\beta - \alpha$ unendlich klein ist, immer

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a - (\beta - \alpha)$$

ist; so ist offenbar auch für $\alpha = \beta$, d. i. wenn die Gleichung

$f(x) = 0$ zwischen a und b zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, jederzeit

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a .$$

Wenn also zwischen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, und zwischen diesen Gränzen zwei einander gleiche oder ungleiche reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen; so ist jederzeit

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a .$$

8. Man setze nun

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}, \quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')}, \quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(a''')}, \quad b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(b''')};$$

u. s. w. u. s. w.

und nehme wieder an, daß zwischen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, daß aber zwischen diesen Gränzen zwei gleiche oder ungleiche reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen; so ist

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a,$$

$$\frac{f(b')}{f'(b')} - \frac{f(a')}{f'(a')} < b' - a',$$

$$\frac{f(b'')}{f'(b'')} - \frac{f(a'')}{f'(a'')} < b'' - a'',$$

$$\frac{f(b''')}{f'(b''')} - \frac{f(a''')}{f'(a''')} < b''' - a''',$$

u. s. w. u. s. w.

wie weit man diese Ausdrücke auch fortsetzen mag. Die Richtigkeit hiervon erhellet augenblicklich, wenn man sich nur aus (67. VI.) erinnert, daß die Größen a, a', a'', a''', a^{IV}, ... fortwährend wachsen, ohne jemals größer als α, die Größen b, b', b'', b''', b^{IV}, ... dagegen fortwährend abnehmen, ohne jemals kleiner als β zu werden, so daß also ab, a'b', a''b'', a'''b''', $a^{IV}b^{IV}$, ... sich immer enger und enger zusammenziehende Intervalle sind, in deren jedem aber die beiden reellen Wurzeln α, β der Gleichung $f(x) = 0$ liegen. Daß die reelle Wurzel γ der Gleichung $f'(x) = 0$ ebenfalls in jedem dieser Intervalle liegt, ist klar, weil nach dem Vorhergehenden γ in dem Intervall $\alpha\beta$, d. h. zwischen α und β liegt, so wie sich denn auch von selbst

versteht, daß $f''(x)$ in keinem der obigen Intervalle sein Zeichen ändert, so daß also für die sämmtlichen obigen Intervalle dieselben Bedingungen erfüllt sind, welche nach den Voraussetzungen für das erste Intervall a b erfüllt seyn müssen. Man sieht hieraus zugleich, daß durch $a, b; a', b'; a'', b''; a''', b'''; a^{iv}, b^{iv}; \ldots\ldots$ die beiden reellen Wurzeln α, β in immer engere und engere Gränzen eingeschlossen werden; die Größe, durch welche diese Gränzen, wie nahe man dieselben auch den reellen Wurzeln α, β von beiden Seiten her bringen mag, fortwährend von einander getrennt sind, ist die Differenz $\beta - \alpha$ der beiden reellen Wurzeln. Sind diese beiden reellen Wurzeln einander gleich, so ist $\beta - \alpha = 0$, oder $\alpha = \beta = \gamma$, und die obigen Gränzen werden sich nun offenbar der Größe γ selbst von beiden Seiten her immer mehr und mehr nähern.

9. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun endlich auch unmittelbar folgender Satz:

Wenn zwischen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, Eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt; wenn man ferner weiß, daß zwischen diesen Gränzen nur entweder keine oder zwei reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen können, und irgend eine der Differenzen

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad \frac{f(b')}{f'(b')} - \frac{f(a')}{f'(a')}, \quad \frac{f(b'')}{f'(b'')} - \frac{f(a'')}{f'(a'')}, \quad \ldots\ldots$$

eben so groß oder größer ist als das entsprechende Glied der Reihe

$$b - a, \; b' - a', \; b'' - a'', \; b''' - a''', \; \ldots\ldots;$$

so läßt sich immer sicher schließen, daß zwischen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt.

Fourier, der berühmte Erfinder dieses wichtigen Satzes, welchen wir späterhin bei der Auflösung der numerischen Gleichungen, namentlich bei der so wichtigen Unterscheidung ihrer reellen und imaginären Wurzeln, häufig in Anwendung bringen werden, hat denselben aus Sätzen der höhern Geometrie hergeleitet, worüber man Fouriers berühmtes Werk: **Analyse des équations déterminées. I. Paris 1831. p. 117.** nachzusehen hat. Wir haben uns im Vorhergehenden bemühet, einen auf rein arithmetischen Principien beruhenden Beweis für denselben zu geben, verweisen aber nochmals wegen des geometrischen Beweises auf Fouriers Werk, weil dergleichen geometrische Darstellungen allerdings sehr geeignet sind, eine recht deutliche Einsicht in die Natur des Gegenstandes zu gewähren, und denselben gewöhnlich auch zu großer Anschaulichkeit bringen, welches rein arithmetische Darstellungen, obgleich freilich nur diese nach unserem Dafürhalten in die reine streng wissenschaftliche Arithmetik gehören, nicht

in demselben Grade vermögen. Von den bisherigen Sätzen wollen wir nun zu der Auflösung der numerischen Gleichungen selbst übergehen, da das Vorhergehende nun alle dazu nöthigen Grundlagen enthält.

D. Allgemeine Bestimmung der Gränzen, zwischen denen die Wurzeln einer numerischen Gleichung überhaupt zu suchen sind.

70. Bei Bestimmung der Gränzen, zwischen denen die Wurzeln einer numerischen Gleichung überhaupt gesucht werden müssen, verfährt man practisch am leichtesten auf folgende Art. Man bildet sich durch Entwickelung der derivirten Functionen der Function der gegebenen Gleichung die Reihe $f^{(n)}f$. Hierauf setzt man in allen Gliedern dieser Reihe die Größe $x = 0$, und geht dann, indem man $x = -1, -10, -10^2, -10^3$, u. s. w. setzt, zuerst so lange rückwärts, bis man einen Werth $x = -10^\mu$ findet, für welchen die Zeichenreihe (-10^μ) bloß Zeichenwechsel enthält. Dann geht man, nach und nach $x = 1, 10, 10^2, 10^3$, u. s. w. setzend, so lange vorwärts, bis man auf einen Werth $x = 10^\nu$ kommt, für welchen die Zeichenreihe (10^ν) bloß Zeichenfolgen enthält. Nach (64. VIII.) können also weder zwischen $-\infty$ und -10^μ, noch zwischen 10^ν und $+\infty$ reelle Wurzeln der Gleichung liegen, sondern alle reelle Wurzeln sind zwischen -10^μ und 10^ν zu suchen. Die Zeichenreihen (-10^μ) und (10^ν) sind jederzeit um n Zeichenwechsel von einander verschieden. Nun bestimme man die Anzahl der Zeichenwechsel in jeder der Zeichenreihen

$$(-10^\mu), (-10^{\mu-1}), (10^{\mu-2}), \ldots (10^{\nu-2}), (10^{\nu-1}), (10^\nu),$$

oder, wie wir in der Folge immer thun wollen, die jedem einzelnen Intervalle entsprechenden Indices. Haben zwei auf einander folgende Zeichenreihen dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln, oder ist das letzte Glied der zwischen beiden Zeichenreihen liegenden Indexreihe 0; so liegt zwischen den beiden Werthen von x, denen die beiden in Rede stehenden Zeichenreihen entsprechen, keine reelle Wurzel der Gleichung, und diese Intervalle werden dann überhaupt nicht weiter beachtet. Ist aber das letzte Glied der zwischen beiden Zeichenreihen liegenden Indexreihe nicht 0, nach dem Obigen also > 0; so sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem das letzte Glied der in Rede stehenden Indexreihe eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Im ersten Falle liegt nach (64. IX.) in dem Intervall, welchem die Indexreihe entspricht, jederzeit mindestens eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung; im zweiten Falle läßt sich dagegen nur durch eine besondere Untersuchung, mit der wir es jetzt noch nicht zu thun haben, von der aber bald nachher ausführlich die Rede seyn wird, über die Natur der Wurzeln eine bestimmte Entscheidung geben.

Oft trifft es sich, daß, wenn man in der Reihe $f(\infty) f$ für x einen bestimmten Werth, den wir überhaupt a nennen wollen, setzt, einige Glieder verschwinden, und man also keine vollständige dem Werthe $x = a$ ensprechende Zeichenreihe erhält. In einem solchen Falle bildet man jederzeit mittelst der Regel des doppelten Zeichens aus der Zeichenreihe (a) die beiden Zeichenreihen $(a - i)$ und $(a + i)$, oder $(< a)$ und $(> a)$, und vergleicht dann diese Zeichenreihen mit den übrigen schon gebildeten Zeichenreihen und unter sich selbst, wie an den folgenden Beispielen ausführlicher gezeigt werden wird. Bei der Vergleichung der Zeichenreihen $(< a)$ und $(> a)$ mit einander hat man vorzüglich das zu berücksichtigen, was in (64. XII.) bewiesen worden ist.

71. Die vorhergehenden Regeln wollen wir nun durch mehrere vollständig ausgeführte Exempel in das hellste Licht zu setzen suchen.

I. $x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 8x - 7$

$f''(x) = 6x - 8$

$f'''(x) = 6$

$(-10) = + - + -$
$\quad\quad 0\ 0\ 0\ 1$ } eine reelle Wurzel

$(-1) = + - + +$
$\quad\quad 0\ 0\ 1\ 0$ } keine Wurzel

$(0) = + - - +$
$\quad\quad 0\ 0\ 0\ 1$ } eine reelle Wurzel

$(1) = + - - -$
$\quad\quad 0\ 1\ 1\ 1$ } eine reelle Wurzel.

$(10) = + + + +$

Man brauchte hier bloß bis $x = -10$ nach der einen Seite hin, und bis $x = 10$ nach der andern Seite hin zu gehen, weil die Zeichenreihe (-10) bloß Zeichenwechsel, die Zeichenreihe (10) dagegen bloß Zeichenfolgen enthält, wie die vorher gegebenen Regeln erfordern.

II. $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$

$f(x) = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$

$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46$

$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$

$f'''(x) = 60x^2 - 72x - 144$

$f^{IV}(x) = 120x - 72$

$f^{V}(x) = 120$

$$
\begin{array}{rl}
(-10) = & + - + - + - \\
& 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
(-1) = & + - + - + + \\
& 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
(0) = & + - - + - - \\
& 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
(1) = & + + - + + - \\
& 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 3 \\
(10) = & + + + + + +
\end{array}
$$

eine reelle Wurzel

eine reelle Wurzel

keine Wurzel

eine reelle Wurzel, die Natur zweier Wurzeln ungewiß.

Bei den beiden vorhergehenden Exempeln war die Anwendung der Regel des doppelten Zeichens nicht nöthig. Jetzt wollen wir zu solchen Exempeln übergehen, bei denen diese Regel in Anwendung gebracht werden muß.

III. $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 - 3x + 23 \\
f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 3 \\
f''(x) &= 12x^2 - 24x \\
f'''(x) &= 24x - 24 \\
f^{IV}(x) &= 24
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0) &= + - 0 - + \\
(1) &= + 0 - - + \\
(10) &= + + + + +
\end{aligned}
$$

Also mittelst der Regel des doppelten Zeichens:

$$
\begin{array}{rl}
(<0) = & + - + - + \\
& 0\ 0\ 1\ 2\ 2 \\
(>0) = & + - - - + \\
& 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
(<1) = & + - - - + \\
& 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
(>1) = & + + - - + \\
& 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
(10) = & + + + + +
\end{array}
$$

zwei imaginäre Wurzeln

keine Wurzel

keine Wurzel

zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit.

Ueber den Schluß auf zwei imaginäre Wurzeln wegen des letzten Index 2 im ersten Intervall zwischen < 0 und > 0 s. m. (64. XII.).

IV. $x^3 - 7x + 7 = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 7x + 7 \\
f'(x) &= 3x^2 - 7 \\
f''(x) &= 6x \\
f'''(x) &= 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-10) &= + - + - \\
(-1) &= + - - + \\
(0) &= + 0 - + \\
(1) &= + + - + \\
(10) &= + + + +
\end{aligned}
$$

Die Regel des doppelten Zeichens giebt:

$$\left.\begin{array}{rcccc} (-10) = & + & - & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\} \text{eine reelle Wurzel}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} (-1) = & + & - & - & + \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (<0) = & + & - & - & + \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ (>0) = & + & + & - & + \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \text{keine Wurzel}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} (1) = & + & + & - & + \\ & 0 & 0 & 1 & 2 \\ (10) = & + & + & + & + \end{array}\right\} \text{zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit.}$$

V. $x^3 - 2x - 5 = 0$

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

$$\begin{array}{rcccc} (-1) = & + & - & + & - \\ (0) = & + & 0 & - & - \\ (1) = & + & + & + & - \\ (10) = & + & + & + & + \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} (-1) = & + & - & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right\} \text{zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit.}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} (<0) = & + & - & - & - \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (>0) = & + & + & - & - \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (1) = & + & + & + & - \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (10) = & + & + & + & + \end{array}\right\} \text{keine Wurzel}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} (1) = & + & + & + & - \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (10) = & + & + & + & + \end{array}\right\} \text{eine reelle Wurzel.}$$

VI. $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$
$$f'(x) = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5$$
$$f''(x) = 42x^5 - 40x^3 - 18x + 8$$
$$f'''(x) = 210x^4 - 120x^2 - 18$$
$$f^{\text{IV}}(x) = 840x^3 - 240x$$
$$f^{\text{V}}(x) = 2520x^2 - 240$$
$$f^{\text{VI}}(x) = 5040x$$
$$f^{\text{VII}}(x) = 5040$$

$$\begin{array}{rcccccccc} (-10) = & + & - & + & - & + & - & + & - \\ (-1) = & + & - & + & - & + & + & - & + \\ (0) = & + & 0 & - & 0 & - & + & - & + \\ (1) = & + & + & + & + & + & - & - & + \\ (10) = & + & + & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc|l}
(-10) = & + & - & + & - & + & - & + & - & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \text{eine reelle Wurzel} \\
(-1) = & + & - & + & - & + & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{keine Wurzel} \\
(<0) = & + & - & - & + & - & + & - & + & \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \text{zwei imaginäre Wurzeln} \\
(>0) = & + & + & - & - & - & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \text{zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit} \\
(1) = & + & + & + & + & + & - & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \text{zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit.} \\
(10) = & + & + & + & + & + & + & + & + &
\end{array}$$

VII. $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 1$$
$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 60$$
$$f^{IV}(x) = 120x$$
$$f^{V}(x) = 120$$

$$\begin{array}{rcccccc}
(-10) = & + & - & + & - & + & - \\
(-1) = & + & - & 0 & + & - & + \\
(0) = & + & 0 & - & 0 & + & + \\
(1) = & + & + & 0 & - & - & - \\
(10) = & + & + & + & + & + & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc|l}
(-10) = & + & - & + & - & + & - & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \text{eine reelle Wurzel} \\
(<-1) = & + & - & + & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{keine Wurzel} \\
(>-1) = & + & - & - & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \text{zwei Wurzeln unbestimmt} \\
(<0) = & + & - & - & + & + & + & \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \text{keine Wurzel} \\
(>0) = & + & + & - & - & + & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \text{eine reelle Wurzel} \\
(<1) = & + & + & - & - & - & - & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{keine Wurzel} \\
(>1) = & + & + & + & - & - & - & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \text{eine reelle Wurzel.} \\
(10) = & + & + & + & + & + & + &
\end{array}$$

VIII. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 15x + 17 = 0$

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 15x + 17$$
$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 20x + 15$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 60x - 20$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 60$$
$$f^{IV}(x) = 120x - 120$$
$$f^{V}(x) = 120$$

$$(-1) = + - + - + -$$
$$(0) = + - + - + +$$
$$(1) = + 0\ 0\ 0 + +$$

$$(-1) = \underset{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1}{+ - + - + -} \Big\} \text{eine reelle Wurzel}$$
$$(0) = \underset{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{+ - + - + +} \Big\} \text{keine Wurzel}$$
$$(<1) = \underset{0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4}{+ - + - + +} \Big\} \text{vier imaginäre Wurzeln.}$$
$$(>1) = + + + + + +$$

IX. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 7 = 0$

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 7$$
$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$$
$$f''(x) = 12x^2 + 24x + 12$$
$$f'''(x) = 24x + 24$$
$$f^{IV}(x) = 24$$

$$(-10) = + - + - +$$
$$(-1) = + 0\ 0\ 0 -$$
$$(0) = + + + + -$$
$$(1) = + + + + +$$

$$(-10) = \underset{0\ 0\ 0\ 0\ 1}{+ - + - +} \Big\} \text{eine reelle Wurzel}$$
$$(<-1) = \underset{0\ 1\ 2\ 3\ 2}{+ - + - -} \Big\} \text{zwei imaginäre Wurzeln}$$
$$(>-1) = \underset{0\ 0\ 0\ 0\ 0}{+ + + + -} \Big\} \text{keine Wurzel}$$
$$(0) = \underset{0\ 0\ 0\ 0\ 1}{+ + + + -} \Big\} \text{eine reelle Wurzel.}$$
$$(1) = + + + + +$$

Diese Exempel, von denen die beiden letzten vollständigen Aufschluß über die Natur aller Wurzeln der vorgelegten Gleichung geben, mögen zur Erläuterung des bei Entdeckung der Gränzen der Wurzeln anzuwendenden Verfahrens hinreichen. Vorzüglich liegt es uns nun aber ob, zu zeigen, wie in den Fällen, wo die Natur der Wurzeln noch zweifelhaft bleibt, über dieselbe sicher entschieden werden kann.

72. Bevor wir indeß zu dieser Untersuchung übergehen, wollen wir zeigen, wie sich aus den vorhergehenden Principien noch ein neuer Beweis des in II. schon auf andere Art bewiesenen, gewöhnlich nach Harriot benannten, Lehrsatzes ableiten läßt. Die gegebene Gleichung mit lauter reellen Coefficienten, deren, wie wir jetzt annehmen wollen, keiner $= 0$ seyn soll, sey wie gewöhnlich

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

so daß also

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

ist. Entwickelt man die derivirten Functionen dieser Function und setzt $x = 0$; so findet man auf der Stelle, daß die Vorzeichen von

$$f^{(n-1)}(0), f^{(n-2)}(0), f^{(n-3)}(0), \ldots . f'(0), f(0)$$

respective mit den Vorzeichen der Coefficienten A, B, C, ... L, N einerlei sind, das Vorzeichen von $f^{(n)}(x)$ aber immer + ist. Lassen wir nun den Ausdruck

$$(0) = + \text{ ABCD } \ldots . \text{ LN}$$

bloß bedeuten, daß die Glieder der Zeichenreihe (0) vom zweiten an mit den Vorzeichen der Coefficienten A, B, C, D, ... L, N einerlei sind; so haben wir die folgenden Zeichenreihen:

$$(-\infty) = + - + - + - \ldots, \mp \pm$$
$$(0) = + \text{ A B C D E } \ldots . \text{ L N}$$
$$(+\infty) = + + + + + + \ldots . + + .$$

Die Anzahl der Wechsel der Reihe $(-\infty)$ ist $= n$, die Anzahl der Wechsel der Reihe $(+\infty)$ ist $= 0$. Die Anzahl der Wechsel der Reihe (0) sey $= w$, die Anzahl der in dieser Reihe vorkommenden Folgen dagegen $= f$. Die Anzahl der negativen reeen Wurzeln unserer Gleichung sey, wie in (32.), $= m$, die Anzahl der positiven Wurzeln dagegen $= p$. Weil alle negativen reellen Wurzeln zwischen $-\infty$ und 0 liegen; so ist nach (64. VII.)

$$m \lessgtr n - w .$$

Nun ist offenbar $n - w = f$. Also ist

$$m \lessgtr f .$$

Da ferner alle positiven reellen Wurzeln zwischen 0 und $+\infty$ liegen; so ist nach (64. VII.)

$$p \lessgtr w - 0, \text{ d. i. } p \lessgtr w .$$

In den Ausdrücken

$$p \lessgtr w, \; m \lessgtr f$$

ist aber der nach Harriot benannte Lehrsatz, so wie er in (32.) für den Fall, wo kein Coefficient der Gleichung $= 0$ ist, ausgesprochen worden ist, enthalten. Hat die Gleichung lauter reelle Wurzeln, so ist $p + m = n$, $f + w = n$, woraus ganz wie in (32.) leicht $p = w$, $m = f$ folgt. Ueber die weitern Entwickelungen und Bestimmungen dieses Satzes muß man (32.) nachsehen.

E. Von der Unterscheidung der reellen und imaginären Wurzeln.

73. Wir betrachten hier zunächst einen Fall, der zwar sehr speciell ist, auf den sich aber, wie wir nachher sehen werden, alle

übrigen Fälle zurückführen lassen. Dies ist der Fall, in welchem die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe 012 sind, wo man also, wie aus der Lehre von den Zeichenreihen erhellet und auch schon in (69.) bemerkt worden ist, weiß, daß in dem Intervall ab keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, und daß in diesem Intervall bloß entweder keine oder zwei reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ liegen können. Auf diesen Fall ist also der in (69.) bewiesene Satz anwendbar, und es kommt nun eben darauf an, mittelst desselben zu entscheiden, ob die beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind, oder ob zwischen diesen Gränzen keine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegen kann, und dieselbe also statt der beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln zwei imaginäre Wurzeln hat, in welchem Falle man bekanntlich auch sagt, daß die beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln in dem Intervalle ab fehlen. Diese Entscheidung kann nun, indem wir für jetzt immer den in Rede stehenden Fall vor Augen behalten, auf folgende Art gegeben werden.

Man bestimme aus den gegebenen Gränzen a und b und den bekannten Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ die Größe

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Findet sich diese Größe $\gtrless b - a$, so liegt nach (69. 9.) keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen a und b, und dieselbe hat also statt der beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln zwei imaginäre Wurzeln, oder die beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln fehlen in dem Intervall ab. Findet sich aber die obige Größe $< b - a$, so können zwischen a und b zwei reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen, überhaupt bleibt aber die Natur der beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln noch unbestimmt. In diesem Falle muß man die Gränzen a und b enger zusammenziehen, indem man für x eine zwischen a und b liegende Größe c setzt, wodurch das Intervall ab in die beiden engern Intervalle ac und cb getheilt wird, und nun zwei Fälle eintreten können. Sind nämlich, welches der eine mögliche Fall ist, die letzten Glieder der den Intervallen ac und cb entsprechenden Indexreihen beide die Einheit, so liegt sowohl in dem Intervall ac, als auch in dem Intervall cb, eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so daß also nun offenbar über die Natur der beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entschieden ist, und diese beiden reellen Wurzeln zugleich, wie man dies zu nennen pflegt, durch die bekannte Größe c getrennt sind, so daß nämlich in jedem der beiden Intervalle ac und cb nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Es können aber auch, welches der zweite mögliche Fall ist, die drei letzten Glieder der dem eines

der beiden Intervalle, in welche das Intervall ab getheilt worden ist, entsprechenden Indexreihe 000, die drei letzten Glieder der dem andern Intervalle entsprechenden Indexreihe 012 seyn, wobei folgende Erläuterung nöthig ist. Daß nämlich zuerst die dem Gliede $f'(x)$ der Functionenreihe entsprechenden Indices in beiden Intervallen jederzeit 0 sind, folgt unmittelbar aus (64. XIV.). Sind also nicht in beiden Intervallen die letzten Indices die Einheit, so können die drei letzten Indices in den beiden Intervallen bloß entweder die Folgen 000, 012 oder die Folgen 002, 010 bilden. Da nun aber der letzte Fall nicht Statt finden kann, weil nach (65.) die Folge 002 nicht zulässig ist, so bleibt bloß der erste Fall übrig, und es findet sich folglich in dem einen der beiden Intervalle ac, cb jederzeit die Folge 012 der drei letzten Indices. In diesem Intervalle sind also auch bloß die in dem Intervall ab angedeuteten zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung ferner zu suchen, und man kann jetzt auf dieses Intervall wieder ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches nach dem Vorhergehenden auf das Intervall ab angewandt werden muß. Ueberhaupt aber sieht man, daß man dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen kann, und daß man dadurch, wenn man es nur weit genug fortsetzt, weil sich bei demselben die Gränzen der Wurzeln immer enger und enger zusammenziehen, jederzeit entweder zu einer Trennung der beiden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, wenn es nämlich zwischen a und b zwei solche Wurzeln dieser Gleichung giebt und dieselben ungleich sind, oder zu dem obigen Kennzeichen der Nichtexistenz zweier solchen Wurzeln zwischen den angegebenen Gränzen gelangen muß. Sind die beiden zwischen diesen Gränzen angedeuteten Wurzeln reell, aber einander gleich, so kann natürlich niemals eine Trennung derselben bewirkt werden, welches folgende Ergänzungsregel zu dem Obigen nöthig macht. Hat sich nämlich die Größe

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

kleiner wie die Größe $b - a$ ergeben, so daß also die Natur der beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln noch unbestimmt geblieben ist; so suche man, wobei überhaupt (58.) zu vergleichen ist, den größten gemeinschaftlichen Divisor $\psi(x)$ von $f(x)$ und $f'(x)$, und bestimme dann nach den vorhergehenden Regeln, ob die Gleichung $\psi(x) = 0$, welche offenbar jederzeit von einem niedrigern Grade wie die Gleichung $f(x) = 0$ ist, zwischen den Gränzen a und b eine reelle Wurzel, die wir α nennen wollen, hat. Wäre dies der Fall, so würde, aber auch nur in diesem Falle, die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen denselben Gränzen zwei reelle Wurzeln haben, die beide $= \alpha$ sind.

In Bezug auf die Erkennung desjenigen der beiden Intervalle ac, cb, in welchem die drei letzten Indices die Folge 012 bilden, ist noch zu bemerken, daß dieses Intervall jederzeit das

Intervall ac oder das Intervall cb ist, je nachdem $f'(c)$ respective mit $f'(a)$ oder mit $f'(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, wie leicht auf folgende Art erhellet. Da für das Intervall ab die drei letzten Indices die Folge 012 bilden, so können die Zeichenreihen (a) und (b) offenbar bloß folgende Gestalt haben:

$$(a) = \ldots\ \pm\ \overline{+}\ \pm$$
$$(b) = \ldots\ \pm\ \pm\ \pm$$

$f''(c)$ hat mit $f''(a)$ und $f''(b)$ einerlei Vorzeichen, weil zwischen a und b keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ liegt. $f(c)$ hat mit $f(a)$ und $f(b)$ einerlei Vorzeichen, weil im entgegengesetzten Falle die beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln der gegebenen Gleichung reell und durch c getrennt seyn würden, welches der erste der beiden oben unterschiedenen Fälle ist, den man also, wie man hieraus zugleich sieht, immer daran erkennt, daß $f(c)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat. Also können im zweiten der beiden oben unterschiedenen Fälle die Zeichenreihen (a), (c), (b) bloß entweder

$$(a) = \ldots\ \pm\ \overline{+}\ \pm$$
$$(c) = \ldots\ \pm\ \pm\ \pm$$
$$(b) = \ldots\ \pm\ \pm\ \pm$$

oder

$$(a) = \ldots\ \pm\ \overline{+}\ \pm$$
$$(c) = \ldots\ \pm\ \overline{+}\ \pm$$
$$(b) = \ldots\ \pm\ \pm\ \pm$$

seyn, woraus man also sieht, daß dasjenige der beiden Intervalle ac, cb, in welchem die drei letzten Indices die Folge 012 bilden, jederzeit das Intervall ac oder das Intervall cb ist, jenachdem $f'(c)$ respective mit $f'(a)$ oder mit $f'(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, wie oben behauptet wurde.

74. Das Vorhergehende wollen wir nun durch einige vollständig ausgeführte Beispiele zu völliger Deutlichkeit zu bringen suchen, wobei wir bemerken, daß dieselben der Kürze wegen hier sämmtlich so gewählt werden sollen, daß eine besondere Untersuchung wegen der gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung bei denselben nicht nöthig ist. Von den schon in (71.) behandelten Gleichungen sind die Gleichungen IV., V. und VII. zu unserm jetzigen Zwecke brauchbar, die wir daher zuerst vornehmen wollen.

I. Bei der Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

blieb in (71.) die Beschaffenheit zweier zwischen 1 und 10 angedeuteten Wurzeln ungewiß. Die Zeichenreihen nebst der entsprechenden Indexreihe waren:

$$(1) = +\ +\ -\ +$$
$$\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2$$
$$(10) = +\ +\ +\ +\ .$$

Ferner ist

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -4;$$
$$f(10) = 937, \quad f'(10) = 293.$$

Folglich ist

$$\frac{f(10)}{f'(10)} - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{937}{293} + \frac{1}{4},$$

und diese Größe also offenbar kleiner wie $10 - 1 = 9$. Man muß also das Intervall zwischen 1 und 10 nach dem Vorhergehenden ferner theilen, wozu man der Leichtigkeit der Rechnung wegen in allen Fällen am besten die kleinsten in dem in Rede stehenden Intervall liegenden Zahlen, hier also 2, wählt. Da nun

$$f(2) = 1, \; f'(2) = 5$$

ist, so hat $f(2)$ mit $f(1)$ und $f(10)$ gleiches, $f'(2)$ mit $f'(1)$ ungleiches Vorzeichen, weshalb nach (73.) die Wurzeln zwischen 1 und 2 zu suchen sind. Da nun

$$\frac{f(2)}{f'(2)} - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

ist, so ist diese Größe wieder kleiner wie $2 - 1 = 1$, und man muß also das Intervall zwischen 1 und 2 ferner theilen. Für $x = 1,5$ erhält man

$$f(1,5) = -0,125; \; f'(1,5) = -0,25.$$

Also hat $f(1,5)$ mit $f(1)$ und $f(2)$ entgegengesetztes Vorzeichen, und deshalb die gegebene Gleichung *eine* reelle Wurzel zwischen 1 und 1,5, so wie *eine* reelle Wurzel zwischen 1,5 und 2. Diese Gleichung hat also drei reelle Wurzeln zwischen -10 und -1, zwischen 1 und 1,5 und zwischen 1,5 und 2.

II. Bei der Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

blieb in (71.) die Beschaffenheit zweier Wurzeln zwischen -1 und 0 unbestimmt, und die Zeichenreihen nebst der entsprechenden Indexreihe waren:

$$(-1) = + - + -$$
$$\quad\; 0 \; 0 \; 1 \; 2$$
$$(< 0) = + - - -.$$

Da

$$f(-1) = -4, \; f'(-1) = 1;$$
$$f(0) = -5, \; f'(0) = -2$$

ist; so ist

$$\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = \frac{5}{2} + \frac{4}{1} = \frac{13}{2},$$

d. i. größer wie $0 - (-1) = 1$. Die beiden zwischen -1 und 0 angedeuteten Wurzeln fehlen also in diesem Intervall, oder die gegebene Gleichung hat statt dieser Wurzeln zwei imaginäre

Wurzeln. Eigentlich bietet dieser Fall die Eigenthümlichkeit dar, daß $f''(0) = 0$ ist. Es ist aber klar, daß auch in einem solchen Falle alles Obige seine Richtigkeit behält, wie schon daraus erhellet, daß, so wie

$$\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} > 1$$

ist, offenbar auch

$$\frac{f(<0)}{f'(<0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} > 1$$

ist, wo <0 bekanntlich eine um ein Unendlichkleines von 0 verschiedene Größe bezeichnet.

III. Für die Gleichung

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$$

blieb in (71.) die Natur zweier Wurzeln zwischen -1 und 0 unbestimmt, und die Zeichenreihen nebst der entsprechenden Indexreihe waren

$$\begin{array}{rcccccc} (>-1) = & + & - & - & + & - & + \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ (<0) = & + & - & - & + & + & + \end{array}$$

Man findet leicht

$$f(-1) = 4,\ f'(-1) = -19\,;$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) \quad = 6\,.$$

Also ist

$$\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = \frac{1}{6} + \frac{4}{19} = \frac{43}{114},$$

diese Größe folglich kleiner wie $0 - (-1) = 1$. Man setze nun $x = -0,5$; so ist

$$f(-0,5) = -0,78125\,.$$

Daher hat $f(-0,5)$ mit $f(-1)$ und $f(0)$ entgegengesetztes Vorzeichen, und die gegebene Gleichung hat folglich zwei reelle Wurzeln zwischen -1 und 0, eine zwischen -1 und $-0,5$, eine zwischen $-0,5$ und 0. Diese Gleichung hat also fünf reelle Wurzeln zwischen -10 und -1; -1 und $-0,5$; $-0,5$ und 0; 0 und 1; 1 und 10.

Diesen Beispielen fügen wir nun noch die beiden folgenden ganz neuen bei.

IV. Die gegebene Gleichung sey

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0\,;$$

also

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$$
$$f''(x) = 6x + 4$$
$$f'''(x) = 6$$

$$\begin{array}{rl} (-10) = & + - + - \\ & 0\ 0\ 1\ 1 \\ (-1) = & + - - + \\ & 0\ 1\ 0\ 0 \\ (0) = & + + - + \\ & 0\ 0\ 1\ 2 \\ (1) = & + + + + \end{array}$$

eine reelle Wurzel

keine Wurzel

zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit.

Es ist nun

$$f(0) = 2,\ f'(0) = -3\ ;$$
$$f(1) = 2,\ f'(1) = 4\ .$$

Also ist

$$\frac{f(1)}{f'(1)} - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}\ ,$$

diese Größe folglich größer wie $1 - 0 = 1$. Daher fehlen die beiden zwischen 0 und 1 angedeuteten Wurzeln in diesem Intervall, oder die gegebene Gleichung hat statt derselben zwei imaginäre Wurzeln.

V. Für die gegebene Gleichung

$$x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$$

erhält man:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 \\ f'(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25 \\ f''(x) &= 20x^3 + 12x^2 + 2 \\ f'''(x) &= 60x^2 + 24x \\ f^{IV}(x) &= 120x + 24 \\ f^{V}(x) &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} (-10) = & + - + - + - \\ (-1) = & + - + - - - \\ (0) = & + + 0 + - - \\ (1) = & + + + + - - \\ (10) = & + + + + + + \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (-10) = & + - + - + - \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2 \\ (-1) = & + - + - - - \\ & 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ (<0) = & + + - + - - \\ & 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2 \\ (>0) = & + + + + - - \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ (1) = & + + + + - - \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ (10) = & + + + + + + \end{array}$$

zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit

keine Wurzel

zwei imaginäre Wurzeln

keine Wurzel

eine reelle Wurzel.

Es ist also bloß noch über die beiden zwischen -10 und -1 angedeuteten Wurzeln zu entscheiden. Da

$$f(-10) = -89686,\ f'(-10) = 45955;$$
$$f(-1) = -10,\ f'(-1) = -26$$

ist; so ist

$$\frac{f(-1)}{f'(-1)} - \frac{f(-10)}{f'(-10)} = \frac{10}{26} + \frac{89686}{45955},$$

diese Größe also offenbar kleiner wie $-1-(-10)=9$. Setzen wir nun $x=-2$, so wird

$$f(-2) = +2,\ f'(-2) = +19.$$

Folglich hat $f(-2)$ mit $f(-10)$ und $f(-1)$ entgegengesetztes Vorzeichen, und unsere Gleichung hat also sowohl zwischen -10 und -2, als auch zwischen -2 und -1, eine reelle Wurzel. Dieselbe hat folglich drei reelle Wurzeln zwischen -10, -2; -2, -1; 1, 10; außerdem zwei imaginäre Wurzeln.

75. Es liegt uns nun ob, zu zeigen, daß auf den vorher betrachteten Fall alle übrigen Fälle zurückgeführt werden können.

I. Wenn für das beliebige Intervall ab der letzte Index $\delta^{(n)}=1$ ist; so wissen wir, daß in diesem Intervall eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ liegt.

II. Wenn für das beliebige Intervall ab die drei letzten Indices $\delta^{(n-2)}$, $\delta^{(n-1)}$, $\delta^{(n)}$ die Folge 012 bilden; so wissen wir aus dem Vorhergehenden, wie sich über die Natur der beiden zwischen a und b angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ entscheiden läßt.

III. In jedem andern Falle, wo also für das beliebige Intervall ab der letzte Index $\delta^{(n)} \geqq 2$ ist, und die beiden vorhergehenden Indices für $\delta^{(n)}=2$ nicht 01 sind, suche man, in der Indexreihe von der rechten nach der linken Hand hin gehend, das erste Glied derselben, welches $=1$ ist. Entspricht dieses Glied dem Gliede $f^{(k)}(x)$ der Functionenreihe, und ist also $\delta^{(n-k)}$; so ist das nächst folgende Glied der Indexreihe nach der rechten Seite hin, d. i. $\delta^{(n-k+1)}$, jederzeit $=2$. Dieses Glied kann nämlich nach (65.) nur $=0$, $=1$ oder $=2$ seyn. Wäre dasselbe $=1$, so wäre $\delta^{(n-k)}$ nicht das erste Glied der Indexreihe, welches, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, $=$ ist. Wäre $\delta^{(n-k+1)}=0$, so müßte sich in der Indexreihe nach der rechten Seite hin nothwendig ein der Einheit gleiches Glied finden, weil $\delta^{(n)} \geqq 2$ ist, und nach (65.) die Indices bloß um einzelne Einheiten zunehmen können. Also wäre in diesem Falle wieder $\delta^{(n-k)}$ nicht das erste Glied der Indexreihe, welches, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, $=1$ ist. Daß man übrigens, wenn man die Indexreihe von der rechten nach der linken Seite hin durchläuft, jederzeit auf ein der Einheit gleiches Glied treffen muß, erhellet auf der Stelle, weil das erste Glied der Indexreihe jederzeit $=0$, das letzte nach der Voraussetzung $\geqq 2$ ist, und nach (65.) die Glieder der Index-

reihe bloß um einzelne Einheiten wachsen können. Der dem Index $\delta^{(n-k)}$ vorhergehende Index $\delta^{(n-k-1)}$ kann, weil jener $= 1$ ist, bloß 0, 1 oder 2 seyn. Ist $\delta^{(n-k-1)} = 0$, so bilden die Indices

$$\delta^{(n-k-1)},\ \delta^{(n-k)},\ \delta^{(n-k+1)}$$

die Folge 012. Ist $\delta^{(n-k-1)}$ nicht $= 0$, also $= 1$ oder $= 2$, so gehen in Bezug auf die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k+1)}$ von $x = a$ bis $x = b$ respective ein oder zwei Zeichenwechsel verloren. Für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k)}$ geht, weil $\delta^{(n-k)} = 1$ ist, von $x = a$ bis $x = b$ ein Zeichenwechsel verloren, und wir wollen nun näher untersuchen, wie dieser Zeichenwechsel verloren geht. Weil $\delta^{(n-k)} = 1$ ist, so hat die Gleichung $f^{(k)}(x) = 0$ eine reelle Wurzel, die wir α nennen wollen, zwischen a und b, so daß also $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ist. Wäre zu gleicher Zeit

$$f^{(k)}(a) = 0,\ f^{(k+1)}(\alpha) = 0,$$

so hätte nach aus dem Obigen bekannten Sätzen die Gleichung

$$f^{(k)}(x) = 0$$

zwei der Größe α gleiche, folglich zwei reelle Wurzeln zwischen a und b, welches ungereimt ist, weil die Gleichung nach dem Vorhergehenden nur eine reelle Wurzel zwischen a und b hat. Es ist also $f^{(k+1)}(\alpha)$ nicht $= 0$, und für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k)}$ verschwindet also zwischen a und b ein Zeichenwechsel offenbar auf folgende Art:

$$(< \alpha) = \ldots\ldots \pm \mp$$
$$(\alpha) = \ldots\ldots \pm 0$$
$$(> \alpha) = \ldots\ldots \pm \pm$$

wie man augenblicklich findet, wenn man auf die Zeichenreihe

$$(\alpha) = \ldots\ldots \pm 0$$

die Regel des doppelten Zeichens anwendet. Sollten nun bei dem Werthe α von x auch für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k+1)}$ Zeichenwechsel verschwinden, oder für diese Functionenreihe die Zeichenreihe $(> \alpha)$ weniger Zeichenwechsel wie die Zeichenreihe $(< \alpha)$ haben, so würden bei dem Werthe α von x für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k)}$ offenbar mehr als ein Zeichenwechsel verschwinden, welches ungereimt ist, da für diese Functionenreihe in dem Intervall ab überhaupt nur ein Zeichenwechsel verschwindet, wobei man festzuhalten hat, daß, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, für dieselbe Functionenreihe in den einzelnen Zeichenreihen die Anzahl der Zeichenwechsel nie wachsen kann. Für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k+1)}$ haben also die Zeichenreihen $(< \alpha)$ und $(> \alpha)$ gleichviel Zeichenwechsel, oder in dem Intervall $< \alpha$, $> \alpha$ ist für die in Rede stehende Functionenreihe der letzte Index 0. Für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k)}$ ist dagegen der letzte Index in dem in Rede stehenden Intervall 1. Hieraus sieht man, daß sich durch hinreichend weit fortgesetzte Zertheilung des Intervalls ab in engere Intervalle immer ein innerhalb dieses Intervalls liegendes Intervall a′b′ finden lassen muß, in welchem die

beiden letzten Glieder der der Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k)}$ entsprechenden Indexreihe 01 sind, so daß also in dem Intervall a' b'

$$\delta^{(n-k-1)} = 0,\ \delta^{(n-k)} = 1$$

ist. In den beiden Intervallen aa', b'b ist offenbar $\delta^{(n-k)} = 0$; sind also in diesen beiden Intervallen die auf $\delta^{(n-k)}$ nach der rechten Seite hin folgenden Indices nicht sämmtlich $= 0$, so wird sich auf dieser Seite mindestens ein der Einheit gleicher Index finden, und also der erste Index, welcher, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, $= 1$ ist, einem Gliede der Functionenreihe angehören, welches weiter wie $f^{(k)}(x)$ nach der rechten Seite hin liegt. In dem Intervall a' b', wo

$$\delta^{(n-k-1)} = 0,\ \delta^{(n-k)} = 1$$

ist, ist entweder $\delta^{(n-k)}$ selbst der erste Index, welcher, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, $= 1$ ist, oder dieser erste Index, welcher, von der rechten nach der linken Seite hin gehend, $= 1$ ist, findet sich in der Indexreihe weiter nach der rechten Seite hin. Ist in diesem Intervall $\delta^{(n-k)}$ selbst der erste Index, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, $= 1$ ist; so ist in diesem Intervall nach dem Vorhergehenden $\delta^{(n-k+1)} = 2$, und die Indices

$$\delta^{(n-k-1)},\ \delta^{(n-k)},\ \delta^{(n-k+1)}$$

bilden also in diesem Falle in dem Intervall a' b' die Folge 012. Man kann also jetzt nach (74.) entscheiden, ob die in dem Intervall a' b' angedeuteten zwei Wurzeln der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ reell sind, oder in diesem Intervall fehlen. Haben dieselben sich als reell ausgewiesen, so sind sie, wofern sie nämlich nicht einander gleich sind, durch das a. a. O. gelehrte Verfahren zugleich durch eine gewisse Größe, die wir c' nennen wollen, getrennt, und das Intervall a' b' ist folglich in die beiden Intervalle a' c' und c' b' getheilt, deren jedes eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ enthält. In jedem dieser beiden Intervalle entspricht also dem Gliede $f^{(k-1)}(x)$ der Functionenreihe der Index 1, und es findet sich folglich in jedem dieser beiden Intervalle der erste Index, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, $= 1$ ist, eine Stelle weiter nach der rechten Hand hin wie in dem Intervalle a' b', indem in diesem Intervalle der erste Index, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, $= 1$ ist, dem Gliede $f^{(k)}(x)$ der Functionenreihe entsprach. Wie man sich zu verhalten hat, wenn die Gleichung $f^{(k-1)}(x)$ zwischen den Gränzen a' und b' zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, wird sich am besten an Beispielen zeigen lassen, wie späterhin geschehen soll. Findet man aber, daß zwischen a' und b' keine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ liegen kann, oder daß die in dem Intervall a' b' angedeuteten zwei Wurzeln dieser Gleichung in diesem Intervall fehlen, so läßt sich auf folgende Art schließen. Weil $\delta^{(n-k)} = 1$ ist, so liegt in dem Intervall a' b' eine, aber auch nur eine,

reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k)}(x) = 0$, welche wir durch α bezeichnen wollen, so daß also $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ist. Weder $f^{(k+1)}(\alpha)$, noch $f^{(k-1)}(\alpha)$, ist $= 0$, weil wir wissen, daß in dem Intervall a′ b′ weder eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k+1)}(x) = 0$, weil $\delta^{(n-k-1)} = 0$ ist, noch eine reelle Wurzel der Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$ liegen kann. Auch geht, weil $\delta^{(n-k-1)} = 0$ ist, in dem Intervall a′ b′ für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k+1)}$ überhaupt kein Zeichenwechsel verloren. Hätten nun $f^{(k+1)}(\alpha)$ und $f^{(k-1)}(\alpha)$ ungleiche Vorzeichen; so hätte man für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k-1)}$ folgende Zeichenreihen:

$$(< \alpha) = \ldots \pm \mp \mp$$
$$(\alpha) = \ldots \pm 0 \mp$$
$$(> \alpha) = \ldots \pm \pm \mp$$

woraus man sieht, daß bei dem Werthe α von x, für welchen $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ist, kein Zeichenwechsel verloren geht. Daher können unter der obigen Annahme die beiden Zeichenwechsel, welche für die Functionenreihe $f^{(n)}f^{(k-1)}$ die Zeichenreihe (b′) weniger wie die Zeichenreihe (a′) hat, offenbar nur dadurch verloren gehen, daß die Function $f^{(k-1)}(x)$ in dem Intervalle a′ b′ zwei Mal verschwindet, so daß also die Gleichung $f^{(k-1)}(x) = 0$, wenn $f^{(k+1)}(\alpha)$ und $f^{(k-1)}(\alpha)$ ungleiche Vorzeichen hätten, zwischen den Gränzen a′, b′ zwei reelle Wurzeln haben müßte, welches gegen die Voraussetzung ist. Daher müssen $f^{(k+1)}(\alpha)$ und $f^{(k-1)}(\alpha)$ gleiche Vorzeichen haben, und es ist also für jede der Functionenreihen

$$f^{(n)}f^{(k-1)},\ f^{(n)}f^{(k-2)},\ f^{(n)}f^{(k-3)},\ \ldots\ f^{(n)}f',\ f^{(n)}f$$

die Zeichenreihe (α) von der Form

$$(\alpha) = \ldots \pm 0 \pm \ldots,$$

woraus man mittelst der Regel des doppelten Zeichens

$$(< \alpha) = \ldots \pm \mp \pm \ldots$$
$$(\alpha) = \ldots \pm 0 \pm \ldots$$
$$(> \alpha) = \ldots \pm \pm \pm \ldots$$

erhält. Hieraus, verglichen mit (64. XII.), ergiebt sich nun auf der Stelle mittelst einer sehr einfachen Betrachtung, daß für jede der Gleichungen

$$f^{(k-1)}(x) = 0,\ f^{(k-2)}(x) = 0,\ f^{(k-3)}(x) = 0,\ \ldots\ f(x) = 0$$

von den in dem Intervall a′ b′ angedeuteten Wurzeln zwei Wurzeln in diesem Intervall fehlen, statt deren denn jede der obigen Gleichungen zwei imaginäre Wurzeln hat. Da in dem Intervall a′ b′ der Index $\delta^{(n-k)}$ der erste Index ist, welcher, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, $= 1$ ist; so folgen auf den Index $\delta^{(n-k+1)}$, welcher bekanntlich $= 2$ ist, in diesem Intervall nach der rechten Seite hin bloß Indices, welche $\geqq 2$ sind. Man kann also jeden der Indices

$\delta^{(n-k+1)}, \delta^{(n-k+2)}, \delta^{(n-k+3)}, \ldots\ldots \delta^{(n)}$

um zwei Einheiten vermindern, und die so erhaltenen Differenzen werden dann die Anzahl der Wurzeln der obigen Gleichungen bestimmen, über deren Natur man in dem Intervall a' b' noch in Zweifel ist. Auf diese so erhaltene neue Indexreihe wird man nun alles Obige von Neuem anwenden, und auf diese Art überhaupt immer weiter gehen können.

Ueberblickt man nun aber alles Vorhergehende nochmals im Zusammenhange; so ist klar, daß in den Intervallen, welche man durch Zertheilung des primitiven Intervalls in kleinere oder engere Intervalle erhält, bei Anwendung der obigen Regeln der erste Index, welcher von der rechten nach der linken Hand hin gehend, $= 1$ ist, immer weiter und weiter nach der rechten Seite hin rücken, und daß man also, weil man mit diesem Verfahren doch immer irgend einmal zu Ende kommen muß, auf diese Weise nach und nach in allen Fällen über die Natur aller in einem gewissen Intervall angedeuteten Wurzeln völlig in's Klare kommen wird, wobei man zugleich noch zu bemerken hat, daß sich durch das beschriebene Verfahren immer eine völlige Trennung aller ungleichen reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung wird bewirken lassen, so daß nämlich in jedem einzelnen der erhaltenen Intervalle immer nur eine solche Wurzel liegt. Dies wollen wir nun durch mehrere vollständig ausgeführte Beispiele zu erläutern suchen.

76. Wir wählen dazu zuerst die schon in (71.) behandelten Gleichungen **II.**, **III.**, **VI.**, bei denen die Natur einiger Wurzeln noch ungewiß blieb, die aber in (74.) noch nicht einer fernern Untersuchung unterworfen werden konnten.

I. Für die Gleichung

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$$

entsprachen den Gränzwerthen 1 und 10 die Zeichenreihen:

$$(1) = + + - + + -$$
$$\quad\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 3$$
$$(10) = + + + + + +$$

Suchen wir nun, von der rechten nach der linken Hand hin gehend, den ersten der Einheit gleichen Index; so finden wir, daß derselbe dem Gliede $f'''(x)$ der Functionenreihe entspricht. Weil sich ferner die Folge 012 schon findet; so können wir unmittelbar das in (73.) entwickelte Verfahren anwenden, um zu entscheiden, ob die angedeuteten zwei Wurzeln der Gleichung $f''(x) = 0$ reell sind, oder in dem obigen Intervall fehlen. Es ist nämlich

$$f''(1) = 30, \quad f'''(1) = -156;$$
$$f''(10) = 15150, f'''(15) = 5136;$$

also ist

$$\frac{f''(10)}{f'''(10)} - \frac{f''(1)}{f'''(1)} = \frac{15150}{5136} + \frac{30}{156},$$

und diese Größe folglich kleiner wie $10 - 1 = 9$. Daher bleibt die Natur der beiden Wurzeln noch unbestimmt. Um zu beurtheilen, ob die Gleichung $f''(x) = 0$ zwischen 1 und 10 vielleicht zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, muß man den größten gemeinschaftlichen Divisor von

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$$

und

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x - 144$$

suchen, denselben $= 0$ setzen, und untersuchen, ob die auf diese Weise hervorgehende Gleichung, welche nothwendig von einem niedrigern Grade wie die Gleichung $f''(x) = 0$ ist, zwischen 1 und 10 eine reelle Wurzel hat. Da dies nicht der Fall ist, so theilen wir das Intervall ferner durch 2, welches die leichteste Rechnung gewährt. Dies giebt

$$\begin{array}{rcccccc} (1) = & + & + & - & + & + & - \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (2) = & + & + & - & - & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ (10) = & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

und die Gleichung $f''(x) = 0$ hat also eine reelle Wurzel zwischen 1 und 2, eine reelle Wurzel zwischen 2 und 10. In dem Intervall zwischen 2 und 10 findet sich die Folge 012 noch nicht, weshalb man also dieses Intervall weiter durch 3 theilen wird. Dies giebt

$$\begin{array}{rcccccc} (2) = & + & + & - & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ (3) = & + & + & + & - & - & - \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ (10) = & + & + & + & + & + & + \end{array}.$$

Also liegt zwischen 3 und 10 eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung, und in dem Intervall zwischen 2 und 3 findet sich zuletzt die Folge 012. Weil nun

$$f(2) = -21,\ f'(2) = 30;$$
$$f(3) = -32,\ f'(3) = -43$$

ist; so ist

$$\frac{f(3)}{f'(3)} - \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{32}{43} + \frac{21}{30} = \frac{621}{430},$$

und diese Größe ist folglich größer als $3 - 2 = 1$. Daher fehlen die beiden zwischen 2 und 3 angedeuteten Wurzeln in diesem Intervall, und wir sind nun über die Natur aller fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung völlig im Klaren. Auch ist eine völlige Trennung aller reellen Wurzeln von einander bewirkt, wie die folgende Darstellung zeigt:

$$\begin{array}{rl}
(-10) = & + - + - + - \\
& 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
(-1) = & + - + - + + \\
& 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
(0) = & + - - + - - \\
& 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
(1) = & + + - + + - \\
& 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
(2) = & + + - - + - \\
& 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2 \\
(3) = & + + + - - - \\
& 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
(10) = & + + + + + +
\end{array}$$

eine reelle Wurzel

eine reelle Wurzel

keine Wurzel

zwei imaginäre Wurzeln

eine reelle Wurzel.

II. Für die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$$

blieb in (71.) die Natur zweier zwischen 1 und 10 angedeuteter Wurzeln noch unbestimmt. Die Indexreihen waren

$$\begin{array}{rl}
(>1) = & + + - - + \\
& 0\ 0\ 1\ 1\ 2 \\
(10) = & + + + + +\ .
\end{array}$$

Da sich die Folge 012 noch nicht findet, so theilen wir das Intervall durch 2. Dies giebt

$$(2) = + + 0 - +$$

und mittelst der Regel des doppelten Zeichens

$$\begin{array}{rl}
(>1) = & + + - - + \\
& 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
(<2) = & + + - - + \\
& 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
(>2) = & + + + - + \\
& 0\ 0\ 0\ 1\ 2 \\
(10) = & + + + + +
\end{array}$$

keine Wurzel

zwei Wurzeln noch unbestimmt.

Im letzten Intervall findet sich 012, und es ist

$$f(2) = 1,\ f'(2) = -19;$$
$$f(10) = 5993,\ f'(10) = 2797;$$

also

$$\frac{f(10)}{f'(10)} - \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{5993}{2797} + \frac{1}{19},$$

diese Größe folglich kleiner als $10 - 2 = 8$. Wir müssen also das Intervall durch 3 theilen. Dadurch erhalten wir, wenn wir zugleich die ganze hier und in (71.) geführte Rechnung zusammen fassen, folgende Darstellung:

$$
\begin{array}{rcccccl}
(<0) = & + & - & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & \text{zwei imaginäre Wurzeln} \\
(>0) = & + & - & - & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
(<1) = & + & - & - & - & + & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
(>1) = & + & + & - & - & + & \text{keine Wurzel} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
(<2) = & + & + & - & - & + & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
(>2) = & + & + & + & - & + & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \text{eine reelle Wurzel} \\
(3) = & + & + & + & - & - & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \text{eine reelle Wurzel.} \\
(10) = & + & + & + & + & + &
\end{array}
$$

III. In (71.) blieb für die Gleichung

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

die Natur zweier Wurzeln zwischen 0 und 1 und zweier Wurzeln zwischen 1 und 10 noch unbestimmt, und wir fanden folgende Zeichenreihen:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
(>0) = & + & + & - & - & - & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
(1) = & + & + & + & + & + & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
(10) = & + & + & + & + & + & + & + & + .
\end{array}
$$

Das erste Intervall durch $\frac{1}{2}$ theilend, erhalten wir

$$
\begin{array}{rcccccccc}
(>0) = & + & + & - & - & - & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
(\frac{1}{2}) = & + & + & + & - & - & - & - & + \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
(1) = & + & + & + & + & + & - & - & + .
\end{array}
$$

Im ersten Intervall findet sich 012 und es ist

$$\frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{241}{300} + \frac{5}{8},$$

diese Größe also, wie man leicht findet, größer als $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. Daher sind die beiden zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ imaginär. Vermindert man die Indices 22 beide um 2, so erhält man 00, so daß also zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ auch keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen kann, oder die in dem in Rede stehenden Intervall angedeuteten zwei Wurzeln dieser Gleichung in dem in Rede stehenden Intervall fehlen. Theilen wir nun auch das Intervall zwischen 1 und 10 durch 2, so erhalten wir

$$(1) = + + + + + - - +$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2$$
$$(2) = + + + + + + + +$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$(10) = + + + + + + + +$$

Theilen wir ferner das erste Intervall ferner durch $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; so ergiebt sich

$$(1) = + + + + + - - +$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$$
$$(\tfrac{3}{2}) = + + + + + + + -$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$$
$$(2) = + + + + + + + +$$

und es ist nun, wie folgende Darstellung zeigt, über die Natur aller Wurzeln entschieden, auch eine völlige Trennung aller reellen Wurzeln bewirkt:

$$(-10) = + - + - + - + -$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \quad \text{eine reelle Wurzel}$$
$$(-1) = + - + - + + - +$$
$$\quad\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \quad \text{keine Wurzel}$$
$$(<0) = + - - + - + - +$$
$$\quad\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2 \quad \text{zwei imaginäre Wurzeln}$$
$$(>0) = + + - - - + - +$$
$$\quad\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2 \quad \text{zwei imaginäre Wurzeln}$$
$$(\tfrac{1}{2}) = + + + - - - - +$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \quad \text{keine Wurzel}$$
$$(1) = + + + + + - - +$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \quad \text{eine reelle Wurzel}$$
$$(\tfrac{3}{2}) = + + + + + + + -$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \quad \text{eine reelle Wurzel.}$$
$$(2) = + + + + + + + +$$

IV. Die gegebene Gleichung sey ferner

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

so ist

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$
$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$
$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4$$
$$f'''(x) = 60x^2 + 24x + 6$$
$$f^{IV}(x) = 120x + 24$$
$$f^{V}(x) = 120$$

$$(-1) = + - + - + -$$
$$\quad\ 0\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3$$
$$(0) = + + + - + -$$
$$\quad\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3$$
$$(1) = + + + + + +.$$

Im ersten Intervall findet sich 012. Wir bestimmen also

$$\frac{f'''(0)}{f^{IV}(0)} - \frac{f'''(-1)}{f^{IV}(-1)} = \frac{6}{24} + \frac{42}{96},$$

und sehen folglich, daß diese Größe kleiner als $0-(-1)=1$ ist. Deshalb theilen wir, nachdem wir uns auf die gewöhnliche Art überzeugt haben, daß die Gleichung $f'''(x)=0$ zwischen -1 und 0 nicht zwei gleiche reelle Wurzeln hat, das in Rede stehende Intervall durch $-\frac{1}{2}$, und finden:

$$\begin{array}{rl} (-1) = & + - + - + - \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ (-\tfrac{1}{2}) = & + - + - + - \\ & 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2 \\ (0) = & + + + - + - . \end{array}$$

Im zweiten Intervall findet sich 012, und es ist

$$\frac{f'''(0)}{f^{IV}(0)} - \frac{f'''(-\frac{1}{2})}{f^{IV}(-\frac{1}{2})} = \frac{6}{24} + \frac{9}{36} = \frac{1}{2} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Also sind die Wurzeln der Gleichung $f'''(x)=0$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 imaginär. Durch Verminderung der Indices 2222 um 2 erhalten wir 0000. Also hat die Gleichung $f(x)=0$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 keine reelle Wurzel.

Wir nehmen nun das Intervall zwischen 0 und 1 vor. Es findet sich 012. Da ferner

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{10}{34} + \frac{2}{4} < 1 - 0$$

ist, so bleibt die Natur der beiden zwischen 0 und 1 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f'(x)=0$ noch ungewiß. Nachdem wir uns versichert haben, daß diese Gleichung zwischen 0 und 1 nicht zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat, theilen wir das Intervall durch $\frac{1}{2}$, und erhalten:

$$\begin{array}{rl} (0) = & + + + - + - \\ & 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2 \\ (\tfrac{1}{2}) = & + + + + + - \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ (1) = & + + + + + + . \end{array}$$

Also liegt eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1. Zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ findet sich 012, und es ist

$$\frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{25}{72} + \frac{2}{4} > \frac{1}{2} - 0.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung $f'(x)=0$ sind also imaginär. Durch Verminderung der Indices 22 um 2 erhalten wir 00, und schließen hieraus, daß zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ auch keine reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ liegen kann. Daß wir nun über die Natur aller Wurzeln völlig im Klaren und alle reelle Wurzeln völlig getrennt sind, zeigt folgende Darstellung:

$$\begin{array}{rl} (-1) = & + - + - + - \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array} \Big\} \text{ keine Wurzel}$$

$$\begin{array}{rl} (-\tfrac{1}{2}) = & + - + - + - \\ & 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2 \end{array} \Big\} \text{ zwei imaginäre Wurzeln}$$

$$\begin{array}{rl} (0) = & + + + - + - \\ & 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2 \end{array} \Big\} \text{ zwei imaginäre Wurzeln}$$

$$\begin{array}{rl} (\tfrac{1}{2}) = & + + + + + - \\ & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array} \Big\} \text{ eine reelle Wurzel.}$$

$$(1) = + + + + + +$$

V. Die gegebene Gleichung sey

$$x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0,$$

so ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 \\ f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1 \\ f''(x) &= 12x^2 - 6x + 8 \\ f'''(x) &= 24x - 6 \\ f^{IV}(x) &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} (-1) = & + - + - + \\ & 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (0) = & + - + + - \\ & 0\ 1\ 2\ 2\ 3 \end{array}$$

$$(1) = + + + + +.$$

Im letzten Intervall findet sich 012, und es ist

$$\frac{f''(1)}{f'''(1)} - \frac{f''(0)}{f'''(0)} = \frac{14}{18} + \frac{8}{6} > 1 - 0.$$

Also sind die beiden zwischen 0 und 1 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ imaginär. Vermindert man die Indices 223 sämmtlich um 2, so erhält man 001, und die Gleichung $f(x) = 0$ hat also eine reelle Wurzel zwischen 0 und 1. Dies giebt folgende Darstellung:

$$\begin{array}{rl} (-1) = & + - + - + \\ & 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{array} \Big\} \text{ eine reelle Wurzel}$$

$$\begin{array}{rl} (0) = & + - + + - \\ & 0\ 1\ 2\ 2\ 3 \end{array} \Big\} \text{ eine reelle Wurzel}$$

$$(1) = + + + + + \Big\} \text{ zwei imaginäre Wurzeln.}$$

Auch hier sind die reellen Wurzeln völlig von einander getrennt, da wir wissen, daß zwischen 0 und 1 nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Eben so wissen wir, daß zwischen diesen Gränzen keine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$, keine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt.

VI. Die gegebene Gleichung sey

$$x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012 = 0,$$

so ist

$$f(x) = x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012$$
$$f'(x) = 6x^5 - 60x^4 + 240x^3 + 246x + 4567$$
$$f''(x) = 30x^4 - 240x^3 + 720x^2 + 246$$
$$f'''(x) = 120x^3 - 720x^2 + 1440x$$
$$f^{iv}(x) = 360x^2 - 1440x + 1440$$
$$f^{v}(x) = 720x - 1440$$
$$f^{vi}(x) = 720$$

$(-10) =$	$+ - + - + - +$	
	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$	eine reelle Wurzel
$(-1) =$	$+ - + - + - -$	
	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0$	keine Wurzel
$(< 0) =$	$+ - + - + + -$	
	$0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2$	zwei imaginäre Wurzeln
$(> 0) =$	$+ - + + + + -$	
	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	keine Wurzel
$(1) =$	$+ - + + + + -$	
	$0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3$	drei Wurzeln, von denen eine bestimmt reell ist.
$(10) =$	$+ + + + + + +$	

In der letzten Indexreihe findet sich 012, und es ist

$$\frac{f^{iv}(10)}{f^{v}(10)} - \frac{f^{iv}(1)}{f^{v}(1)} = \frac{23040}{5760} + \frac{360}{720} < 10 - 1 .$$

die Natur der beiden zwischen 1 und 10 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f^{iv}(x) = 0$ bleibt also noch unbestimmt. Man muß nun zunächst untersuchen, ob diese Gleichung zwischen 1 und 10 vielleicht zwei einander gleiche reelle Wurzeln hat. Zu dem Ende sucht man den größten gemeinschaftlichen Divisor von

$$f^{iv}(x) = 360x^2 - 1440x + 1440 \text{ und } f^{v}(x) = 720x - 1440 .$$

Dieser größte gemeinschaftliche Divisor ist $\frac{1}{2}x - 1$. Setzt man denselben $= 0$, so erhält man die Gleichung $\frac{1}{2}x - 1 = 0$, woraus $x = 2$. Also hat die Gleichung $f^{iv}(x) = 0$ zwei reelle Wurzeln zwischen 1 und 10, die beide $= 2$ sind. Setzt man nun in der Functionenreihe $x = 2$, so erhält man

$$(2) = + 0\ 0 + + + -,$$

und mittelst der Regel des doppelten Zeichens

$$(< 2) = + - + + + + -$$
$$0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$$
$$(> 2) = + + + + + + -,$$

woraus man sieht, daß jede der Gleichungen

$$f'''(x) = 0,\ f''(x) = 0,\ f'(x) = 0,\ f(x) = 0$$

zwischen 1 und 10 zwei imaginäre Wurzeln hat, weil keine der Functionen $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ für $x = 2$ verschwindet. Man kann also wieder jeden der Indices 2223 um 2 vermindern, welches 0001 giebt, und wird hieraus zugleich sehen, wie man

sich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat. Fassen wir nun das Obige zusammen, so ergiebt sich folgende Darstellung:

$(-10) = + - + - + - +$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$	eine reelle Wurzel
$(-\ 1) = + - + - + - -$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0$	keine Wurzel
$(<\ 0) = + - + - + + -$	$0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2$	zwei imaginäre Wurzeln
$(>\ 0) = + - + + + + -$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	
$(1) = + - + + + + -$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	keine Wurzel
$(<\ 2) = + - + + + + -$	$0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$	zwei imaginäre Wurzeln
$(>\ 2) = + + + + + + -$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$	eine reelle Wurzel.
$(10) = + + + + + + +$		

VII. Für

$$x^6 - 6x^5 + x^4 + 48x^3 - 81x^2 + 54x - 81 = 0$$

ist

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + x^4 + 48x^3 - 81x^2 + 54x - 81$$
$$f'(x) = 6x^5 - 30x^4 + 4x^3 + 144x^2 - 162x + 54$$
$$f''(x) = 30x^4 - 120x^3 + 12x^2 + 288x - 162$$
$$f'''(x) = 120x^3 - 360x^2 + 24x + 288$$
$$f^{IV}(x) = 360x^2 - 720x + 24$$
$$f^{V}(x) = 720x - 720$$
$$f^{VI}(x) = 720$$

$(-10) = + - + - + - +$	$0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$	eine reelle Wurzel
$(-\ 1) = + - + - - + -$	$0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$	keine Wurzel
$(0) = + - + + - + -$	$0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2$	zwei Wurzeln von unbestimmter Beschaffenheit
$(<\ 1) = + - - + + + -$	$0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	keine Wurzel
$(>\ 1) = + + - + + + -$	$0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3$	drei Wurzeln, von denen eine bestimmt reell ist.
$(10) = + + + + + + +$		

In dem Intervall zwischen 0 und < 1 findet sich 012, und es ist

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{16}{48} + \frac{54}{162} = \frac{2}{3} < 1 - 0 .$$

Als größter gemeinschaftlicher Divisor von $f'(x)$ und $f''(x)$ ergiebt sich $x - 3$. Die Gleichung $x - 3 = 0$ hat aber keine reelle Wurzel zwischen 0 und 1. Wir theilen also das Interval durch $\frac{1}{2}$, und erhalten:

$$(0) = + - + + - + -$$
$$0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$(\tfrac{1}{2}) = + - - + - + -$$
$$0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2$$
$$(< 1) = + - - + + + - .$$

Im zweiten Intervall findet sich 012, und es ist

$$\frac{f'(1)}{f''(1)} - \frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} = \frac{16}{48} + \frac{125}{450} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18} > 1 - \frac{1}{2} .$$

Folglich sind die beiden zwischen $\frac{1}{2}$ und < 1 angedeuteten Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ imaginär. Vermindert man die Indices 22 um 2, so erhält man 00, und die Gleichung $f(x) = 0$ hat also auch keine reelle Wurzel in dem in Rede stehenden Intervall. In dem Intervall zwischen > 1 und 10 findet sich die Folge 012 auch, und es ist

$$\frac{f'''(10)}{f^{IV}(10)} - \frac{f'''(1)}{f^{IV}(1)} = \frac{84528}{28824} + \frac{72}{336} < 10 - 1 .$$

Zwei gleiche reelle Wurzeln hat die Gleichung $f'''(x) = 0$ in dem in Rede stehenden Intervall nicht. Theilen wir selbiges also durch 2, so erhalten wir

$$(> 1) = + + - + + + -$$
$$0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0$$
$$(2) = + + + - - + -$$
$$0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2$$
$$(10) = + + + + + + + .$$

Im letztern Intervall findet sich die Folge 012 nicht, und wir theilen dasselbe also durch 3. Dies giebt

$$(3) = + + + + 0\ 0\ 0 ,$$

woraus man sieht, daß die Gleichung $f(x) = 0$ drei gleiche reelle Wurzeln hat, deren jede $= 3$ ist, weil nämlich $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ für $x = 3$ sämmtlich verschwinden. Stellen wir alles Obige zusammen, so erhalten wir:

$$
\begin{array}{rl}
(-10) = & + - + - + - + \\
& 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
(-\ 1) = & + - + - - + - \\
& 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
(0) = & + - + + - + - \\
& 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
(\tfrac{1}{2}) = & + - - + - + - \\
& 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2 \\
(< 1) = & + - - + + + - \\
& 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
(> 1) = & + + - + + + - \\
& 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
(2) = & + + + - - + - \\
& 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
(< 3) = & + + + + - + - \\
(3) = & + + + + 0\ 0\ 0 \\
(> 3) = & + + + + + + + \\
& 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
(10) = & + + + + + + +
\end{array}
$$

eine reelle Wurzel

keine Wurzel

zwei imaginäre Wurzeln

keine Wurzel

drei reelle Wurzeln, jede = 3

keine Wurzel.

77. Durch Erfindung der vorhergehenden trefflichen Methode zur Unterscheidung der reellen und imaginären Wurzeln der Gleichungen hat sich Fourier unstreitig ein großes Verdienst um die Auflösung der numerischen Gleichungen erworben, und wir glauben nicht, daß sich diese Unterscheidung überhaupt auf eine einfachere Weise bewirken läßt. Indeß hat Cauchy eine Methode angegeben, die uns namentlich in theoretischer Rücksicht bemerkenswerth scheint, und daher hier in der Kürze noch mitgetheilt werden soll, wobei indeß bemerkt seyn mag, daß Leser, die es vorziehen möchten, zunächst bloß Fouriers Untersuchungen über die Auflösung der numerischen Gleichungen im Zusammenhange und ohne Unterbrechung kennen zu lernen, jetzt auch unmittelbar zu (83.) übergehen können. Die Methode von Cauchy, welche, wie wir nachher sehen werden, zugleich zu einer sehr einfachen Methode zur annähernden Berechnung der reellen Wurzeln selbst führt, ist bloß auf Gleichungen mit lauter ungleichen Wurzeln anwendbar. Ist also die Gleichung $f(x) = 0$ gegeben, so sucht man den größten gemeinschaftlichen Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$, dividirt mit demselben in $f(x$ hinein, und setzt den Quotienten, welchen wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, $= 0$; so ist

$$\varphi(x) = 0$$

eine Gleichung, welche alle ungleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, aber jede nur ein Mal, enthält. Bestimmt man nun alle reellen Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, so hat man auch alle reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und wird nun auch immer leicht ermitteln können, wie oft letztere Gleichung jede dieser Wurzeln enthält. Im Folgenden wollen wir nun im-

mer voraussetzen, daß die Gleichung $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln enthält.

78. In (12.) ist bewiesen worden, daß jede Gleichung von der Form

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x - a_n = 0,$$

wo $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sämmtlich reelle positive Größen sind, jederzeit eine, aber auch nur eine, reelle positive Wurzel hat. In allen Fällen mit Leichtigkeit eine Größe angeben zu können, welche von dieser reellen positiven Wurzel der obigen Gleichung nicht überstiegen werden kann, ist ein Hauptmoment bei Cauchy's Auflösungsmethode der numerischen Gleichungen. Man gelangt dazu sehr leicht auf eine der beiden folgenden Arten.

Die reelle positive Wurzel, welche die obige Gleichung jederzeit haben muß, sey x selbst; so ist

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

Ist nun a die größte unter den Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; so ist

$$x^n \leqq a(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}),$$

d. i. nach der bekannten Summation der gewöhnlichen geometrischen Reihe

$$x^n \leqq a \frac{x^n - 1}{x - 1} .$$

Ist nun $x > 1$, so sind die Größen $x - 1$ und $x^n - 1$ beide positiv, und es ist folglich

$$x - 1 \leqq a \frac{x^n - 1}{x^n} ,$$

d. i. immer

$$x - 1 < a, \quad x < a + 1 .$$

Wenn $x \leqq 1$ ist, so versteht sich von selbst, daß $x < a + 1$ ist. Daher ist immer $x < a + 1$, und es kann folglich eine Größe, welche von der reellen positiven Wurzel unserer Gleichung nicht überstiegen wird, jederzeit leicht gefunden werden. Eine solche Größe bietet nämlich immer die größte unter den Größen

$$a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots a_{n-1} + 1, a_n + 1$$

dar.

Man kann eine solche Größe aber auch noch auf folgende Art finden. Weil nämlich

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

ist; so ist

$$1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} .$$

Folglich sind die Brüche

$$\frac{a_1}{x}, \frac{a_2}{x^2}, \ldots \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \frac{a_n}{x^n}$$

entweder sämmtlich unter einander und dem Bruche $\frac{1}{n}$ gleich, oder diese Brüche sind theils kleiner, theils größer wie der Bruch $\frac{1}{n}$, weil sie natürlich weder sämmtlich größer, noch sämmtlich kleiner wie dieser Bruch seyn können, indem ihre Summe im ersten Falle offenbar größer, im zweiten kleiner als die Einheit seyn würde. Also sind die Brüche

$$\frac{na_1}{x}, \frac{na_2}{x^2}, \ldots \frac{na_{n-1}}{x^{n-1}}, \frac{na_n}{x^n}$$

entweder sämmtlich unter einander und der Einheit gleich, oder diese Brüche sind theils größer, theils kleiner als die Einheit. Folglich sind offenbar auch die Größen

$$\frac{na_1}{x} = \frac{na_1}{x},$$

$$\left(\frac{na_2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(na_2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

$$\left(\frac{na_3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(na_3)^{\frac{1}{3}}}{x},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{na_{n-1}}{x^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{(na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{x},$$

$$\left(\frac{na_n}{x}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(na_n)^{\frac{1}{n}}}{x}$$

entweder sämmtlich unter einander und der Einheit gleich, oder diese Größen sind theils größer, theils kleiner als die Einheit. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß x jederzeit eine Mittelgröße zwischen den Größen

$$na_1, (na_2)^{\frac{1}{2}}, (na_3)^{\frac{1}{3}}, \ldots (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, (na_n)^{\frac{1}{n}},$$

also nie größer wie die größte unter diesen Größen ist, so daß sich also auch auf diese Weise immer leicht eine Größe finden läßt, welche von der positiven reellen Wurzel, welche die obige Gleichung jederzeit haben muß, nicht überstiegen wird.

79. Sey nun wieder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

die aufzulösende Gleichung, wo aber angenommen wird, daß die Coefficienten A, B, C, ... L, N sämmtlich reell, die Wurzeln a, b, c, d, ... i, k sämmtlich unter einander ungleich sind. Die positiven Werthe der Coefficienten

$$A, B, C, \ldots L, N$$

sollen respective durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$$

bezeichnet werden. Da die Coefficienten nach der Voraussetzung sämmtlich reelle Größen sind; so sind

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$$

als ihre respectiven Moduli zu betrachten. Eine beliebige reelle oder imaginäre Wurzel der gegebenen Gleichung sey nun

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

und r sey der Modulus derselben; so sind, wie aus dem in (6.) bewiesenen Satze auf der Stelle folgt, die Moduli der Größen

$$x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots x$$

respective

$$r^n, r^{n-1}, r^{n-2}, \ldots r$$

Die Moduli der Größen

$$x^n, Ax^{n-1}, Bx^{n-2}, \ldots Lx, N$$

sind also nach demselben Satze

$$r^n, a_1 r^{n-1}, a_2 r^{n-2}, \ldots a_{n-1} r, a_n .$$

Nach dem in (7.) bewiesenen Satze ist folglich der Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

eben so groß oder kleiner wie die Größe

$$a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n .$$

Bezeichnen wir also den Modulus der Größe

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

durch R_1; so ist

$$R_1 \leqq a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n .$$

Nach dem in (7.) bewiesenen Satze ist der Modulus der Größe

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N ,$$

welchen wir durch R bezeichnen wollen, eine Mittelgröße zwischen

$$r^n - R_1 \text{ und } r^n + R_1 ,$$

d. i. in bekannter Bezeichnung

$$R = M(r^n - R_1, r^n + R_1) .$$

Weil nun aber nach dem Vorhergehenden

$$r^n - R_1 \gtreqless r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n ,$$

$$r^n + R_1 \lesseqgtr r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

ist; so ist natürlich der Modulus R immer auch eine Mittelgröße zwischen

$$r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n ,$$

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n ;$$

also immer

$$R \gtreqless r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n .$$

Weil aber $x = p + q\sqrt{-1}$ nach der Voraussetzung eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, so ist natürlich der Modulus $R = 0$, und folglich

$$0 \gtreqless r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n .$$

Die Gleichung

$$\xi^n - a_1 \xi^{n-1} - a_2 \xi^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\xi - a_n = 0$$

hat, wie wir wissen, immer eine reelle positive Wurzel, welche ξ selbst seyn mag. Daher ist

$$\xi^n - a_1 \xi^{n-1} - a_2 \xi^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\xi - a_n$$
$$\gtreqless r^n - a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} - \ldots - a_{n-1} r - a_n ,$$

oder

$$\xi^n \left\{1 - \frac{a_1}{\xi} - \frac{a_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{\xi^{n-1}} - \frac{a_n}{\xi^n}\right\}$$
$$\gtreqless r^n \left\{1 - \frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{a_n}{r^n}\right\} .$$

Wäre nun $r > \xi$, so wäre, wobei der Artikel Ungleich zu vergleichen, offenbar

$$1 - \frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \ldots - \frac{a_n}{r^n} > 1 - \frac{a_1}{\xi} - \frac{a_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{a_n}{\xi^n} ,$$

und auch $r_n > \xi_n$; also, weil r^n und ξ^n positiv sind,

$$r^n\left(1 - \frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \ldots - \frac{a_n}{r^n}\right) > \xi^n\left(1 - \frac{a_1}{\xi} - \frac{a_2}{\xi^2} - \ldots - \frac{a_n}{\xi^n}\right),$$

welches gegen das Vorhergehende streitet. Daher ist r nicht größer als ξ, und folglich

$$r \lesseqgtr \xi .$$

Man sieht also, daß kein Modulus einer Wurzel unserer gegebenen Gleichung größer als die reelle positive Wurzel ξ der Gleichung

$$\xi^n = a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n$$

seyn kann. Nach (78.) ist aber ξ weder größer als die größte unter den Größen

$$a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots a_{n-1} + 1, a_n + 1 ,$$

noch größer als die größte unter den Größen

$$na_1, (na_2)^{\frac{1}{2}}, (na_3)^{\frac{1}{3}}, \ldots (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, (na_n)^{\frac{1}{n}} ;$$

also ist auch kein Modulus einer Wurzel unserer gegebenen Gleichung größer als die größte unter den Größen

$$a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots a_{n-1} + 1, a_n + 1 ,$$

so wie auch kein Modulus einer Wurzel der gegebenen Gleichung größer als die größte unter den Größen

$$na_1, (na_2)^{\frac{1}{2}}, (na_3)^{\frac{1}{3}}, \ldots (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, (na_n)^{\frac{1}{n}}$$

ist, und daher immer leicht eine Größe angegeben werden kann, welche größer ist als alle Moduli der Wurzeln der gegebenen Gleichung. Eine solche Größe wollen wir im Folgenden durch ϱ bezeichnen. Ueberhaupt braucht man ϱ nur größer zu nehmen als die positive Wurzel ξ der Gleichung

$$\xi^n = a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n ,$$

eine Bedingung, der man, wenn auf keine andere Art, jederzeit nach den obigen allgemeinen Regeln genügen kann.

Nach dem in (7.) bewiesenen Lehrsatze ist nun der Modulus jeder der Differenzen

$$\begin{aligned} &a-b,\ a-c,\ a-d,\ \ldots\ a-i,\ a-k\ ;\\ &\qquad b-c,\ b-d,\ \ldots\ b-i,\ b-k\ ;\\ &\qquad\qquad c-d,\ \ldots\ c-i,\ c-k\ ;\\ &\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad h-i,\ h-k\ ;\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad i-k\ ; \end{aligned}$$

deren Anzahl $= \frac{n(n-1)}{2}$ ist, kleiner als 2ϱ. Also ist nach dem in (6.) bewiesenen Lehrsatze der Modulus des Products der obigen Differenzen mit Uebergehung einer beliebigen derselben, die etwa die Differenz $a-b$ seyn mag, jederzeit kleiner als die Größe

$$(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} .$$

Das Product der Quadrate aller obigen Differenzen, welches wir durch $\mathfrak{N}^2$ bezeichnen wollen, so daß $\mathfrak{N}$ eine positive Größe bezeichnet, läßt sich aber, wie wir in (45.) gesehen haben, immer leicht aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung finden, ohne die Wurzeln selbst zu kennen, und kann daher immer als eine gegebene Größe angesehen werden. $\mathfrak{N}$ ist aber in diesem Falle, wo alle Coefficienten der gegebenen Gleichung reelle Größen sind, und daher $\mathfrak{N}$ selbst eine reelle Größe ist, die wir zugleich vorher als positiv angenommen haben, das Product der Moduli aller obigen Differenzen, wie Jedem, der alles Vorhergehende, namentlich die in (8.) — (32.) gelieferte allgemeine Theorie der Gleichungen, gehörig aufgefaßt und verstanden hat, auf der Stelle einleuchten wird, und daher hier der Kürze wegen nicht weiter erläutert werden soll. Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\mathfrak{N}}{\mathrm{Mod}(a-b)} < (2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} ;$$

also

$$\mathrm{Mod}(a-b) > \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}} ,$$

so daß also, wenn wir der Kürze wegen

$$\Delta = \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

setzen, die bekannte positive Größe Δ, welche, weil alle Wurzeln als ungleich angenommen werden, nicht $= 0$ ist, kleiner als der Modulus jeder der obigen Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung, also natürlich auch kleiner als der absolute Werth jeder Differenz zweier reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, oder kleiner als die kleinste Differenz zwischen zwei reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung ist, immer bloß in Bezug auf die absoluten Werthe der Differenzen der reellen Wurzeln.

Sind alle Coefficienten der gegebenen Gleichung ganze Zahlen, so ist, wie schon in (45.) gezeigt worden ist, $\mathfrak{N} \geqq 1$, und man kann folglich in diesem Falle, weil

$$\frac{1}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}} \leqq \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

ist, offenbar immer auch

$$\Delta = \frac{1}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

setzen, weil auch dieser Werth von Δ unter der gemachten Voraussetzung den obigen Bedingungen genügt.

Hat man nun den Werth von Δ auf die obige Weise berechnet, so läßt sich zuvörderst immer mit Leichtigkeit völlig bestimmt angeben, ob die gegebene Gleichung reelle Wurzeln, und wie viele solche Wurzeln sie hat. Ist nämlich $\mathfrak{m}$ die ganze Zahl, welche $= \frac{\varrho}{\Delta}$ oder zunächst größer als dieser Bruch ist, so ist

$$\mathfrak{m}\Delta \geqq \varrho .$$

Nach dem Obigen ist aber ϱ größer als der positive Werth jeder reellen Wurzel. Folglich ist auch $\mathfrak{m}\Delta$ größer als der positive Werth jeder reellen Wurzel, und es liegen folglich alle reelle Wurzeln offenbar zwischen $-\mathfrak{m}\Delta$ und $+\mathfrak{m}\Delta$. Da ferner Δ kleiner als der positive Werth der Differenz zwischen jeden zwei reellen Wurzeln ist, so ist klar, daß zwischen jeden zwei Gliedern der Reihe

$$-\mathfrak{m}\Delta, -(\mathfrak{m}-1)\Delta, \ldots -3\Delta, -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots \ldots (\mathfrak{m}-1)\Delta, \mathfrak{m}\Delta$$

höchstens eine reelle Wurzel unserer Gleichung liegen kann.

Nun wollen wir annehmen, daß Δ' und Δ'' überhaupt zwei auf einander folgende Glieder der obigen Reihe seyen, zwischen denen die reelle Wurzel α der gegebenen Gleichung

$$f(x) = 0$$

liegt. Die übrigen reellen Wurzeln dieser Gleichung seyen β, γ, δ, ...; so ist, wenn wir das Product aller imaginären einfachen Factoren der Function $f(x)$ durch $\varphi(x)$ bezeichnen, und dabei zugleich bemerken, daß alle Wurzeln der gegebenen Gleichung als unter einander ungleich angenommen werden,

$$f(x) = \varphi(x).(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.$$

Die Größe $\varphi(x)$ ist bekanntlich immer von der Form

$$\varphi(x) = (x-p-q\sqrt{-1})(x-p+q\sqrt{-1})(x-p'-q'\sqrt{-1})(x-p'+q'\sqrt{-1})\ldots.$$
$$= \{(x-p)^2 + q^2\}\{(x-p')^2 + q'^2\}\ldots.$$

und also stets eine positive Größe. Setzt man nun Δ' und Δ'' für x, so ergiebt sich

$$f(\Delta') = \varphi(\Delta').(\Delta'-\alpha)(\Delta'-\beta)(\Delta'-\gamma)\ldots.,$$
$$f(\Delta'') = \varphi(\Delta'').(\Delta''-\alpha)(\Delta''-\beta)(\Delta''-\gamma)\ldots.,$$

wo also auch $\varphi(\Delta')$ und $\varphi(\Delta'')$ positive Größen sind. Da α zwischen Δ' und Δ'' liegt, so haben die Differenzen

$$\Delta' - \alpha \text{ und } \Delta'' - \alpha$$

offenbar entgegengesetzte Vorzeichen. Zwischen Δ' und Δ'' liegt aber nach dem Obigen bloß die eine reelle Wurzel α, und es liegt folglich keine der andern reellen Wurzeln β, γ, δ, ... zwischen Δ' und Δ'', woraus auf der Stelle folgt, daß je zwei neben einander stehende der Differenzen

$$\Delta' - \beta,\ \Delta'' - \beta;$$
$$\Delta' - \gamma,\ \Delta'' - \gamma;$$
$$\Delta' - \delta,\ \Delta'' - \delta;$$
$$\text{u. s. w.}\quad \text{u. s. w.}$$

gleiche Vorzeichen haben. Hieraus folgt, daß $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ ungleiche Vorzeichen haben, woraus sich folgender Satz ergiebt:

Wenn zwischen zwei beliebigen auf einander folgenden Gliedern Δ' und Δ'' der Reihe

$$-m\Delta,\ -(m-1)\Delta,\ \ldots\ -\Delta,\ 0,\ \Delta,\ \ldots\ (m-1)\Delta,\ m\Delta$$

eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ liegt; so haben die entsprechenden Werthe $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ der Function $f(x)$ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen.

Haben also $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ gleiche Vorzeichen, so kann zwischen Δ' und Δ'' keine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegen.

Haben aber $f(\Delta')$ und $f(\Delta'')$ entgegengesetzte Vorzeichen, so liegt nach dem in (9.) bewiesenen Satze zwischen Δ' und Δ'' jederzeit eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung.

Aus allem Bisherigen ergiebt sich nun in völliger Strenge der folgende Lehrsatz:

Die gegebene Gleichung

$$f(x) = 0$$

hat jederzeit gerade eben so viele reelle Wurzeln, wie die Reihe

$$f(-m\Delta), f(-(m-1)\Delta) \ldots f(-3\Delta), f(-2\Delta) f(-\Delta),$$
$$f(0), f(\Delta), f(2\Delta), f(3\Delta), \ldots f((m-1)\Delta), f(m\Delta)$$

Zeichenwechsel darbietet.

Hiernach kann man also immer die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung sicher bestimmen, und zugleich ergiebt sich auch aus dem Obigen unmittelbar, zwischen welchen Gränzen man die reellen Wurzeln zu suchen hat. Kaum verdient es wohl noch eine besondere Erwähnung, daß, wenn ein Glied der vorhergehenden Reihe, z. B. überhaupt $f(\Delta')$, verschwindet, Δ' selbst eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Mehr über diesen speciellen Fall zu sagen wird hier nicht nöthig seyn.

Nun kann man auch leicht alle reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen. Sind nämlich x_1 und $x_2 = x_1 + \Delta$ zwei auf einander folgende Glieder der Reihe

$$-m\Delta, -(m-1)\Delta, \ldots -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, \ldots (m-1)\Delta, m\Delta,$$

für welche $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; so liegt zwischen x_1 und x_2, wie wir wissen, eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung, und der Unterschied dieser beiden Gränzen der Wurzel ist jetzt $= \Delta$. Man setze nun

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Haben jetzt $f(\xi)$ und $f(x_2)$ gleiche Vorzeichen, so haben $f(x_1)$ und $f(\xi)$ ungleiche Vorzeichen, und die in Rede stehende reelle Wurzel liegt also zwischen x_1 und ξ. Haben dagegen $f(\xi)$ und $f(x_2)$ ungleiche Vorzeichen, so liegt die gesuchte reelle Wurzel zwischen ξ und x_2. Hieraus sieht man, daß sich immer zwei Gränzen x_1 und ξ oder ξ und x_2 der gesuchten Wurzel angeben lassen, deren Unterschied nur $\frac{1}{2}\Delta$ beträgt, und daß man also, wenn man ganz dasselbe Verfahren beliebig oft wiederholt, eine Reihe von Gränzen der gesuchten Wurzel angeben kann, deren Unterschiede die geometrische Progression

$$\Delta, \tfrac{1}{2}\Delta, \tfrac{1}{4}\Delta, \tfrac{1}{8}\Delta, \tfrac{1}{16}\Delta, \ldots.$$

bilden, so daß man also offenbar die beiden Gränzen der gesuchten Wurzel einander beliebig nahe bringen, die Wurzel folglich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit finden, und, wie leicht erhellet, auch in jedem Falle den Grad der erreichten Genauigkeit bestimmt angeben kann.

Noch bemerken wir, daß man, wie aus dem Obigen sich auf der Stelle ergiebt, ohne daß die obigen Schlüsse die geringste

Aenderung zu erleiden brauchen, für Δ auch jeden Werth setzen kann, welcher kleiner ist, als der aus der Formel

$$\Delta = \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}} - 1} \text{ oder } \Delta = \frac{1}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}} - 1}$$

gezogene Werth von Δ, wobei man nie aus den Augen verlieren darf, daß die letztere Formel immer dem Falle entspricht, wenn alle Coefficienten der gegebenen Gleichung ganze Zahlen sind.

80. Wir wissen aus dem Vorhergehenden, daß es bei der Auflösung der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ zunächst vorzüglich darauf ankommt, eine Größe ϱ zu finden, welche größer als die positive Wurzel ξ der Gleichung

$$\xi^n = a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n$$

ist, und es sind auch allgemeine Regeln gegeben worden, nach denen die Größe ϱ immer auf die verlangte Art bestimmt werden kann. Die zweite der oben zur Bestimmung von ϱ gegebenen Methoden ist indeß noch einer Modification fähig, welche in manchen Fällen von Nutzen seyn kann. Sind nämlich

$$a_r \xi^{n-r} \text{ und } a_s \xi^{n-s}$$

das kleinste und größte unter den Gliedern des Polynoms

$$a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n ,$$

welche nicht $= 0$ sind, und bezeichnet k die Anzahl dieser nicht verschwindenden Glieder; so ist offenbar ξ^n eine Mittelgröße zwischen

$$k a_r \xi^{n-r} \text{ und } k a_s \xi^{n-s} ,$$

so daß nämlich, ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\xi^n \gtreqless k a_r \xi^{n-r}, \quad \xi^n \lesseqgtr k a_s \xi^{n-s} ;$$

folglich auch, immer ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$\xi^r \gtreqless k a_r, \quad \xi^s \lesseqgtr k a_s ;$$

$$\xi \gtreqless (k a_r)^{\frac{1}{r}}, \quad \xi \lesseqgtr (k a_s)^{\frac{1}{s}}$$

ist. Also ist ξ eine Mittelgröße zwischen

$$(k a_r)^{\frac{1}{r}} \text{ und } (k a_s)^{\frac{1}{s}} .$$

Diese Größen kommen aber unter den nicht verschwindenden Gliedern der Reihe

$$k a_1, (k a_2)^{\frac{1}{2}}, (k a_3)^{\frac{1}{3}}, (k a_4)^{\frac{1}{4}}, \ldots (k a_n)^{\frac{1}{n}}$$

offenbar vor. Also ist, wobei der Artikel Mittel zu vergleichen, ξ auch eine Mittelgröße zwischen den nicht verschwindenden Gliedern der Reihe

$$ka_1,\ (ka_2)^{\frac{1}{2}},\ (ka_3)^{\frac{1}{3}},\ (ka_4)^{\frac{1}{4}},\ \ldots\ (ka_n)^{\frac{1}{n}},$$

d. i. immer eine Mittelgröße zwischen dem kleinsten und größten nicht verschwindenden Gliede dieser Reihe.

81. Das Vorhergehende wollen wir nun auf die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

anwenden. In diesem Falle ist

$$n = 3,\ \frac{n(n-1)}{2} = 3.$$

Ferner haben wir

$$\xi^3 = 2\xi + 5$$

und folglich

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ k = 2,$$

wo k dieselbe Bedeutung wie in (80.) hat. Nach (80.) ist also ξ eine Mittelgröße zwischen

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \text{ und } 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}.$$

Wir müssen also $\varrho > \sqrt[3]{10}$ setzen. Sind a, b, c die drei Wurzeln unserer Gleichung, so ist nach (44.)

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = 4.8 - 27.25 = -643.$$

Also ist $\mathfrak{N}^2 = 643$, $\mathfrak{N} = \sqrt{643}$. Setzen wir nun, weil $\sqrt[3]{10}$ 2, 15.. ist, $\varrho = 2,2$; so ist

$$\frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}} = \frac{\sqrt{643}}{(4,4)^2} > \frac{25}{19} > 1.$$

Daher können wir nach (79.) $\Delta = 1$ setzen, und die ganze Zahl m, welche zunächst größer als $\frac{\varrho}{\Delta}$ ist, ist also $= 3$. Folglich sind nach (79.)

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

die Gränzen der sämmtlichen reellen Wurzeln unserer Gleichung. Führt man diese Gränzen für x in die Function

$$x^3 - 2x - 5$$

unserer Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -27 + 6 - 5 &= -26 \\ -8 + 4 - 5 &= -9 \\ -1 + 2 - 5 &= -4 \\ 0 + 0 - 5 &= -5 \\ 1 - 2 - 5 &= -6 \\ 8 - 4 - 5 &= -1 \\ 27 - 6 - 5 &= +16. \end{aligned}$$

Da nun in der Reihe

$$-26, -9, -4, -5, -6, -1, +16$$

nur ein Zeichenwechsel vorkommt, so hat unsere Gleichung auch bloß eine reelle Wurzel zwischen den Gränzen 2 und 3. Dies stimmt ganz mit dem, was in (71. V.) und (74. II.) gefunden worden ist, überein. Nur sind die hier für die reelle Wurzel gefundenen Gränzen schon weit enger als die in (71. V.) angegebenen.

Um engere Gränzen für diese reelle Wurzel zu finden, müssen wir nun das in (79.) gelehrte Verfahren anwenden. Setzen wir daher, die dortige Bezeichnung beibehaltend,

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3;$$

so ist

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,5.$$

Setzen wir diesen Werth von ξ für x in die Function unserer Gleichung, so wird dieselbe

$$15,625 - 5,0 - 5 = +\ 5,625.$$

Da diese Größe positiv ist, so liegt die reelle Wurzel unserer Gleichung zwischen 2 und 2,5. Setzen wir also

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,5;$$

so wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,25.$$

Setzt man diesen Werth von ξ für x in die Function unserer Gleichung; so wird dieselbe

$$11,390625 - 4,50 - 5 = +\ 1,890625$$

d. i. wieder positiv. Folglich liegt die reelle Wurzel unserer Gleichung zwischen 2 und 2,25. Setzen wir folglich

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,25;$$

so wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,125.$$

Setzt man diesen Werth von ξ für x in die Function unserer Gleichung; so wird dieselbe, wenn wir alle Decimalbrüche bei der sechsten Decimalstelle abbrechen,

$$9,595703 - 4,250 - 5 = +\ 0,345703$$

d. i. wieder positiv. Also liegt die reelle Wurzel unserer Gleichung zwischen 2 und 2,125. Setzen wir also wieder

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,125;$$

so wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,0625.$$

Führt man diesen Werth von ξ für x in die Function der Gleichung ein, so wird dieselbe

$$8,773682 - 4,1250 - 5 = -0,351318$$

d. i. negativ. Folglich liegt die gesuchte reelle Wurzel zwischen 2,0625 und 2,125. Setzen wir also

$$x_1 = 2,0625,\ x_2 = 2,125\ ;$$

so wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,09375\ .$$

Führt man diesen Werth von ξ wieder für x in die Function der Gleichung ein, so erhält dieselbe einen negativen Werth, und die reelle Wurzel der Gleichung liegt also zwischen 2,09375 und 2,125. Setzen wir folglich

$$x_1 = 2,09375,\ x_2 = 2,125\ ;$$

so ist

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,109375\ .$$

Führt man diese Größe für x in die Function der Gleichung ein, so erhält dieselbe einen positiven Werth. Also liegt die gesuchte reelle Wurzel zwischen 2,09375 und 2,109375. Setzen wir folglich

$$x_1 = 2,09375,\ x_2 = 2,109375\ ;$$

so wird

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,1015625\ .$$

Als die folgenden Gränzen der gesuchten reellen Wurzel findet man

$$x_1 = 2,09375,\ x_2 = 2,1015625\ .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Die Differenzen der Gränzen der Wurzel sind

1,
0,5
0,25
0,125
0,0625
0,03125
0,015625
0,0078125,

woraus man sieht, daß die Gränzen, wie es seyn muß, sich zwar immer mehr und mehr, in diesem Falle aber doch nur langsam, nähern. Man muß die obige Rechnung noch ziemlich weit fortführen, wenn man die Wurzel bis zur siebenten, selbst schon bis zur fünften, Decimalstelle genau finden will. Die Beurtheilung der Vorzeichen der Werthe der Function der gegebenen Gleichung macht die obige Rechnung besonders langweilig. Dieselbe wird jedoch in dem vorliegenden Falle sehr erleichtert und abgekürzt, wenn man möglichst weit gehende Tafeln der Cubikzahlen zur Hand

hat. Die successive Berechnung der Gränz- oder Näherungswerthe selbst hat nicht die mindeste Schwierigkeit. Daß man durch obiges Verfahren in allen Fällen völlig sicher und ohne alles Probiren zum Zwecke gelangt, ist ein Hauptvorzug desselben vor allen ältern Methoden. Auch kann man mittelst desselben immer mit völliger Bestimmtheit über die Anzahl der reellen, folglich auch der imaginären, Wurzeln der gegebenen Gleichung urtheilen, welches ebenfalls ein sehr wesentlicher Vorzug dieses Verfahrens, das wir nun noch auf ein anderes Beispiel anwenden wollen, vor allen ältern Methoden ist. Daß Fouriers schöne Methode dasselbe, und meistens auf weit kürzerem Wege, leistet, versteht sich von selbst.

82. Wir wollen nun auch noch die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

betrachten. Für diese Gleichung ist

$$n = 3, \quad \frac{n(n-1)}{2} = 3 .$$

Ferner ist

$$\xi^3 = 7\xi + 7$$

und folglich

$$a_1 = 0, \; a_2 = 7, \; a_3 = 7, \; k = 2 .$$

Sind a, b, c die drei Wurzeln unserer Gleichung, so ist nach (44.)

$$(a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 = 4.343 - 27.49 = 49 .$$

Also ist

$$\mathfrak{N}^2 = 49, \; \mathfrak{N} = 7 .$$

Nach (80.) ist ξ eine Mittelgröße zwischen

$$14^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14} \text{ und } 14^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{14} .$$

Also muß man ϱ größer als $\sqrt{14}$ nehmen. Setzen wir nun $\varrho = 4$, so ist

$$\frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}} - 1} = \frac{\mathfrak{N}}{(2\varrho)^2} = \frac{7}{64} .$$

Folglich muß man Δ kleiner $\frac{7}{64}$ setzen. Der Leichtigkeit wegen wollen wir

$$\Delta = \tfrac{1}{10} = 0,1$$

setzen. Dann ist $m = 40$ und man muß also für x folgende Werthe setzen:

$$-4,0; \; -3,9; \; \ldots \; -0,2; \; -0,1; \; 0; \; 0,1; \; 0,2; \; \ldots \; 3,9; \; 4,0 .$$

Dadurch erhält man folgende Reihe von Gleichungen:

x	=	− 4,0	− 64,000	+	28,000	+ 7	=	− 29,000
x	=	− 3,9	− 59,310	+	27,300	+ 7	=	− 25,019
x	=	− 3,8	− 54,972	+	26,600	+ 7	=	− 21,272
x	=	− 3,7	− 50,635	+	25,900	+ 7	=	− 17,753
x	=	− 3,6	− 46,656	+	25,200	+ 7	=	− 14,456
x	=	− 3,5	− 42,875	+	24,500	+ 7	=	− 11,375
x	=	− 3,4	− 39,304	+	23,800	+ 7	=	− 8,504
x	=	− 3,3	− 35,937	+	23,100	+ 7	=	− 5,837
x	=	− 3,2	− 32,768	+	22,400	+ 7	=	− 3,368
x	=	− 3,1	− 29,791	+	21,700	+ 7	=	− 1,091
x	=	− 3,0	− 27,000	+	21,000	+ 7	=	+ 1,000
x	=	− 2,9	− 24,389	+	20,300	+ 7	=	+ 2,911
x	=	− 2,8	− 21,952	+	19,600	+ 7	=	+ 4,648
x	=	− 2,7	− 19,683	+	18,900	+ 7	=	+ 6,217
x	=	− 2,6	− 17,576	+	18,200	+ 7	=	+ 6,624
x	=	− 2,5	− 15,625	+	17,500	+ 7	=	+ 8,875
x	=	− 2,4	− 13,824	+	16,800	+ 7	=	+ 9,976
x	=	− 2,3	− 12,167	+	16,100	+ 7	=	+ 10,933
x	=	− 2,2	− 10,648	+	15,400	+ 7	=	+ 11,752
x	=	− 2,1	− 9,261	+	14,700	+ 7	=	+ 12,439
x	=	− 2,0	− 8,000	+	14,000	+ 7	=	+ 13,000
x	=	− 1,9	− 6,859	+	13,300	+ 7	=	+ 13,441
x	=	− 1,8	− 5,832	+	12,600	+ 7	=	+ 13,768
x	=	− 1,7	− 4,913	+	11,900	+ 7	=	+ 13,987
x	=	− 1,6	− 4,096	+	11,200	+ 7	=	+ 14,104
x	=	− 1,5	− 3,375	+	10,500	+ 7	=	+ 14,125
x	=	− 1,4	− 2,744	+	9,800	+ 7	=	+ 14,056
x	=	− 1,3	− 2,197	+	9,100	+ 7	=	+ 13,902
x	=	− 1,2	− 1,728	+	8,400	+ 7	=	+ 13,673
x	=	− 1,1	− 1,331	+	7,700	+ 7	=	+ 13,369
x	=	− 1,0	− 1,000	+	7,000	+ 7	=	+ 13,000
x	=	− 0,9	− 0,729	+	6,300	+ 7	=	+ 12,571
x	=	− 0,8	− 0,512	+	5,600	+ 7	=	+ 12,088
x	=	− 0,7	− 0,343	+	4,900	+ 7	=	+ 11,557
x	=	− 0,6	− 0,216	+	4,200	+ 7	=	+ 10,984
x	=	− 0,5	− 0,125	+	3,500	+ 7	=	+ 10,375
x	=	− 0,4	− 0,064	+	2,800	+ 7	=	+ 9,736
x	=	− 0,3	− 0,027	+	2,100	+ 7	=	+ 9,073
x	=	− 0,2	− 0,008	+	1,400	+ 7	=	+ 8,392
x	=	− 0,1	− 0,001	+	0,700	+ 7	=	+ 7,699
x	=	∓ 0,0	∓ 0,000	±	0,000	+ 7	=	+ 7,000
x	=	+ 0,1	+ 0,001	−	0,700	+ 7	=	+ 6,301
x	=	+ 0,2	+ 0,008	−	1,400	+ 7	=	+ 5,608
x	=	+ 0,3	+ 0,027	−	2,100	+ 7	=	+ 4,927
x	=	+ 0,4	+ 0,064	−	2,800	+ 7	=	+ 4,264
x	=	+ 0,5	+ 0,125	−	3,500	+ 7	=	+ 3,625
x	=	+ 0,6	+ 0,216	−	4,200	+ 7	=	+ 3,016
x	=	+ 0,7	+ 0,343	−	4,900	+ 7	=	+ 2,443
x	=	+ 0,8	+ 0,512	−	5,600	+ 7	=	+ 1,912
x	=	+ 0,9	+ 0,729	−	6,300	+ 7	=	+ 1,429
x	=	+ 1,0	+ 1,000	−	7,000	+ 7	=	+ 1,000
x	=	+ 1,1	+ 1,331	−	7,700	+ 7	=	+ 0,631
x	=	+ 1,2	+ 1,728	−	8,400	+ 7	=	+ 0,328
x	=	+ 1,3	+ 2,197	−	9,100	+ 7	=	+ 0,097
x	=	+ 1,4	+ 2,744	−	9,800	+ 7	=	− 0,056
x	=	+ 1,5	+ 3,375	−	10,500	+ 7	=	− 0,125
x	=	+ 1,6	+ 4,096	−	11,200	+ 7	=	− 0,104
x	=	+ 1,7	+ 4,913	−	11,900	+ 7	=	+ 0,013
x	=	+ 1,8	+ 5,832	−	12,600	+ 7	=	+ 0,232

$x = +1{,}9$	$+$	$6{,}859$	$-$	$13{,}300$	$+$	7	$=+$	$0{,}559$
$x = +2{,}0$	$+$	$8{,}000$	$-$	$14{,}000$	$+$	7	$=+$	$1{,}000$
$x = +2{,}1$	$+$	$9{,}261$	$-$	$14{,}700$	$+$	7	$=+$	$1{,}561$
$x = +2{,}2$	$+$	$10{,}648$	$-$	$15{,}400$	$+$	7	$=+$	$2{,}248$
$x = +2{,}3$	$+$	$12{,}167$	$-$	$16{,}100$	$+$	7	$=+$	$3{,}067$
$x = +2{,}4$	$+$	$13{,}824$	$-$	$16{,}800$	$+$	7	$=+$	$4{,}024$
$x = +2{,}5$	$+$	$15{,}625$	$-$	$17{,}500$	$+$	7	$=+$	$5{,}125$
$x = +2{,}6$	$+$	$17{,}576$	$-$	$18{,}200$	$+$	7	$=+$	$6{,}376$
$x = +2{,}7$	$+$	$19{,}683$	$-$	$18{,}900$	$+$	7	$=+$	$7{,}783$
$x = +2{,}8$	$+$	$21{,}952$	$-$	$19{,}600$	$+$	7	$=+$	$9{,}352$
$x = +2{,}9$	$+$	$24{,}389$	$-$	$20{,}300$	$+$	7	$=+$	$11{,}089$
$x = +3{,}0$	$+$	$27{,}000$	$-$	$21{,}000$	$+$	7	$=+$	$13{,}000$
$x = +3{,}1$	$+$	$29{,}791$	$-$	$21{,}700$	$+$	7	$=+$	$15{,}091$
$x = +3{,}2$	$+$	$32{,}768$	$-$	$22{,}400$	$+$	7	$=+$	$17{,}368$
$x = +3{,}3$	$+$	$35{,}937$	$-$	$23{,}100$	$+$	7	$=+$	$19{,}837$
$x = +3{,}4$	$+$	$39{,}304$	$-$	$23{,}800$	$+$	7	$=+$	$22{,}504$
$x = +3{,}5$	$+$	$42{,}875$	$-$	$24{,}500$	$+$	7	$=+$	$25{,}375$
$x = +3{,}6$	$+$	$46{,}656$	$-$	$25{,}200$	$+$	7	$=+$	$28{,}456$
$x = +3{,}7$	$+$	$50{,}635$	$-$	$25{,}900$	$+$	7	$=+$	$31{,}753$
$x = +3{,}8$	$+$	$54{,}872$	$-$	$26{,}600$	$+$	7	$=+$	$35{,}272$
$x = +3{,}9$	$+$	$59{,}319$	$-$	$27{,}300$	$+$	7	$=+$	$39{,}019$
$x = +4{,}0$	$+$	$64{,}000$	$-$	$28{,}000$	$+$	7	$=+$	$43{,}000$.

Aus dieser Rechnung, welche einiges Ueberflüssige enthält, hier aber absichtlich vollständig mitgetheilt worden ist, erhellet, daß unsere Gleichung drei reelle Wurzeln hat, welche zwischen folgenden Gränzen liegen, wobei die Vorzeichen der entsprechenden Werthe der Function der Gleichung, in Parentheſen eingeschlossen, beigefügt worden sind:

$$x_1 = -3{,}1\,(-);\quad x_1 = +1{,}3\,(+);\quad x_1 = +1{,}6\,(-);$$
$$x_2 = -3{,}0\,(+);\quad x_2 = +1{,}4\,(-);\quad x_2 = +1{,}7\,(+).$$

Mit dem in (74. I.) Gefundenen stimmt dies völlig überein; nur sind die hier gefundenen Gränzen der drei reellen Wurzeln schon weit enger wie die a. a. O. angegebenen Gränzen, indem durch das Obige die drei reellen Wurzeln offenbar schon bis auf 0,1 genau gefunden sind; der Fehler kann noch nicht 0,1 betragen, wenn man die Wurzeln einer ihrer Gränzen gleich setzt. Nach (26.) muß die Summe der drei Wurzeln im vorliegenden Falle $= 0$ seyn. Die Summen der Gränzen sind

$$-3{,}1 + 1{,}3 + 1{,}6 = -0{,}2;$$
$$-3{,}0 + 1{,}4 + 1{,}7 = +0{,}1.$$

Durch eine andere Verbindung der Gränzen ergiebt sich:

$$-3{,}1 + 1{,}4 + 1{,}7 = 0;$$
$$-3{,}0 + 1{,}3 + 1{,}6 = -0{,}1.$$

Wollte man also die Näherung nicht weiter treiben, so könnte man $-3{,}1$; $1{,}4$; $1{,}7$ als Wurzeln der Gleichung annehmen.

Wollte man die Näherung weiter treiben, so hätte man:

$x_1 = -3{,}1\,(-)$	$x_1 = +1{,}3\,(+)$	$x_1 = +1{,}6\,(-)$
$x_2 = -3{,}0\,(+)$	$x_2 = +1{,}4\,(-)$	$x_2 = +1{,}7\,(+)$
$x_1 + x_2 = -6{,}1$	$x_1 + x_2 = +2{,}7$	$x_1 + x_2 = +3{,}3$
$\xi = -3{,}05$,	$\xi = +1{,}35$,	$\xi = +1{,}65$.

Setzt man die gefundenen drei Werthe von ξ für x in die gegebene Gleichung, so ist der entsprechende Werth ihrer Function respective —, +, —. Also sind die folgenden einander nähern Gränzen der drei Wurzeln:

$$x_1 = -3{,}05(-) \qquad x_1 = +1{,}35(+) \qquad x_1 = +1{,}65(-)$$
$$x_2 = -3{,}00(+) \qquad x_2 = +1{,}40(-) \qquad x_2 = +1{,}70(+)$$
$$x_1 + x_2 = -6{,}05 \qquad x_1 + x_2 = +2{,}75 \qquad x_1 + x_2 = +3{,}35$$
$$\xi = -3{,}025, \qquad \xi = +1{,}375, \qquad \xi = +1{,}675.$$

Die diesen Werthen von ξ entsprechenden Vorzeichen der Function der Gleichung sind respective +, —, +. Also sind

$$x_1 = -3{,}050(-),\ x_1 = +1{,}350(+),\ x_1 = +1{,}650(-);$$
$$x_2 = -3{,}025(+),\ x_2 = +1{,}375(-),\ x_2 = +1{,}675(+)$$

die folgenden Gränzwerthe der drei Wurzeln. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, liegt deutlich vor Augen. Die Rechnung wird aber vorzüglich wegen der immer wiederkehrenden Beurtheilung, ob die den gefundenen Werthen von ξ entsprechenden Werthe der Function der Gleichung positiv oder negativ sind, sehr beschwerlich, und die Gränzen der Wurzeln nähern sich einander nur langsam, weil die Unterschiede der Gränzen die nur langsam abnehmende Reihe Δ, $\frac{1}{2}\Delta$, $\frac{1}{4}\Delta$, $\frac{1}{8}\Delta$, ... bilden. Wir wollen daher jetzt zu Fouriers trefflicher Annäherungsmethode, welche sich vorzüglich auf die in (67.) und (68.) schon bewiesenen wichtigen und merkwürdigen Lehrsätze gründet, übergehen.

F. Annähernde Berechnung der reellen Wurzeln der Gleichungen.

83. Fouriers Methode zur annähernden Berechnung der reellen Wurzeln der numerischen Gleichungen ist im Wesentlichen mit der längst bekannten Newton'schen Annäherungsmethode einerlei; indeß hat Fourier dieselbe in theoretischer und practischer Rücksicht so sehr vervollkommnet, daß man sie jetzt ganz als sein Eigenthum betrachten muß. Soll diese Methode mit Sicherheit angewandt werden, so setzt sie einige Bedingungen als erfüllt voraus, über die wir daher jetzt gleich das Nöthige beibringen wollen.

I. Man muß zwei Gränzen a, b oder ein Intervall ab kennen, für welches das letzte Glied der entsprechenden Indexreihe die Einheit ist, so daß also zwischen diesen Gränzen nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Daß sich dieser Bedingung für alle die reellen Wurzeln, welche die gegebene Gleichung nur ein Mal enthält, immer genügen läßt, ist im Vorhergehenden ausführlich gezeigt worden. Die mehr als ein Mal vorkommenden reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ erhält man durch Aufsuchung der reellen Wurzeln der Glei-

chung $\psi(x) = 0$, wo $\psi(x)$, wie schon früher, den größten gemeinschaftlichen Divisor von $f(x)$ und $f'(x)$ bezeichnet, und zu bemerken ist, daß die Gleichung $\psi(x) = 0$ jederzeit von einem niedrigern Grade wie die gegebene Gleichung ist. Enthält auch die Gleichung $\psi(x) = 0$ noch gleiche Wurzeln, so kann man von derselben offenbar auf ähnliche Weise wieder zu einer Gleichung eines niedrigern Grades übergehen, und wird so augenscheinlich nach und nach alle in der gegebenen Gleichung mehr als ein Mal vorkommende reelle Wurzeln bestimmen, auch leicht über die Anzahl, in welcher jede derselben in der gegebenen Gleichung enthalten ist, entscheiden können, wenn man nur im Besitz einer Methode zur Bestimmung der in einer Gleichung nur ein Mal vorkommenden Wurzeln ist. Wir wollen also annehmen, daß ab ein Intervall ist, in welchem nur eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung, welche wir im Folgenden immer durch α bezeichnen wollen, liegt, so daß also das letzte Glied der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe die Einheit ist.

II. Wäre $f'(\alpha) = 0$, so hätte die gegebene Gleichung mehr als eine reelle Wurzel zwischen a und b, weil sie dann mindestens zwei der reellen Größe α gleiche Wurzeln haben würde, welches ungereimt ist, da nach der Voraussetzung das letzte Glied der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe die Einheit ist. Also ist $f'(\alpha)$ nicht $= 0$, oder α ist keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$. Die beiden letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe können nach (65.) bloß 01 oder 11 seyn. Im letztern Falle wird man aber, weil α keine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ ist, durch Zertheilung des Intervalls ab immer ein engeres innerhalb ab liegendes Intervall a′b′ erhalten können, für welches die beiden Glieder der entsprechenden Indexreihe 01 sind, so daß nämlich in dem Intervall a′b′ zwar die eine zwischen a und b liegende reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, aber nicht die eine zwischen a und b liegende reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt. Im Folgenden wollen wir daher immer voraussetzen, daß die Gränzen a, b der Wurzel α der gegebenen Gleichung schon so weit zusammengezogen sind, daß die beiden letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe 01 sind, wozu wir nach dem Vorhergehenden berechtigt sind.

III. Unter dieser Voraussetzung können nach (65.) die dem letzten Gliede der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe bloß 001 oder 101 seyn. Im letztern Falle kann man aber offenbar, wenn nur $f''(\alpha)$ nicht $= 0$ ist, durch Zertheilung des Intervalls ab immer ein engeres innerhalb ab liegendes Intervall a′b′ erhalten, für welches die drei letzten Glieder der entsprechenden Indexreihe 001 sind. Wäre $f''(\alpha) = 0$, so würden die Gleichungen $f(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ zwischen a und b die gemeinschaftliche reelle Wurzel α haben. Ob dies der Fall seyn kann, wird dadurch entschieden, daß man den größten gemein-

schaftlichen Divisor $\psi_1(x)$ von $f(x)$ und $f''(x)$ sucht, und dann untersucht, ob die Gleichung $\psi_1(x) = 0$, welche jederzeit von einem niedrigern Grade wie die gegebene Gleichung seyn wird, zwischen den Gränzen a und b eine reelle Wurzel hat, und, wenn eine solche Wurzel existirt, dieselbe zugleich nach den Methoden, die wir kennen lernen werden, bestimmt, wobei man nie aus den Augen verlieren darf, daß die Gleichung $\psi_1(x) = 0$ jederzeit von einem niedrigern Grade wie die gegebene Gleichung ist, und daß man von der Gleichung $\psi_1(x) = 0$, wenn es nöthig seyn sollte, auf ähnliche Weise zu einer Gleichung eines noch niedrigern Grades übergehen, also offenbar immer zu einer Bestimmung der reellen Wurzel α gelangen kann. Wir sind daher berechtigt, im Folgenden immer vorauszusetzen, daß die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe 001 sind.

IV. Ist diese Bedingung erfüllt, so können nach (65.) die vier letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe bloß 0001 oder 1001 seyn. Im letztern Falle wird man aber wieder, wenn $f'''(\alpha)$ nicht $= 0$ ist, durch Zertheilung des Intervalls ab ein innerhalb desselben liegendes Intervall a′b′ erhalten können, für welches die vier letzten Glieder der entsprechenden Indexreihe 0001 sind, so daß wir also, da aus dem Vorhergehenden zugleich erhellet, wie man sich zu verhalten hat, wenn $f'''(\alpha) = 0$ ist, im Folgenden, wenn dies nöthig seyn sollte, auch voraussetzen können, daß die Gränzen a, b der Wurzel α schon so weit zusammengezogen sind, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe 0001 sind.

84. Sind nun die drei letzten Glieder der dem Intervall ab entsprechenden Indexreihe 001, eine Voraussetzung, die wir nach dem Vorhergehenden immer zu machen berechtigt sind; so liefert das in (67.) bewiesene Theorem auf der Stelle sich immer enger und enger zusammenziehende Gränzen für die gesuchte Wurzel α, wobei wir aber bekanntlich zwei Fälle zu unterscheiden haben.

I. Wenn nämlich

$$\begin{matrix}(a) = \ldots + + - \\ (b) = \ldots + + +\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}(a) = \ldots - - + \\ (b) = \ldots - - -\end{matrix}$$

ist; so sind, indem wir immer die untern Gränzen durch a, a′, a″, a‴, ……, die obern dagegen durch b, b′, b″, b‴, …., bezeichnen, nach (67.)

$$a = a; \qquad b = b;$$

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')}, \quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(b'')}, \quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(b''')}, \quad b^{IV} = b''' - \frac{f'(b''')}{f'(b''')};$$

u. s. w. u. s. w.

sich immer mehr und mehr nähernde Gränzen der Wurzel α.

II. Ist dagegen

$$\begin{matrix}(a) = \ldots. + - + \\ (b) = \ldots. + - -\end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix}(a) = \ldots. - + - \\ (b) = \ldots. - + +\end{matrix};$$

so sind

$$a = a, \qquad b = b;$$

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)};$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}, \quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')};$$

$$a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')}, \quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(a'')};$$

$$a^{IV} = a''' - \frac{f(a''')}{f'(a''')}, \quad b^{IV} = b''' - \frac{f(b''')}{f'(a''')};$$

u. s. w. u. s. w.

sich immer mehr und mehr nähernde Gränzen der Wurzel α.

Betrachtet man eine von zwei zusammen gehörenden Gränzen als einen Näherungswerth der gesuchten Wurzel, so ist der Fehler, welchen man begeht, jederzeit kleiner wie die Differenz, welche man erhält, wenn man die untere Gränze von der obern abzieht.

85. Die vorhergehende Näherungsmethode läßt sich aber, wie wir nun zeigen wollen, noch bedeutend vervollkommnen.

I. Dabei setzen wir voraus, daß die Gränzen a, b der Wurzel α einander schon so nahe gebracht sind, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall a b entsprechenden Indexreihe 0001 sind, eine Voraussetzung, zu welcher wir nach dem Vorhergehenden berechtigt sind.

II. Ist nun

$$\begin{matrix}(a) = \ldots. + + - \\ (b) = \ldots. + + +\end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix}(a) = \ldots. - - + \\ (b) = \ldots. - - -\end{matrix};$$

so berechnen wir bloß die obern Gränzen

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')}, \quad b''' = b'' - \frac{f(b'')}{f'(b')}, \ldots.$$

der gesuchten Wurzel α.

Ist dagegen

$$\begin{matrix}(a) = \ldots. + - + \\ (b) = \ldots. + - -\end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix}(a) = \ldots. - + - \\ (b) = \ldots. - + +\end{matrix};$$

so berechnen wir bloß die untern Gränzen

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\ a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')},\ a''' = a'' - \frac{f(a'')}{f'(a'')},\ \ldots.$$

Fassen wir dies zusammen, so finden wir, daß wir, wenn wir auf diese Art bei der Gränzenberechnung verfahren, jederzeit von derjenigen der beiden primitiven Gränzen a, b ausgehen müssen, für welche die entsprechenden Werthe von $f(x)$ und $f''(x)$ gleiche Vorzeichen haben. Wird nun diese primitive Gränze überhaupt durch γ repräsentirt, so daß also $f(\gamma)$ und $f''(\gamma)$ gleiche Vorzeichen haben; so kann die Gränzenberechnung in allen Fällen nach folgenden Formeln geführt werden:

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)},\ \gamma'' = \gamma' - \frac{f(\gamma')}{f'(\gamma')},\ \gamma''' = \gamma'' - \frac{f(\gamma'')}{f'(\gamma'')},\ \ldots.$$

und die erhaltenen Gränzen sind sämmtlich untere oder obere Gränzen der gesuchten Wurzel, je nachdem man bei der Rechnung respective von der untern oder obern primitiven Gränze ausging.

III. Durch die Berechnung nur *einer* Gränzenreihe wird allerdings die Rechnung sehr erleichtert; nur bedarf es dann aber einer besondern Methode zur sichern Beurtheilung des Grades der erreichten Genauigkeit oder des Fehlers, welchen man begeht, wenn man eine der berechneten Gränzen als einen Näherungswerth der gesuchten Wurzel betrachtet. Eine solche Methode ergiebt sich aus dem in (68.) bewiesenen Satze, dessen Anwendung gestattet ist, weil wir angenommen haben, daß die vier letzten Glieder der dem primitiven Intervall entsprechenden Indexreihe 0001 seyn sollen, eine Voraussetzung, welche bekanntlich dem in Rede stehenden Satze zum Grunde liegt. Sey nämlich wie a. a. O. $b - a = i$, und **A** bezeichne, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, die kleinere der beiden Größen $f'(a)$ und $f'(b)$, **B** dagegen die größere der beiden Größen $f''(a)$ und $f''(b)$. Ist nun

$$i \lessgtr \left(\tfrac{1}{10}\right)^m,\ \frac{B}{2A} \lessgtr \left(\tfrac{1}{10}\right)^k,$$

wo m und k gewisse positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen, die sich immer aus den bekannten Werthen von $i = b - a$ und **A**, **B** leicht bestimmen lassen; so sind nach dem in (68.) bewiesenen Satze die Fehler, welche man begeht, wenn man die Gränzwerthe

$$\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \gamma^{IV}, \gamma^{V}, \ldots.$$

als Näherungswerthe der gesuchten Wurzel α betrachtet, vom zweiten Gliede dieser Reihe an, jederzeit kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\left(\tfrac{1}{10}\right)^m, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2m+k}, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{4m+3k}, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{8m+7k}, \left(\tfrac{1}{10}\right)^{16m+15k}, \ldots.$$

Der Fehler, welchen man begeht, wenn man γ als einen Näherungswerth der gesuchten Wurzel betrachtet, ist wenigstens nicht größer als das erste Glied der vorstehenden Reihe. Auf diese Weise kann man also die Größe der in Rede stehenden Fehler beurtheilen, sieht aber zugleich, daß obige Methode nur dann

den Namen einer Annäherungsmethode verdient, wenn die Größen

$$(\tfrac{1}{10})^{m}, (\tfrac{1}{10})^{2m+k}, (\tfrac{1}{10})^{4m+3k}, (\tfrac{1}{10})^{8m+7k}, (\tfrac{1}{10})^{16m+15k}, \ldots\ldots$$

eine abnehmende, d. i. die Größen

$$m, 2m+k, 4m+3k, 8m+7k, 16m+15k, \ldots\ldots$$

eine wachsende Reihe bilden. Diese Bedingung ist jederzeit erfüllt, wenn $2m + k > m$ ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Ist nämlich $2m + k > m$, so ist $m + k > 0$, d. i. $m + k$ eine positive Größe, die nicht $= 0$ ist. Da nun

$$\begin{aligned} m &= m \\ 2m + k &= m + (m+k), \\ 4m + 3k &= 2m + k + 2(m+k), \\ 8m + 7k &= 4m + 3k + 4(m+k), \\ 16m + 15k &= 8m + 7k + 8(m+k), \\ 32m + 31k &= 16m + 15k + 16(m+k), \end{aligned}$$

u. s. w.

ist; so ist klar, daß die Reihe

$$m, 2m+k, 4m+3k, 8m+7k, 16m+15k, \ldots\ldots$$

eine wachsende Reihe ist, wenn $2m + k > m$ oder $m + k > 0$ ist. Ist aber $m \gtreqless 1 - k$, so ist $m + k \gtreqless 1$, d. i. $m + k > 0$, woraus man also sieht, daß, bevor man die obige Näherungsmethode anwendet, die primitiven Gränzen a, b der gesuchten Wurzel durch Zertheilung des Intervalls ab in engere Intervalle jederzeit so weit zusammengezogen werden müssen, daß $m \gtreqless 1 - k$ ist. Nur erst, wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man die eigentliche Näherungsrechnung nach den obigen Vorschriften beginnen, und ist dann versichert, daß die berechneten Näherungswerthe

$$\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \gamma^{IV}, \gamma^{V}, \ldots\ldots$$

respective bis zu Decimaleinheiten von der Ordnung

$$m, 2m+k, 4m+3k, 8m+7k, 16m+15k, 32m+31k, \ldots\ldots$$

genau sind, so daß man nämlich, wenn, jenachdem z. B. der Näherungswerth γ^{IV} kleiner oder größer als die gesuchte Wurzel ist, zu diesem Näherungswerthe eine Decimaleinheit der $(16m+15k)$-ten Ordnung addirt oder davon subtrahirt wird, eine Größe erhält, welche respective größer oder kleiner als die gesuchte Wurzel ist, wodurch sich dann also auch wieder zwei Gränzen ergeben, zwischen denen die gesuchte Wurzel liegt.

IV. Hierbei sind nun aber noch einige sehr wichtige Bemerkungen zu machen, wobei wir annehmen wollen, daß γ ein ganz beliebiger der nach dem Obigen berechneten Näherungswerthe der gesuchten Wurzel, d. h. ein ganz beliebiges Glied der Reihe $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \ldots\ldots$, und γ' der auf γ folgende aus der Formel

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

berechnete Näherungswerth sey. Auch sey γ wie vorher bis auf Decimaleinheiten der mten, γ' bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung richtig. Dies und alles Vorhergehende gilt bloß unter der Voraussetzung, daß der Quotient

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

in völliger Schärfe berechnet ist, eine Bedingung, der sich nur selten, wenn man nämlich, wie hier immer, diesen Quotienten in Form eines Decimalbruchs darstellt, genügen lassen wird, indem man fast immer bei einer größern oder geringern Anzahl von Decimalziffern wird stehen bleiben müssen, so daß wir also jetzt noch zu zeigen haben, wie man sich bei der Berechnung des in Rede stehenden Quotienten zu verhalten hat, um γ' bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung richtig zu bekommen. Um dies recht deutlich zu zeigen, betrachten wir jeden möglichen Fall besonders.

1. Sey $\gamma < \alpha$, so ist $\gamma' > \gamma$, aber auch $\gamma' < \alpha$, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen. Da

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

und $\gamma' > \gamma$ ist, so ist

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

eine positive Größe. Bezeichnen wir nun den decadischen Zahlenausdruck, welchen man erhält, wenn man vorstehenden Quotienten bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung entwickelt und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöhet, durch Γ; so ist

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \Gamma - \Delta$$

und bekanntlich

$$\Delta \leqq \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2m+k}.$$

Ferner ist

$$\gamma' = \gamma + \Gamma - \Delta,$$

also

$$\alpha - \gamma' = \alpha - (\gamma + \Gamma) + \Delta.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\alpha - \gamma' < \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2m+k};$$

also ist auch

$$\alpha - (\gamma + \Gamma) + \Delta < \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2m+k},$$

$$\alpha - (\gamma + \Gamma) < \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2m+k} - \Delta,$$

wo immer, besonders auch des Folgenden wegen, festzuhalten ist, daß Δ eine positive Größe ist. Ist nun zuerst

$$\gamma + \Gamma \gtrless \alpha ,$$

also $\alpha - (\gamma + \Gamma)$ eine positive Größe, so muß natürlich

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta$$

eine positive Größe seyn, die nicht $= 0$ ist, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\alpha - (\gamma + \Gamma)$ offenbar eine negative Größe seyn würde. Weil nun Δ positiv ist, so ist

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} ,$$

und folglich auch

$$\alpha - (\gamma + \Gamma) < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} .$$

Ist ferner

$$\gamma + \Gamma > \alpha ,$$

so ist

$$(\gamma + \Gamma) - \alpha = \gamma' + \Delta - \alpha = \Delta - (\alpha - \gamma') .$$

Da nun $(\gamma + \Gamma) - \alpha$ eine positive Größe ist, die nicht $= 0$ ist; so ist auch $\Delta - (\alpha - \gamma')$ eine positive Größe und nicht $= 0$. Weil aber $\gamma' < \alpha$ ist, so ist $\alpha - \gamma'$ eine positive Größe, und folglich

$$\Delta - (\alpha - \gamma') < \Delta ,$$

d. i.

$$\Delta - (\alpha - \gamma') < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} ;$$

folglich auch

$$(\gamma + \Gamma) - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} .$$

Hieraus sieht man also, daß $\gamma + \Gamma$ jederzeit ein bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung richtiger Näherungswerth der gesuchten Wurzel α ist. Die Größe Γ wird, was wohl zu merken ist, erhalten, wenn man den Bruch

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung entwickelt und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöhet. Zu bemerken ist aber auch, daß sich nicht im Allgemeinen entscheiden läßt, ob $\gamma + \Gamma$ kleiner oder größer als die gesuchte Wurzel, d. h. eine untere oder eine obere Gränze derselben ist.

2. Wenn $\gamma > \alpha$ ist, so ist $\gamma' < \gamma$, aber auch $\gamma' > \alpha$, wie aus dem Vorhergehenden bekannt ist. Da

$$\gamma' = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

und $\gamma' < \gamma$ ist, so ist

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} .$$

eine positive Größe. Bezeichnen wir nun wieder den decadischen Zahlenausdruck, welchen man erhält, wenn man vorstehenden

Quotienten bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung entwickelt, und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöhet, durch Γ; so ist

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \Gamma - \Delta ,$$

wo Δ positiv ist. Auch ist bekanntlich

$$\Delta \leqq (\tfrac{1}{10})^{2m+k} .$$

Ferner ist

$$\gamma' = \gamma - \Gamma + \Delta ,$$

also

$$\gamma' - \alpha = (\gamma - \Gamma) - \alpha + \Delta .$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\gamma' - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} ;$$

also ist auch

$$(\gamma - \Gamma) - \alpha + \Delta < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} ,$$
$$(\gamma - \Gamma) - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta .$$

Ist nun zuerst

$$\gamma - \Gamma \gtrless \alpha ,$$

also $(\gamma - \Gamma) - \alpha$ eine positive Größe; so ist natürlich

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta$$

eine positive Größe, die nicht $= 0$ ist, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $(\gamma - \Gamma) - \alpha$ offenbar eine negative Größe seyn würde. Weil nun Δ positiv ist, so ist

$$(\tfrac{1}{10})^{2m+k} - \Delta < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} ,$$

und folglich auch

$$(\gamma - \Gamma) - \alpha < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} .$$

Ist ferner

$$\gamma - \Gamma < \alpha ,$$

so ist

$$\alpha - (\gamma - \Gamma) = \alpha - \gamma' + \Delta = \Delta - (\gamma' - \alpha) ,$$

d. i., weil $\gamma' > \alpha$, also $\gamma' - \alpha$ positiv ist,

$$\Delta - (\gamma' - \alpha) < \Delta ,$$

wobei auch noch zu bemerken ist, daß $\Delta - (\gamma' - \alpha)$, so wie das ihm gleiche $\alpha - (\gamma - \Gamma)$, positiv ist. Es ist folglich auch

$$\alpha - (\gamma - \Gamma) < \Delta ,$$

d. i., weil

$$\Delta \leqq (\tfrac{1}{10})^{2m+k}$$

ist,

$$\alpha - (\gamma - \Gamma) < (\tfrac{1}{10})^{2m+k} .$$

Man sieht also, daß immer $\gamma - \Gamma$ ein bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung genauer Näherungswerth der gesuchten Wurzel α ist, wobei es aber unentschieden bleibt, ob $\gamma - \Gamma$ kleiner oder größer als die gesuchte Wurzel α, d. i. eine untere oder eine obere Gränze derselben ist, welches in jedem Falle besonders entschieden werden muß. Γ erhält man, wenn man den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung berechnet, und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöhet.

3. Mittelst der so eben gegebenen Vorschriften kann man also immer einen bis zu Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung richtigen Näherungswerth der gesuchten Wurzel, den wir überhaupt durch γ_1 bezeichnen wollen, finden, und es ist bloß in jedem Falle noch besonders zu bestimmen, ob dieser Näherungswerth kleiner oder größer als die gesuchte Wurzel ist. Um dies zu entscheiden, muß man $f(\gamma_1)$ berechnen, und das Zeichen von $f(\gamma_1)$ mit den Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$, wo a und b die primitiven Gränzwerthe der Wurzel sind, vergleichen. Hat nämlich $f(\gamma_1)$ mit $f(b)$ entgegengesetztes, mit $f(a)$ also gleiches Vorzeichen, so ist γ_1 ein unterer Gränzwerth, d. i. $\gamma_1 < \alpha$. Im entgegengesetzten Falle, wo $f(\gamma_1)$ mit $f(a)$ entgegengesetztes, mit $f(b)$ also gleiches Vorzeichen hat, ist γ_1 ein oberer Gränzwerth, d. i. $\gamma_1 > \alpha$. Immer ist aber γ_1 bis auf Decimaleinheiten der $(2m + k)$ten Ordnung genau. Ist also zuerst $\gamma_1 < \alpha$, so sind

$$\gamma_1 \text{ und } \gamma_1 + (\tfrac{1}{10})^{2m+k};$$

ist dagegen $\gamma_1 > \alpha$, so sind

$$\gamma_1 - (\tfrac{1}{10})^{2m+k} \text{ und } \gamma_1$$

offenbar ein unterer und ein oberer Gränzwerth der gesuchten Wurzel.

$$\gamma_1 \pm (\tfrac{1}{10})^{2m+k},$$

wo das obere Zeichen dem Fall $\gamma_1 < \alpha$, das untere dem Fall $\gamma_1 > \alpha$ entspricht, erhält man aber sehr leicht, wenn man nur die letzte beibehaltene Decimalziffer von γ_1 respective um eine Einheit vermehrt oder vermindert, so daß man also, wenn man nur γ_1 hat, immer sehr leicht eine untere und eine obere Gränze der gesuchten Wurzel erhalten kann. Diese beiden Gränzen betrachtet man nun wieder als zwei primitive Gränzen, und verfährt mit denselben auch fernerhin ganz eben so wie mit den beiden primitiven Gränzen a und b, wodurch man also nach und nach zu immer engern und engern Gränzen der gesuchten Wurzel geführt wird, und diese Gränzen, wenn nur alle obigen Bedingungen erfüllt sind, auch bis zu jedem beliebigen Grade zusammenziehen, oder die gesuchte Wurzel mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit finden, auch immer den Grad der erreichten Genauig-

keit mit völliger Sicherheit und Bestimmtheit angeben kann. Bevor wir nun das Vorhergehende an einem Beispiele erläutern, ist, um die numerische Rechnung möglichst zu erleichtern, noch Folgendes zu bemerken.

V. Wir wollen nämlich, bevor wir die Anwendung des Vorhergehenden an einem Beispiele zeigen, noch eine Methode angeben, nach welcher man, wenn überhaupt $\gamma' = \gamma + \varepsilon$ ist, mit Leichtigkeit aus den Größen

$$f(\gamma),\ f'(\gamma),\ f''(\gamma),\ f'''(\gamma),\ \ldots\ f^{(n)}(\gamma)$$

die Größen

$$f(\gamma'),\ f'(\gamma'),\ f''(\gamma'),\ f'''(\gamma'),\ \ldots\ f^{(n)}(\gamma')$$

finden kann, wobei wir jedoch der Kürze wegen $n = 4$ setzen wollen. Zu dem Ende schreibe man die Größen

$$f(\gamma),\ f'(\gamma),\ f''(\gamma),\ f'''(\gamma),\ f^{IV}(\gamma)$$

in eine Reihe, so kann man, wenn man alle Glieder dieser Reihe vom zweiten an mit ε multiplicirt, auch leicht die folgende Reihe berechnen:

$$\varepsilon f'(\gamma),\ \varepsilon f''(\gamma),\ \varepsilon f'''(\gamma),\ \varepsilon f^{IV}(\gamma).$$

Multiplicirt man nun wieder alle Glieder dieser Reihe vom zweiten an mit $\frac{1}{2}\varepsilon$, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f''(\gamma),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f'''(\gamma),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f^{IV}(\gamma).$$

Durch Multiplication aller Glieder dieser Reihe vom zweiten an mit $\frac{1}{3}\varepsilon$ erhält man

$$\frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f'''(\gamma),\ \frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f^{IV}(\gamma),$$

und endlich ergiebt sich, wenn man das zweite Glied dieser Reihe mit $\frac{1}{4}\varepsilon$ multiplicirt, die Größe

$$\frac{1}{2.3.4}\varepsilon^4 f^{IV}(\gamma).$$

Auf diese Weise erhält man also überhaupt folgende Reihen

$$f(\gamma),\ f'(\gamma),\ f''(\gamma),\ f'''(\gamma),\ f^{IV}(\gamma);$$
$$\varepsilon f'(\gamma),\ \varepsilon f''(\gamma),\ \varepsilon f'''(\gamma),\ \varepsilon f^{IV}(\gamma);$$
$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f''(\gamma),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f'''(\gamma),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f^{IV}(\gamma);$$
$$\frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f'''(\gamma),\ \frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f^{IV}(\gamma);$$
$$\frac{1}{2.3.4}\varepsilon^4 f^{IV}(\gamma);$$

und hieraus ergeben sich, wenn man die sämmtlichen ersten, zweiten, dritten, vierten Glieder zu einander addirt, nach (47.) offenbar die Größen

$$f(\gamma+\varepsilon),\ f'(\gamma+\varepsilon),\ f''(\gamma+\varepsilon),\ f'''(\gamma+\varepsilon),\ f^{IV}(\gamma+\varepsilon),$$

d. i. die zu findenden Größen

$$f(\gamma'),\ f'(\gamma'),\ f''(\gamma'),\ f'''(\gamma'),\ f^{IV}(\gamma'),$$

wobei man zu bemerken hat, daß im vorliegenden Falle $f^{IV}(x)$ eine constante Größe ist, so daß man also statt $f^{IV}(y)$ allerdings $f^{IV}(y+\varepsilon)$ oder $f^{IV}(y')$ setzen kann.

86. Das Vorhergehende wollen wir nun auf die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

anwenden, welche, wie wir aus (71. V.) und (74. II.) wissen, nur eine reelle Wurzel, und zwar zwischen den Gränzen 1 und 10 hat. Für diese Gleichung ist

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

und in (71. V.) fanden wir folgende Zeichenreihen

$$(1) = + + + -$$
$$ 0\ 0\ 0\ 1$$
$$(10) = + + + +,$$

so daß also die erforderliche Bedingung, daß die vier letzten Glieder der dem Intervall zwischen 1 und 10 entsprechenden Indexreihe die Folge 0001 bilden, erfüllt ist. Im vorliegenden Falle ist nun

$$a=1,\ b=10;\ f'(a)=1,\ f'(b)=298;\ f''(a)=6,\ f''(b)=60;$$

$$i = 9,\ A = 1,\ B = 60,\ \frac{B}{2A} = 30;$$

$$i < (\tfrac{1}{10})^{-1},\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^{-2},\ m = -1,\ k = -2,$$

$$1 - k = 3,\ m < 1 - k$$

und es ist folglich die Bedingung $m \overline{\overline{>}} 1 - k$ noch nicht erfüllt. Wir theilen deshalb das Intervall ferner, zunächst durch 2, und erhalten:

$$(1) = + + + -$$
$$ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$(2) = + + + -$$
$$ 0\ 0\ 0\ 1$$
$$(10) = + + + +.$$

Folglich ist nun

$$a = 2,\ b = 10;\ f'(a)=10,\ f'(b)=298;\ f''(a)=12,\ f''(b)=60;$$

$$i = 8,\ A = 10,\ B = 60,\ \frac{B}{2A} \leqq 3;$$

$$i < (\tfrac{1}{10})^{-1},\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^{-1},\ m = -1,\ k = -1;$$

$$1 - k = 2,\ m < 1 - k$$

und daher die Bedingung $m \overline{\overline{>}} 1 - k$ noch nicht erfüllt. Des-

halb theilen wir das Intervall zwischen 2 und 10 ferner durch 3, und erhalten:

$$\begin{array}{rcccc} (2) = & + & + & + & - \\ & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} \\ (3) = & + & + & + & + \\ & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} \\ (10) = & + & + & + & + \,. \end{array}$$

Also ist jetzt

$$a = 2,\ b = 3;\ f'(a) = 10,\ f'(b) = 25;\ f''(a) = 12,\ f''(b) = 18;$$

$$i = 1,\ A = 10,\ B = 18,\ \frac{B}{2A} = \frac{18}{20} = 0{,}9;$$

$$i = (\tfrac{1}{10})^0,\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^0,\ m = 0,\ k = 0;$$

$$1 - k = 1,\ m < 1 - k$$

und folglich die Bedingung $m \overset{=}{>} 1 - k$ noch nicht erfüllt, so daß wir also das Intervall zwischen 2 und 3 ferner theilen müssen. Setzen wir nun zunächst 2,1 für x, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcccc} (2 = & + & + & + & - \\ & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} \\ (2{,}1) = & + & + & + & + \\ & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} \\ (3) = & + & + & + & + \end{array}$$

und es ist folglich jetzt

$$a = 2,\ b = 2{,}1;\ f'(a) = 10,\ f'(b) = 11{,}23;\ f''(a) = 12,\ f''(b) = 12{,}6;$$

$$i = 0{,}1,\ A = 10,\ B = 12{,}6,\ \frac{B}{2A} = \frac{12{,}6}{20} = 0{,}63;$$

$$i = (\tfrac{1}{10})^1,\ \frac{B}{2A} < (\tfrac{1}{10})^0,\ m = 1,\ k = 0;$$

$$1 - k = 1,\ m = 1 - k,$$

so daß also nun die Bedingung $m \overset{=}{>} 1 - k$ erfüllt ist, und wir daher jetzt die eigentliche Näherungsrechnung beginnen können.

Es ist nämlich

$$a = 2,\ b = 2{,}1\,.$$

Da $f(b)$ und $f''(b)$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\gamma = 2{,}1$$

zu setzen, und dieser Näherungswerth ist, da $m = 1$ ist, bis auf Decimaleinheiten der ersten Ordnung, d. i. bis auf Zehntheile, genau.

Da $2m + k = 2$ ist, so entwickeln wir

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}061}{11{,}23}$$

bis auf Decimaleinheiten der zweiten Ordnung und vermehren die letzte Ziffer um eine Einheit. Dies giebt

$$r = 0{,}01$$

und folglich

$$\gamma_1 = \gamma - r = 2{,}09\,,$$

wo es nun zunächst darauf ankommt, zu entscheiden, ob γ_1 kleiner oder größer wie die gesuchte Wurzel ist. Zu dem Ende müssen wir $f(\gamma_1)$ berechnen und das Vorzeichen dieser Größe mit den Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ vergleichen. Wir wenden aber hierbei, $\varepsilon = 0{,}09$ setzend, mit großem Vortheil für den ganzen fernern Gang der Rechnung das in (85. V.) gezeigte Verfahren an, und hoffen, daß die nachstehende Rechnung auch ohne weitere Erläuterung völlig verständlich seyn wird, wenn man nur das a. a. O. Gesagte gehörig berücksichtigt:

$f(2)$,	$f'(2)$,	$f''(2)$,	$f'''(2)$,
-1	10	12	6
	0,09	0,09	0,09
	0,90	1,08	0,54
		0,09	0,09
		0,0972	0,0486
		0,0486	0,0243
			0,09
			0,002187
			0,000729

$f(2{,}09)$,	$f'(2{,}09)$,	$f''(2{,}09)$,	$f'''(2{,}09)$
0,90	10	12	6
0,0486	1,08	0,54	
0,000729	0,0243	12,54	
0,949329	11,1043		
$-1{,}000000$			
$-0{,}050671$			

Weil nun $f(2{,}09)$ mit $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat; so ist 2,09 kleiner wie die gesuchte Wurzel und jetzt also

$$a = 2{,}09,\ b = 2{,}10$$

zu setzen. m ist $= 2$. Ferner ist jetzt

$$A = 11{,}1043,\ B = 12{,}6,\ \frac{B}{2A} = \frac{12{,}6}{22{,}2086} = 0{,}5\,..< \left(\tfrac{1}{10}\right)^0;$$

folglich wieder $k = 0$. Weil $f(b)$ und $f''(b)$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\gamma = 2{,}10$$

zu setzen, und man muß nun, da $2m + k = 4$ ist, den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}061}{11{,}23}$$

bis auf Decimaleinheiten der vierten Ordnung entwickeln, und die letzte Ziffer um eine Einheit erhöhen. Dies giebt

$$r = 0{,}0055$$

und folglich

$$\gamma_1 = \gamma - r = 2{,}0945\,,$$

wo nun wieder zunächst zu beurtheilen ist, ob γ_1 kleiner oder größer wie die gesuchte Wurzel ist. Zu dem Ende führen wir, $\varepsilon = 0{,}0045$ setzend, die Rechnung wieder auf folgende Art:

$f(2{,}09)$,	$f'(2{,}09)$,	$f''(2{,}09)$,	$f'''(2{,}09)$,
$-0{,}050671$	11,1043	12,54	6
	0,0045	0,0045	0,0045
	555215	6270	30
	444172	5016	24
	0,04996935	0,056430	0,0270
		0,0045	0,0045
		282150	1350
		225720	1080
		0,0002539350	0,00012150
		0,0001269675	0,00006075
			0,0045
			30375
			24300
			0,000000273375
			0,000000091125

$f(2{,}0945)$	$f'(2{,}0945)$	$f''(2{,}0945)$	$f'''(2{,}0945)$
0,04996935	11,1043	12,54	6
0,0001269675	0,056430	0,0270	
0,000000091125	0,00006075	12,5670	
0,050096408625	11,16079075		
$-0{,}050671$			
$-0{,}000574591375$			

Weil nun $f(2{,}0945)$ mit $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, so ist 2,0945 kleiner, wie die gesuchte Wurzel, und jetzt also

$$a = 2{,}0945, \quad b = 2{,}0946$$

zu setzen. m ist $= 4$. Um k bestimmen zu können, muß man erst $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, $f'''(b)$ berechnen. Für $\varepsilon = 0{,}0001$ erhält man, wenn wir jetzt der Beschränktheit des Raumes wegen die einzelnen Theile der Rechnung nur nicht mehr neben, sondern unter einander schreiben, auf bekannte Weise:

$f(2{,}0945) = -0{,}000574591375$

$f'(2{,}0945) = 11{,}16079075$
$0{,}0001$
$0{,}001116079075$

$f''(2{,}0945) = 12{,}5670$
$0{,}0001$
$0{,}00125670$
$0{,}0001$
$0{,}000000125670$
$0{,}000000062835$

$$f'''(2{,}0945) = \begin{array}{r} 6 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}0006 \\ 0{,}0001 \\ \hline 0{,}00000006 \\ 0{,}00000003 \\ 0\,0001 \\ \hline 0{,}000000000003 \\ 0{,}000000000001 \end{array}.$$

Folglich

$$f(2{,}0946) = \begin{array}{r} 0{,}001116079075 \\ 0{,}000000062835 \\ 0{,}000000000001 \\ \hline 0{,}001116141911 \\ -0{,}000574591375 \\ \hline = 0{,}000541550536 \end{array}$$

$$f'(2{,}0946) = \begin{array}{r} 11{,}16079075 \\ 0{,}00125670 \\ 0{,}00000003 \\ \hline = 11{,}16204748 \end{array}$$

$$f''(2{,}0946) = \begin{array}{r} 12{,}5670 \\ 0{,}0006 \\ \hline 12{,}5676 \end{array}$$

$$f'''(2{,}0946) = 6\,.$$

Es ist nun

$$A = 11{,}16079075, \quad B = 12{,}5676\,;$$

also

$$\frac{B}{2A} = \frac{12{,}5676}{22{,}32158150} = 0{,}5\,..\, < \left(\frac{1}{10}\right)^0\,;$$

folglich $k = 0$. Weil $f(b)$ und $f''(b)$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\gamma = 2{,}0946$$

zu setzen, und man muß nun, weil $2m + k = 8$ ist, den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0\,000541550536}{11{,}16204748}$$

bis auf die achte Ziffer hinter dem Komma entwickeln und die letzte Ziffer dann um eine Einheit erhöhen, welches

$$\Gamma = 0{,}00004852$$

und

$$\gamma_1 = \gamma - \Gamma = 2{,}09455148$$

giebt. Dieser Näherungswerth der gesuchten Wurzel ist bis auf die achte Ziffer hinter dem Komma genau; um aber zu entscheiden, ob derselbe kleiner oder größer als die gesuchte Wurzel ist, muß man, $\varepsilon = 0{,}00005148$ setzend, folgende Rechnung machen:

$f(2{,}0945) = -0{,}000574591375$

$f'(2{,}0945) = 11{,}16079075$
$0{,}00005148$
8928632600
4464316300
1116079075
5580395375
$0{,}0005745575078100$

$f''(2{,}0945) = 12{,}5670$
$0{,}00005148$
1005360
502680
125670
628350
$0{,}000646949160$
$0{,}00005148$
5175593280
2587796640
646949160
3234745800
$0{,}0000000330494275680$
$0{,}0000001665247137840$

$f'''(2{,}0945) = 6$
$0{,}00005148$
$0{,}00030888$
$0{,}00005148$
247104
123552
30888
154440
$0{,}0000000159011424$
$0{,}0000000079505712$
$0{,}00005148$
636045696
318022848
79505712
397528560
$0{,}000000000000409295405376$
$0{,}000000000000136431801792$

Folglich ist

$f(2{,}09455148) = 0{,}0005745575078100$
$0{,}0000001665247137840$
$0{,}000000000000136431801792$
$0{,}000574574160417810201792$
$-0{,}000574591375$
$= -0{,}000000017214582189798208$

$f'(2{,}09455148) = 11{,}16079075$
$0{,}000646949160$
$0{,}0000000079505712$
$= 11{,}1614377071105712$

$$f'(2{,}09455148) = 12{,}5670 \\ 0{,}00030888 \\ = 12{,}56730888$$

$$f''(2{,}09455148) = 6 .$$

Weil nun $f(2{,}09455148)$ mit $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, so ist 2,09455148 kleiner als die gesuchte Wurzel und man muß also jetzt

$$a = 2{,}09455148, \quad b = 2{,}09455149$$

setzen. m ist $= 8$. Um k bestimmen zu können, muß man erst $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$, $f'''(b)$ berechnen. Dazu gelangt man, $\varepsilon = 0{,}00000001$ setzend, durch folgende hier abgekürzt mitgetheilte Rechnung:

$$f(2{,}09455149) = 0{,}000000111614377071105712 \\ 628365444 \\ 1 \\ 0{,}000000111614377699471157 \\ -0{,}000000017214582189798208 \\ = 0{,}000000094399795509672949$$

$$f'(2{,}09455149) = 11{,}1614377071105712 \\ 1256730888 \\ 3 \\ = 11{,}1614378327836603$$

$$f''(2{,}09455149) = 12{,}56730888 \\ 6 \\ = 12{,}56730894$$

$$f'''(2{,}09455149) = 6 .$$

Es ist also

$$A = 11{,}1614377071105712, \quad B = 12{,}56730894 ;$$

$$\frac{B}{2A} = \frac{12{,}56730894}{22{,}3228754142211424} = 0{,}5 \ldots < \left(\frac{1}{10}\right)^0 ;$$

folglich $k = 0$. Weil $f(b)$ und $f''(b)$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\gamma = 2{,}09455149$$

zu setzen, und man muß nun, weil $2m + k = 16$ ist, den Quotienten

$$\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}000000094399795509672949}{11{,}1614378327836603}$$

bis auf die sechzehnte Ziffer hinter dem Komma entwickeln und die letzte Ziffer um eine Einheit erhöhen. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}0000000084576735$$

und

$$\gamma_1 = \gamma - \Gamma = 2{,}0945514815423265 .$$

Dieser Näherungswerth ist bis auf die sechzehnte Decimalstelle genau. Fourier, von dem wir das vorhergehende Bei-

spiel entlehnt haben, hat noch den fünften Näherungswerth berechnet, welcher bis zur zwei und dreißigsten Decimalstelle genau ist. Wir theilen diesen Näherungswerth noch mit, weil die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

eine Art von Berühmtheit in der Theorie der Gleichungen erhalten hat, indem sie auch schon von Newton und Lagrange als Prüfstein ihrer Näherungsmethoden gebraucht worden ist. Der fünfte Näherungswerth ist nach Fourier

$$\gamma_1 = 2{,}094551481542326591482386540579 30$$

wo selbst die letzte Ziffer noch völlig genau ist. Newton und Lagrange sind beide bloß bis zur achten Decimale hinter dem Komma gegangen. Ersterer findet 2,09455147, letzterer findet 2,09455147 und 2,09455149 als Gränzen der gesuchten Wurzel (Lagrange Traité de la résolution des équations numériques. Paris 1808. p. 33.)

87. Eine andere Gleichung, die auch bei der Auflösung der numerischen Gleichungen oft als Beispiel gebraucht worden ist, ist die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

welche, wie wir aus (74. I.) wissen, drei reelle Wurzeln zwischen -10 und -1, zwischen 1 und 1,5 und zwischen 1,5 und 2 hat. Für diese Gleichung ist

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 7$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

und für die Gränzen 1 und 1,5 haben wir die Zeichenreihen

$$(1) = + \; + \; - \; +$$
$$\qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$
$$(1{,}5) = + \; + \; - \; -,$$

so daß also die Indices die Folge 0001 bilden, und demnach unsere Näherungsmethode anwendbar ist. Auch ist

$$f(1) = 1; \quad f'(1) = -4; \quad f''(1) = 6; \quad f'''(1) = 6;$$
$$f(1{,}5) = -0{,}125; \; f'(1{,}5) = -0{,}25; \; f''(1{,}5) = 9{,}0; \; f'''(1{,}5) = 6.$$

Wir setzen also

$$a = 1, \; b = 1{,}5; \; f'(a) = -4; \; f'(b) = -0{,}25; \; f''(a) = 6; \; f''(b) = 9{,}0;$$

$$i = 0{,}5, \; A = 0{,}25, \; B = 9{,}0, \; \frac{B}{2A} = \frac{9{,}0}{0{,}50} = 18;$$

$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^0, \; \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}, \; m = 0, \; k = -2;$$

$$1 - k = 3, \; m < 1 - k.$$

Man muß folglich das Intervall ferner theilen. Wir setzen da-

her zunächst $x = 1{,}1$, und rechnen nun auf folgende Art, wobei das obige $\varepsilon = 0{,}1$ angenommen ist:

$f(1)$,	$f'(1)$,	$f''(1)$,	$f'''(1)$
1	− 4	6	6
	0,1	0,1	0,1
	− 0,4	0,6	0,6
		0,1	0,1
		0,06	0,06
		0,03	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1{,}1)$	$f'(1{,}1)$	$f''(1{,}1)$	$f'''(1{,}1)$
1	0,6	6	6
0,03	0,03	0,6	
0,001	0,63	6,6	
1,031	− 4		
− 0,4	− 3,37		
0,631			

$a = 1{,}1$, $b = 1{,}5$; $f'(a) = -3{,}37$, $f'(b) = -0{,}25$; $f''(a) = 6{,}6$, $f''(b) = 9{,}0$;

$$i = 0{,}4,\ A = 0{,}25,\ B = 9{,}0,\ \frac{B}{2A} = \frac{9{,}0}{0{,}50} = 18;$$

$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^0,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\ m = 0,\ k = -2;$$

$$1 - k = 3,\ m < 1 - k.$$

$f(1{,}1)$	$f'(1{,}1)$,	$f''(1{,}1)$,	$f'''(1{,}1)$
0,631	− 3,37	6,6	6
	0,1	0,1	0,1
	− 0,337	0,66	0,6
		0,1	0,1
		0,066	0,06
		0,033	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1{,}2)$,	$f'(1{,}2)$,	$f''(1{,}2)$,	$f'''(1{,}2)$
0,631	0,66	6,6	6
0,033	0,03	0,6	
0,001	0,69	7,2	
0,665	− 3,37		
− 0,337	− 2,68		
0,328			

$a = 1{,}2$, $b = 1{,}5$; $f'(a) = -2{,}68$, $f'(b) = -0{,}25$; $f''(a) = 7{,}2$, $f''(b) = 9{,}0$;

$$i = 0{,}3,\ A = 0{,}25,\ B = 9{,}0,\ \frac{B}{2A} = \frac{9{,}0}{0{,}50} = 18;$$

$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^0,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\ m = 0,\ k = -2;$$

$$1 - k = 3,\ m < 1 - k.$$

$f(1,2)$,	$f'(1,2)$,	$f''(1,2)$,	$f'''(1,2)$
0,328	−2,68	7,2	6
	0,1	0,1	0,1
	−0,268	0,72	0,6
		0,1	0,1
		0,072	0,06
		0,036	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1,3)$,	$f'(1,3)$,	$f''(1,3)$,	$f'''(1,3)$
0,328	0,72	7,2	6
0,036	0,03	0,6	
0,001	0,75	7,8	
0,365	−2,68		
−0,268	−1,93		
0,097			

$a=1{,}3$, $b=1{,}5$; $f'(a)=-1{,}93$, $f'(b)=-0{,}25$; $f''(a)=7{,}8$, $f''(b)=9{,}0$;

$$i=0{,}2,\ A=0{,}25,\ B=9{,}0,\ \frac{B}{2A}=\frac{9.0}{0{,}50}=18;$$

$$i<\left(\frac{1}{10}\right)^{0},\ \frac{B}{2A}<\left(\frac{1}{10}\right)^{-2},\ m=0,\ k=-2;$$

$$1-k=3,\ m<1-k.$$

$f(1,3)$,	$f'(1,3)$,	$f''(1,3)$,	$f'''(1,3)$
0,097	−1,93	7,8	6
	0,1	0,1	0,1
	−0,193	0,78	0,6
		0,1	0,1
		0,078	0,06
		0,039	0,03
			0,1
			0,003
			0,001

$f(1,4)$,	$f(1,4)$,	$f''(1,4)$,	$f'''(1,4)$
0,097	0,78	7,8	6
0,039	0,03	0,6	
0,001	0,81	8,4	
0,137	−1,93		
−0,193	−1,12		
−0,056			

$a=1{,}3$, $b=1{,}4$; $f'(a)=-1{,}93$, $f'(b)=-1{,}12$; $f''(a)=7{,}8$, $f''(b)=8{,}4$;

$$i=0{,}1,\ A=1{,}12,\ B=8{,}4,\ \frac{B}{2A}=\frac{8.4}{2{,}24};$$

$$i=\left(\frac{1}{10}\right)^{1},\ \frac{B}{2A}<\left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ m=1,\ k=-1;$$

$$1-k=2,\ m<1-k.$$

Wir wollen nun $x = 1{,}35$, $\varepsilon = 0{,}05$ setzen:

$f(1{,}3)$,	$f'(1{,}3)$,	$f''(1{,}3)$,	$f'''(1{,}3)$,
0,097	− 1,93	7,8	6
	0,05	0,05	0,05
	−0,0965	0,390	0,30
		0,05	0,05
		0,01950	0,0150
		0,00975	0,0075
			0,05
			0,000375
			0,000125

$f'(1{,}35)$,	$f'(35)$,	$f''(1{,}35)$,	$f'''(1{,}35)$
0,097	0,390	7,8	6
0,00975	0,0075	0,30	
0,000125	0,3975	8,10	
0,106875	−1,93		
− 0,0965	−1,5325		
0,010375			

$a = 1{,}35, b = 1{,}4; f'(a) = -1{,}5325, f'(b) = -1{,}12; f''(a) = 8{,}10, f''(b) = 8{,}4;$

$$i = 0{,}05,\ A = 1{,}12,\ B = 8{,}4,\ \frac{B}{2A} = \frac{8{,}4}{2{,}24};$$

$$i < \left(\frac{1}{10}\right)^1,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ m = 1,\ k = -1;$$

$$1 - k = 2,\ m < 1 - k.$$

$f(1{,}35)$,	$f'(1{,}35)$,	$f''(1{,}35)$,	$f'''(1{,}35)$
0,010375	−1,5325	8,10	6
	0,01	0,01	0,01
	−0,015325	0,0810	0,06
		0,01	0,01
		0,000810	0,0006
		0,000405	0,0006
			0,01
			0,000003
			0,000001

$f(1{,}36)$,	$f'(1{,}36)$,	$f''(1{,}36)$,	$f'''(1{,}36)$
0,010375	0,0810	8,10	6
0,000405	0,0003	0,06	
0,000001	0,0813	8,16	
0,010781	−1,5325		
− 0,015325	−1,4512		
− 0,004544			

$a = 1{,}35,\ b = 1{,}36;\ f'(a) = -1{,}5325,\ f'(b) = -1{,}4512;$

$f''(a) = 8{,}10,\ f''(b) = 8{,}16;$

$$i = 0{,}01,\ A = 1{,}4512,\ B = 8{,}16,\ \frac{B}{2A} = \frac{8{,}16}{2{,}9024};$$

$$i = \left(\frac{1}{10}\right)^2,\ \frac{B}{2A} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1},\ m = 2,\ k = -1;$$

$$1 - k = 2,\ m = 1 - k.$$

Nun ist die Bedingung $m \geqq 1 - k$ erfüllt, und die eigentliche Näherungsrechnung kann also beginnen. Da $f(a)$ und $f''(a)$ gleiche Vorzeichen haben, so setzen wir

$$\gamma = 1{,}35 .$$

Weil $2m + k = 3$ ist, so entwickeln wir den Quotienten

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}010375}{1{,}5325}$$

bis auf die dritte Decimalziffer hinter dem Komma genau, und vermehren die letzte Ziffer um eine Einheit. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}007 ,$$

$$\gamma_1 = \gamma + \Gamma = 1{,}357 .$$

$f(1{,}35)$,	$f'(1{,}35)$,	$f''(1{,}35)$,	$f'''(1{,}35)$
0,010375	− 1,5325	8,10	6
	0,007	0,007	0,007
	− 0,0107275	0,05670	0,042
		0,007	0,007
		0,00039690	0,000294
		0,00019845	0,000147
			0,007
			0,000001029
			0,000000343

$$f(1{,}357) = \begin{array}{r} 0{,}010375 \\ 0{,}00019845 \\ 0{,}000000343 \\ \hline 0{,}010573793 \\ -\ 0{,}0107275 \\ \hline = -\ 0{,}000153707 \end{array}$$

$$f'(1{,}357) = \begin{array}{r} 0{,}05670 \\ 0{,}000147 \\ \hline 0{,}056847 \\ -\ 1{,}5325 \\ \hline = -\ 1{,}475653 \end{array}$$

$$f''(1{,}357) = \begin{array}{r} 8{,}10 \\ 0{,}042 \\ \hline 8{,}142 \end{array}$$

$$f'''(1{,}357) = 6 .$$

$f(1{,}357)$ hat mit $f(a)$ entgegengesetztes Vorzeichen; folglich ist 1,357 größer wie die gesuchte Wurzel, und daher nun

$$a = 1{,}356, \quad b = 1{,}357 .$$

m ist $= 3$. Um k bestimmen zu können, müssen wir erst folgende Rechnung machen:

$f(1{,}35)$,	$f'(1{,}35)$,	$f''(1{,}35)$,	$f'''(1{,}35)$,
0,010375	— 1,5325	8,10	6
	0,006	0,006	0,006
	— 0,0091950	0,04860	0,036
		0,006	0,006
		0,00029160	0,000216
		0,00014580	0,000108
			0,006
			0,000000648
			0,000000216

$$f(1{,}356) = 0{,}010375 + 0{,}00014580 + 0{,}000000216 = 0{,}010521016 - 0{,}0091950 = 0{,}001326016$$

$$f'(1{,}356) = 0{,}04860 + 0{,}000108 = 0{,}048708 - 1{,}5325 = -1{,}483792$$

$$f''(1{,}356) = 8{,}10 + 0{,}036 = 8{,}136$$

$$f'''(1{,}356) = 6$$

$$A = 1{,}475653,\ B = 8{,}142,\ \frac{B}{2A} = \frac{8{,}142}{2{,}951306} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1};$$

folglich wieder $k = -1$ und daher $2m + k = 5$. Weil nun $f(a)$ und $f'(a)$ gleiche Vorzeichen haben, so muß man

$$\gamma = 1{,}356$$

setzen, den Quotienten

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}001326016}{1{,}483792}$$

bis zur fünften Stelle hinter dem Komma entwickeln, und die letzte Ziffer um eine Einheit vermehren. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}00090\ ,$$

$$\gamma_1 = \gamma + \Gamma = 1{,}35690\ .$$

$$f(1{,}356) = 0{,}001326016$$

$$f'(1{,}356) = -1{,}483792 + 0{,}0009 = -0{,}0013354128$$

$$f''(1{,}356) = 8{,}136 + 0{,}0009 = 0{,}0073224 + 0{,}0009 = 0{,}00000659016$$

$$0{,}00000329508$$

$$f'''(1,356) = 6$$
$$0,0009$$
$$0,0054$$
$$0,0009$$
$$0,00000486$$
$$0,00000243$$
$$0,0009$$
$$0,000000002187$$
$$0,000000000729$$

$$f(1,35690) = 0,001326016$$
$$0,00000329508$$
$$0,000000000729$$
$$0,001329311809$$
$$-0,0013354128$$
$$= -0,000006100991$$

$$f'(1,35690) = 0,0073224$$
$$0,00000243$$
$$0,00732483$$
$$-1,483792$$
$$= -1,47646717$$

$$f''(1,35690) = 8,136$$
$$0,0054$$
$$= 8,1414$$

$$f'''(1,35690) = 6$$

$f(1,35690)$ hat mit $f(a)$ entgegengesetztes Vorzeichen, also ist 1,35690 größer wie die gesuchte Wurzel, und folglich

$$a = 1,35689, \quad b = 1,35690$$

zu setzen. Wir setzen nun $\varepsilon = -0,00001$ und rechnen weiter auf folgende Art:

$$f(1,35690) = -0,000006100991$$

$$f'(1,35690) = -1,47646717$$
$$-0,00001$$
$$0,0000147646717$$

$$f''(1,35690) = 8,1414$$
$$-0,00001$$
$$-0,000081414$$
$$-0,00001$$
$$0,000000000081414$$
$$0,00000000040707$$

$$f'''(1,35690) = 6$$
$$-0,00001$$
$$-0,00006$$
$$-0,00001$$
$$0,0000000006$$
$$0,0000000003$$
$$-0,0001$$
$$-0,000000000000003$$
$$-0,000000000000001$$

$$
\begin{aligned}
f(1{,}35689) &= \begin{array}{r} 0{,}0000147646717 \\ 0{,}00000000040707 \\ \hline 0{,}00001476507877 \\ -\,0{,}000006100991 \\ -\,0{,}000000000000001 \\ \hline -\,0{,}000006100991001 \end{array} \\
&= 0{,}000008664087769
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(1{,}35689) &= \begin{array}{r} -\,1{,}47646717 \\ -\,0{,}000081414 \\ \hline -\,1{,}476548584 \\ 0{,}0000000003 \\ \hline -\,1{,}4765485837 \end{array}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(1{,}35689) &= \begin{array}{r} 8{,}1414 \\ -\,0{,}00006 \\ \hline 8{,}14134 \end{array}
\end{aligned}
$$

$$f'''(1{,}35689) = 6 .$$

Da $f(a)$ und $f''(a)$ gleiche Vorzeichen haben, und $m = 5$, k wieder, wie man leicht auf ähnliche Art, wie oben findet, $= -1$, also $2m + k = 9$ ist; so ist

$$\gamma = 1{,}35689$$

zu setzen, der Bruch

$$-\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{0{,}000008664087769}{1{,}4765485837}$$

bis auf die neunte Ziffer hinter dem Komma zu entwickeln, und die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit zu vermehren. Dies giebt

$$\Gamma = 0{,}000005868$$

und folglich

$$\gamma_1 = \gamma + \Gamma = 1{,}356895868 .$$

Dieser Näherungswerth der gesuchten Wurzel ist bis auf die neunte Decimalziffer hinter dem Komma genau, so daß nämlich, wenn man die gesuchte Wurzel

$$\alpha = 1{,}356895868$$

setzt, der Fehler kleiner als

$$0{,}000000001$$

ist. Der folgende Näherungswerth würde die gesuchte Wurzel bis auf die siebzehnte Stelle genau liefern. Weil aber aus dem Vorhergehenden schon deutlich genug erhellet, wie man weiter gehen könnte; so brechen wir hier ab, und bemerken nur noch, daß die beiden andern reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung bis auf die achte Ziffer hinter dem Komma genau

$$-\,3{,}04891734 \text{ und } +\,1{,}69202147$$

sind.

Fourier hat den numerischen Calcul bei der Auflösung der Zahlengleichungen noch durch eine besondere Methode der gemeinen Division sehr erleichtert, welche allerdings vieles unnütze Rechnen erspart. Da aber dieser Artikel schon zu einer großen Ausdehnung angewachsen ist, und namentlich die theoretische Begründung dieser Methode, welche Fourier ganz unberücksichtigt gelassen hat, keinen geringen Raum in Anspruch nehmen würde; so müssen wir uns begnügen, im Betreff derselben auf Fouriers schon in (69.) angeführtes classisches Werk p. 187. und auf Drobisch Grundzüge der Lehre von den numerischen Gleichungen. Leipzig. 1834. S. 275. zu verweisen. Fourier nennt diese Divisionsmethode die Methode der geordneten Division (division ordonnée). Ob übrigens diese Methode nicht in einigen Punkten noch eine genauere Bestimmung bedürfen möchte, müssen wir für jetzt dahin gestellt seyn lassen.

G. Von der Berechnung der imaginären Wurzeln.

88. Die wirkliche Berechnung der numerischen Werthe der imaginären Wurzeln hat Fourier in seinem Werke, so weit es bis jetzt nach seinem leider zu früh erfolgten Tode erschienen, ganz unberücksichtigt gelassen, und wir werden uns deshalb im Folgenden in dieser Beziehung vorzüglich an Lagrange halten, uns aber überhaupt nur mit einigen allgemeinen Andeutungen über diesen Gegenstand begnügen, indem wir zunächst zeigen, wie sich in jedem Falle die sogenannte Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung unmittelbar aus den Coefficienten derselben bilden oder ableiten läßt, so daß man nämlich bei der Bildung dieser Gleichung durchaus nicht die Wurzeln der gegebenen Gleichung selbst zu kennen braucht.

Sey nämlich wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0$$

die gegebene Gleichung mit lauter reellen Coefficienten und

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

seyen die n reellen oder imaginären Wurzeln derselben. Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen der zweiten Klasse dieser n Wurzeln ist bekanntlich $\frac{1}{2}n(n-1)$. Zieht man nun in jeder dieser Combinationen die beiden Elemente, aus denen dieselbe besteht, von einander ab; so kann dies offenbar auf doppelte Weise geschehen, indem man nämlich entweder das erste von dem zweiten oder umgekehrt das zweite von dem ersten abzieht, und man sieht also hieraus, daß die Anzahl aller Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung jederzeit $n(n-1)$ ist. Zieht man nun alle diese Differenzen von der beliebigen Größe z ab und multiplicirt alle die auf diese Weise erhaltenen Ausdrücke in einander; so ist die entstehende ganze rationale algebraische Function von z, welche wir durch $\varphi(z)$ bezeichnen wollen,

offenbar vom $n(n-1)$sten Grade. Nun erhellet aber leicht, daß die Function $\varphi(z)$ eine ganze rationale algebraische Function von z^2 ist. Sind nämlich α_i und α_k zwei beliebige Glieder der Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n;$$

so kommen unter den Differenzen der Wurzeln jederzeit die beiden Differenzen

$$\alpha_i - \alpha_k \text{ und } \alpha_k - \alpha_i,$$

unter den vorher in einander multiplicirten Factoren also jederzeit die beiden Factoren

$$z - (\alpha_i - \alpha_k) \text{ und } z + (\alpha_i - \alpha_k)$$

vor. Multiplicirt man nun diese beiden Factoren in einander; so erhält man das Product

$$z^2 - (\alpha_i - \alpha_k)^2,$$

und findet also die vorher ausgesprochene Behauptung, daß $\varphi(z)$ eine ganze rationale algebraische Function von z^2 sey, auf der Stelle gerechtfertigt. Wir wollen daher, $z^2 = v$ setzend, von nun an die Function $\varphi(z)$ durch $F(v)$ bezeichnen. Setzen wir nun

$$F(v) = 0;$$

so ist diese Gleichung in Bezug auf v vom $\frac{1}{2}n(n-1)$sten Grade, und die Wurzeln derselben sind die folgenden Quadrate:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2, (\alpha_1 - \alpha_3)^2, (\alpha_1 - \alpha_4)^2, .. (\alpha_1 - \alpha_{n-1})^2, (\alpha_1 - \alpha_n)^2;$$
$$(\alpha_2 - \alpha_3)^2, (\alpha_2 - \alpha_4)^2, .. (\alpha_2 - \alpha_{n-1})^2, (\alpha_2 - \alpha_n)^2;$$
$$(\alpha_3 - \alpha_4)^2, .. (\alpha_3 - \alpha_{n-1})^2, (\alpha_3 - \alpha_n)^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})^2, (\alpha_{n-2} - \alpha_n)^2;$$
$$(\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2.$$

Deshalb nennt man die in Rede stehende Gleichung die Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, und wir wollen nun zeigen, wie dieselbe immer unmittelbar aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung abgeleitet werden kann. Zu dem Ende wollen wir, $\frac{1}{2}n(n-1)$, welches immer eine ganze Zahl ist, $= m$ setzend,

$$F(v) = v^m + c_1 v^{m-1} + c_2 v^{m-2} + .. + c_{m-1} v + c_m = 0$$

setzen, und nun zeigen, wie

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_m$$

jederzeit aus

$$A, B, C, D, \ldots N$$

gefunden werden können. Bezeichnen wir die Summe der kten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $F(v) = 0$ durch Σ_k; so ist nach dem in (28.) bewiesenen Newtonschen Satze

$$c_1 = -\Sigma_1 ,$$
$$c_2 = -\frac{c_1\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} ,$$
$$c_3 = -\frac{c_2\Sigma_1 + c_1\Sigma_2 + \Sigma_3}{3} ,$$
$$c_4 = -\frac{c_3\Sigma_1 + c_2\Sigma_2 + c_1\Sigma_3 + \Sigma_4}{4} ,$$

u. s. w. u. s. w.

Nun ist aber allgemein

$$\begin{aligned}\Sigma_k = (\alpha_1-\alpha_2)^{2k} &+ (\alpha_1-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_1-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_1-\alpha_n)^{2k}\\ &+ (\alpha_2-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_2-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_2-\alpha_n)^{2k}\\ &+ (\alpha_3-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_3-\alpha_n)^{2k}\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &+ (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^{2k}\end{aligned}$$

und folglich offenbar

$$\begin{aligned}2\Sigma_k = (\alpha_1-\alpha_2)^{2k} &+ (\alpha_1-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_1-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_1-\alpha_n)^{2k}\\ &+ (\alpha_2-\alpha_1)^{2k} + (\alpha_3-\alpha_1)^{2k} + (\alpha_4-\alpha_1)^{2k} + \ldots + (\alpha_n-\alpha_1)^{2k}\\ &+ (\alpha_2-\alpha_3)^{2k} + (\alpha_2-\alpha_4)^{2k} + \ldots + (\alpha_2-\alpha_n)^{2k}\\ &+ (\alpha_3-\alpha_2)^{2k} + (\alpha_4-\alpha_2)^{2k} + \ldots + (\alpha_n-\alpha_2)^{2k}\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &+ (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^{2k}\\ &+ (\alpha_n-\alpha_{n-1})^{2k}.\end{aligned}$$

Man erhält also offenbar $2\Sigma_k$ aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$(\alpha_r - \alpha_s)^{2k} ,$$

wenn man, zuerst s unbestimmt lassend, für r die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n, und dann in jeder der auf diese Weise erhaltenen Größen für s ferner ebenfalls die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n setzt, wobei man nur zu bemerken hat, daß Größen wie $(\alpha_r - \alpha_r)^{2k} = 0$ sind. Bezeichnen wir nun die Binomial-Coefficienten der 2kten Potenz nach der Reihe durch

$$(2k)_1, (2k)_2, (2k)_3, (2k)_4, \ldots\ldots ;$$

so ist

$$\begin{aligned}(\alpha_r - \alpha_s)^{2k} = {\alpha_r}^{2k} &- (2k)_1 {\alpha_r}^{2k-1}\alpha_s + (2k)_2 {\alpha_r}^{2k-2}{\alpha_s}^2 - \ldots .\\ &\ldots . - (2k)_{2k-1}\alpha_r {\alpha_s}^{2k-1} + \alpha^{2k} ;\end{aligned}$$

also ist offenbar, wenn wir die Summe der kten Potenzen der Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

der gegebenen Gleichung durch S_k bezeichnen:

$$\begin{aligned}2\Sigma_k = n{\alpha_1}^{2k} &- (2k)_1\alpha_1^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_1^{2k-2}S_2 - \ldots . + S_{2k}\\ &+ n{\alpha_2}^{2k} - (2k)_1\alpha_2^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_2^{2k-2}S_2 - \ldots . + S_{2k}\\ &+ n{\alpha_3}^{2k} - (2k)_1\alpha_3^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_3^{2k-2}S_2 - \ldots . + S_{2k}\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &+ n{\alpha_n}^{2k} - (2k)_1\alpha_n^{2k-1}S_1 + (2k)_2\alpha_n^{2k-2}S_2 - \ldots . + S_{2k}\\ = nS_{2k} &- (2k)_1 S_{2k-1}S_1 + (2k)_2 S_{2k-2}S_2 - \ldots\ldots\ldots\\ &\ldots . - (2k)_2 S_2 S_{2k-2} + (2k)_1 S_1 S_{2k-1} + nS_{2k} .\end{aligned}$$

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens hat $2k+1$ Glieder, und enthält also ein Mittelglied, welches das $(k+1)$ste ist. Da nun dieses Mittelglied offenbar

$$(-1)^k (2k)_k S_k S_k$$

ist; so ist

$$\Sigma_k = nS_{2k} - (2k)_1 S_{2k-1} S_1 + (2k)_2 S_{2k-2} S_2 - \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{k-1} (2k)_{k-1} S_{k+1} S_{k-1} + (-1)^k (2k)_k \cdot \tfrac{1}{2} S_k S_k ,$$

und man kann also, weil man die Potenzensummen $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots.$ jederzeit mittelst der Formeln des Newtonschen Satzes in (28.) aus den Coefficienten

$$A, B, C, D \ldots . N$$

der gegebenen Gleichung berechnen kann, jederzeit auch die Potenzensummen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \ldots.$, und folglich mittelst der oben angegebenen Formeln auch die Coefficienten

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots. c_m$$

der Gleichung $F(v) = 0$ der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung unmittelbar aus den Coefficienten der letztern, ohne die Wurzeln derselben selbst zu kennen, berechnen, welches wir jetzt an dem folgenden Beispiele erläutern wollen.

Die gegebene Gleichung sey

$$x^3 - 7x + 7 = 0 ;$$

so ist

$$A = 0, \quad B = -7, \quad C = 7 .$$

Die Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln dieser Gleichung ist vom dritten Grade, da in diesem Falle $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}.3.2 = 3$ ist. Also ist die Gleichung der Quadrate der Differenzen

$$v^3 + c_1 v^2 + c_2 v + c_3 = 0 .$$

Um nun c_1, c_2, c_3 zu finden, hat man folgende Formeln:

$$c_1 = -\Sigma_1 ,$$
$$c_2 = -\frac{c_1 \Sigma_1 + \Sigma_2}{2} ,$$
$$c_3 = -\frac{c_2 \Sigma_1 + c_1 \Sigma_2 + \Sigma_3}{3} ,$$

und muß also nun zuerst $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ suchen. Nach der vorher gegebenen allgemeinen Formel ist aber

$$\Sigma_1 = 3S_2 - S_1 S_1 ,$$
$$\Sigma_2 = 3S_4 - 4S_3 S_1 + 3S_2 S_2 ,$$
$$\Sigma_3 = 3S_6 - 6S_5 S_1 + 15S_4 S_2 - 10S_3 S_3 .$$

Also muß man nun zuerst $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ berechnen. Dazu dienen die in (28.) angegebenen entwickelten Ausdrücke dieser Summen durch die Coefficienten der gegebenen Glei-

chung. Man wird aber immer mit größerer Leichtigkeit nach den recurrirenden Formeln:

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = -AS_1 - 2B,$$
$$S_3 = -AS_2 - BS_1 - 3C,$$
$$S_4 = -AS_3 - BS_2 - CS_1 - 4D,$$
$$S_5 = -AS_4 - BS_3 - CS_2 - DS_1 - 5E,$$
$$S_6 = -AS_5 - BS_4 - CS_3 - DS_2 - ES_1 - 6F,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

rechnen. Mittelst dieser Formeln erhält man:

$$S_1 = 0,\ S_2 = 14,\ S_3 = -21,\ S_4 = 98,\ S_5 = -245,\ S_6 = 833.$$

Die Coefficienten $D, E, F, \ldots$ sind hier, so wie A, sämmtlich $= 0$, welches die Rechnung sehr erleichtert. Setzt man nun die gefundenen Werthe dieser Potenzensummen in die obigen Ausdrücke für $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$; so ergiebt sich

$$\Sigma_1 = 42,\ \Sigma_2 = 882,\ \Sigma_3 = 18669;$$

und hieraus erhält man endlich:

$$c_1 = -42,\ c_2 = 441,\ c_3 = -49.$$

Also ist

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0$$

die gesuchte Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Für die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

für welche

$$n = 3,\ m = 3,\ A = 0,\ B = -2,\ C = -5,$$

ist, erhalten wir nach und nach:

$$S_1 = 0,\ S_2 = 4,\ S_3 = 15,\ S_4 = 8,\ S_5 = 50,\ S_6 = 91;$$
$$\Sigma_1 = 12,\ \Sigma_2 = 72,\ \Sigma_3 = -1497;$$
$$c_1 = -12,\ c_2 = 36,\ c_3 = 643;$$

und die Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ist folglich in diesem Falle:

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0.$$

89. Die gegebene Gleichung sey wieder

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0;$$

die Gleichung der Quadrate der Differenzen ihrer Wurzeln, zu deren Bildung aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung vorher eine vollständige Anleitung gegeben worden ist, sey wie vorher

$$F(v) = v^m + c_1 v^{m-1} + c_2 v^{m-2} + \ldots + c_{m-1} v + c_m = 0,$$

wo bekanntlich $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ ist. Zwei beliebige reelle oder

imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung können im Allgemeinen durch

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

repräsentirt werden, indem, wenn die eine oder die andere dieser beiden Wurzeln reell ist, β oder β' als verschwindend zu betrachten ist. Das Quadrat der Differenz dieser beiden Wurzeln ist

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha' + \beta'\sqrt{-1})\}^2$$
$$= (\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2 + 2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')\sqrt{-1},$$

und dies ist also die allgemeine Form der Wurzeln der Gleichung für die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung. Diese Wurzeln können also nicht reell seyn, wenn nicht wenigstens eine der beiden Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$ verschwindet. Verschwindet nun zuerst $\beta - \beta'$, ohne daß $\alpha - \alpha'$ verschwindet, so ist die entsprechende reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate, wie wir die Gleichung $F(v) = 0$ der Kürze wegen nennen wollen, positiv; verschwindet ferner $\alpha - \alpha'$, ohne daß $\beta - \beta'$ verschwindet, so ist die entsprechende reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate negativ, nämlich $= -(\beta - \beta')^2$; verschwinden endlich die Differenzen $\alpha - \alpha'$ und $\beta - \beta'$ beide, so ist die entsprechende reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate $= 0$, und folglich auch als positiv zu betrachten. Hieraus ergiebt sich also, daß die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate jederzeit bloß aus zwei solchen Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

der gegebenen Gleichung entstehen können, für welche $\alpha - \alpha' = 0$ ist, ohne daß $\beta - \beta' = 0$ ist, und die entsprechende negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate ist dann immer $= -(\beta - \beta')^2$. Eine negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate kann folglich immer bloß durch die Verbindung zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung von der Form

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha + \beta'\sqrt{-1},$$

wo $\beta - \beta'$ nicht $= 0$ ist, und also auch β, β' nicht zugleich $= 0$ seyn können, entstehen, woraus zugleich ersichtlich ist, daß immer mindestens die eine der beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung, durch deren Verbindung eine negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate entstanden ist, imaginär seyn muß.

90. Zuerst wollen wir nun den Fall näher betrachten, wenn die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate sämmtlich unter einander ungleich sind, und beginnen sogleich mit der Behauptung, daß in diesem Falle jede negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate bloß durch die Verbindung zweier conjugirten imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung entstanden seyn kann, und daß die in $\sqrt{-1}$ multiplicirten

reellen Factoren in allen imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung, diese imaginären Wurzeln also auch selbst, sämmtlich unter einander ungleich sind.

Um dies zu beweisen, wollen wir annehmen, daß überhaupt

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha + \beta'\sqrt{-1}$$

zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, durch deren Verbindung mit einander eine negative reelle Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate entstanden ist; so ist, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, $\beta - \beta'$ nicht $= 0$, und eine der beiden obigen Wurzeln ist immer imaginär. Wäre nun nicht $\beta = -\beta'$; so könnten die beiden folgenden Fälle Statt finden.

I. Es könnte die eine der beiden Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha + \beta'\sqrt{-1},$$

z. B. die erste, reell, also $\beta = 0$ seyn. Dann wäre die andere Wurzel imaginär, d. i. β' nicht $= 0$, und die gegebene Gleichung hätte also nach (19.) auch die imaginäre Wurzel $\alpha - \beta'\sqrt{-1}$. Durch die Verbindung der beiden Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha + \beta'\sqrt{-1}$ mit einander entsteht in diesem Falle, wo $\beta = 0$ ist, die Wurzel

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha + \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -\beta'^2$$

der Gleichung der Differenzenquadrate, und durch Verbindung der Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta'\sqrt{-1}$ mit einander entsteht die Wurzel

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha - \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -\beta'^2$$

der Gleichung der Differenzenquadrate, so daß also diese Gleichung die negative reelle Wurzel $-\beta'^2$ zwei Mal enthalten würde, welches gegen die Voraussetzung ist.

II. Wären ferner die Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha + \beta'\sqrt{-1}$$

der gegebenen Gleichung beide imaginär; so würde diese Gleichung auch die beiden Wurzeln

$$\alpha - \beta\sqrt{-1} \text{ und } \alpha - \beta'\sqrt{-1}$$

haben. Wäre nun β nicht $= -\beta'$; so würde die Gleichung der Differenzenquadrate offenbar sowohl die Wurzel

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha + \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -(\beta - \beta')^2,$$

als auch die Wurzel

$$\{\alpha - \beta\sqrt{-1} - (\alpha - \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -(\beta - \beta')^2;$$

folglich die negative reelle Wurzel $-(\beta - \beta')^2$ auf jeden Fall zwei Mal enthalten, welches wieder gegen die Voraussetzung ist.

Es ist also hierdurch der erste Theil unserer Behauptung, daß, wenn die Gleichung der Differenzenquadrate lauter ungleiche ne-

gative reelle Wurzeln hat, jede dieser Wurzeln bloß durch die Verbindung zweier conjugirten imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung entstanden seyn kann, vollständig gerechtfertigt, und der zweite Theil ergiebt sich hieraus, wie man auf der Stelle übersehen wird, von selbst.

Sind also jetzt

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1},\ \alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' \pm \beta''\sqrt{-1},\ \alpha''' \pm \beta'''\sqrt{-1},\ \ldots.$$

sämmtliche imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung; so sind

$$\{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha - \beta\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta^2,$$
$$\{\alpha' + \beta'\sqrt{-1} - (\alpha' - \beta'\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta'^2,$$
$$\{\alpha'' + \beta''\sqrt{-1} - (\alpha'' - \beta''\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta''^2,$$
$$\{\alpha''' + \beta'''\sqrt{-1} - (\alpha''' - \beta'''\sqrt{-1})\}^2 = -4\beta'''^2,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

die sämmtlichen negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate. Hat man also aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung nach der in (88.) gegebenen ausführlichen Anweisung die Gleichung der Differenzenquadrate gebildet, nach den aus dem Obigen bekannten Methoden zur Bestimmung der reeller Wurzeln der numerischen Gleichungen die sämmtlichen negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate gefunden, und dabei zugleich sich überzeugt, daß alle diese Wurzeln unter einander ungleich sind; so wird, wenn wir die absoluten Werthe dieser Wurzeln durch $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots.$ bezeichnen, durch die Reihe

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho'},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho''},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho'''},\ \ldots\ldots$$

offenbar die Reihe der Größen

$$\beta, \beta', \beta'', \beta''', \ldots\ldots$$

dargestellt, und diese Größen sind also auf diese Weise in dem vorliegenden Falle vollständig bestimmt. Könnte man nun auch die Größen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots.$ bestimmen; so würden sämmtliche imaginäre Wurzeln

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1},\ \alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' \pm \beta''\sqrt{-1},\ \alpha''' \pm \beta'''\sqrt{-1},\ \ldots.$$

der gegebenen Gleichung gefunden seyn. Die Größen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots.$ lassen sich aber in dem vorliegenden Falle, wo, wie wir wissen, die Größen $\beta, \beta', \beta'', \beta''', \ldots.$ sämmtlich unter einander ungleich sind, auf folgende Art bestimmen. In die Function $f(x)$ der gegebenen Gleichung setze man $p \pm q\sqrt{-1}$ für x; so wird sich dieselbe immer auf die Form

$$f(p \pm q\sqrt{-1}) = \varphi(p, q) \pm \psi(p, q)\sqrt{-1}$$

bringen lassen. Setzen wir nun für q z. B. die aus dem Vorhergehenden bekannte Größe β; so erhalten wir

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = \varphi(p, \beta) \pm \psi(p, \beta)\sqrt{-1}.$$

Da $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, so ist

$$f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \varphi(\alpha, \beta) \pm \psi(\alpha, \beta)\sqrt{-1} = 0 ;$$

folglich

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \quad \psi(\alpha, \beta) = 0 .$$

Daher ist $p - \alpha$ ein gemeinschaftlicher Divisor der Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$. Einen andern gemeinschaftlichen Divisor als $p - \alpha$ können aber diese beiden Functionen überhaupt nicht haben. Hätten dieselben nämlich den gemeinschaftlichen Divisor $p - \alpha_1$, und wäre also

$$\varphi(p, \beta) = (p - \alpha_1)\varphi_1(p, \beta), \quad \psi(p, \beta) = (p - \alpha_1)\psi_1(p, \beta) ;$$

so wäre

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha_1)\{\varphi_1(p, \beta) \pm \psi_1(p, \beta)\sqrt{-1}\} ,$$

und folglich

$$f(\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}) = 0 .$$

Also wäre $\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so daß also diese Gleichung die imaginären Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}$ hätte, welches nach dem Obigen ungereimt ist, da in allen imaginären Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung die in $\sqrt{-1}$ multiplicirten reellen Factoren unter einander ungleich sind. Der größte gemeinschaftliche Divisor der Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$ kann also bloß von der Form $(p - \alpha)^k$ seyn. Setzen wir nun

$$\varphi(p, \beta) = (p - \alpha)^k \varphi'(p, \beta), \quad \psi(p, \beta) = (p - \alpha)^k \psi'(p, \beta) ;$$

so ist

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha)^k \{\varphi'(p, \beta) \pm \psi'(p, \beta)\sqrt{-1}\} .$$

Da $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist; so ist

$$f(p \pm q\sqrt{-1}) = (p - \alpha \pm (q - \beta)\sqrt{-1}) f_1(p \pm q\sqrt{-1}) ,$$

und $f_1(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$ ist nicht $= 0$, weil die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzel $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ nur ein Mal enthält. Setzen wir $q = \beta$; so ergiebt sich

$$f(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha) f_1(p \pm \beta\sqrt{-1}) .$$

Also ist

$$f_1(p \pm \beta\sqrt{-1}) = (p - \alpha)^{k-1} \{\varphi'(p, \beta) \pm \psi'(p, \beta)\sqrt{-1}\} .$$

Wäre nun $k - 1$ nicht $= 0$, d. i. k nicht $= 1$; so wäre

$$f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = 0 ;$$

welches gegen das Vorhergehende streitet. Also ist $k = 1$ und $p - \alpha$ ist folglich der größte gemeinschaftliche Divisor der beiden Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$. Sucht man also den größten gemeinschaftlichen Divisor dieser beiden Functionen, und setzt denselben $= 0$; so erhält man eine bloß p als unbekannte Größe enthaltende Gleichung des ersten Grades, welche, nach p aufgelöst, für p einen Werth giebt, der zugleich der Werth von α ist, so daß also auf diese Weise der Werth von α bestimmt ist. Daß man

ganz eben so auch α', α'', α''', ... bestimmen kann, wenn man nur im Vorhergehenden statt der Größe β nach und nach die bekannten Größen β', β'', β''', ... setzt, liegt deutlich vor Augen, so daß man also auf diese Weise in dem Falle, wo alle negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate unter einander ungleich sind, jederzeit alle imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung finden kann. Da man in diesem Falle bestimmt weiß, daß es für die beiden Functionen $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$ jederzeit einen gemeinschaftlichen Divisor vom ersten Grade giebt; so muß, wenn man bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Divisors der beiden genannten Functionen nach der gewöhnlichen Methode auf einen Rest kommt, der in Bezug auf die Größe p vom ersten Grade ist, bei diesem Reste, wenn man nämlich mit demselben von Neuem dividirt, die Division aufgehen, oder dieser Rest, bis zu welchem man also die Rechnung jederzeit bloß fortzusetzen braucht, muß der gesuchte größte gemeinschaftliche Divisor seyn. Setzt man also diesen Rest $= 0$ und bestimmt aus der dadurch entstehenden Gleichung des ersten Grades den Werth von p; so ist dieser Werth zugleich der gesuchte Werth von α.

Allem Vorhergehenden liegt die Voraussetzung zum Grunde, daß die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate sämmtlich unter einander ungleich sind. Ohne uns auf weitere theoretische Entwickelungen einzulassen, wollen wir nun bloß noch angeben, wie man sich zu verhalten hat, wenn die negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate nicht alle unter einander ungleich sind. In dieser Beziehung ist zuerst zu bemerken, daß sich aus jeder nur ein Mal vorkommenden negativen reellen Wurzel der Gleichung der Differenzenquadrate ganz auf dieselbe Weise wie vorher ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung ergiebt, und daß man mit den nur ein Mal vorkommenden negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate überhaupt ganz auf die vorher gelehrte Weise zu verfahren hat. Kommt nun aber unter den negativen reellen Wurzeln der Gleichung der Differenzenquadrate die Wurzel $-\varrho$ z. B. zwei Mal vor; so setze man wieder $\beta = \frac{1}{2}\gamma\varrho$ und suche nach der gewöhnlichen Methode den größten gemeinschaftlichen Divisor von $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$, bleibe aber bei dem Reste stehen, welcher in Bezug auf p vom zweiten Grade ist, setze denselben $= 0$, und löse die auf diese Weise entstehende quadratische Gleichung auf. Ergeben sich nun für diese Gleichung die beiden reellen Wurzeln α, α_1, so sind $\alpha \pm \beta\gamma{-1}$ und $\alpha_1 \pm \beta\gamma{-1}$ vier imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung; sind dagegen die beiden Wurzeln der in Rede stehenden quadratischen Gleichung imaginär, so ergeben sich aus den negativen reellen Wurzeln $-\varrho$, $-\varrho$ der Gleichung der Differenzenquadrate gar keine imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung. Hat ferner die Gleichung der Differenzenquadrate drei der Größe

$-\varrho$ gleiche negative reelle Wurzeln; so setze man wieder $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{\varrho}$, suche den größten gemeinschaftlichen Divisor von $\varphi(p, \beta)$ und $\psi(p, \beta)$ nach der gewöhnlichen Methode, bleibe aber bei einem Reste stehen, welcher in Bezug auf p vom dritten Grade ist, und bilde sich, indem man diesen Rest $= 0$ setzt, eine Gleichung des dritten Grades, welche bekanntlich entweder drei reelle, oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Sind nun im ersten Falle α, α_1, α_2 die drei reellen Wurzeln der in Rede stehenden cubischen Gleichung, so hat die gegebene Gleichung die sechs imaginären Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $\alpha_1 \pm \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha_2 \pm \beta\sqrt{-1}$; im zweiten Falle dagegen, wenn die cubische Gleichung nur die eine reelle Wurzel α hat, ergeben sich aus den drei negativen reellen Wurzeln $-\varrho$, $-\varrho$, $-\varrho$ der Gleichung der Differenzenquadrate auch nur die beiden imaginären Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ der gegebenen Gleichung. Wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat, wird hieraus deutlich genug erhellen. Auch wird es nicht schwer halten, die Gründe dieses Verfahrens aufzufinden, und sich von der Richtigkeit desselben zu überzeugen. Einige ausgeführte Beispiele, so wie andere nützliche Bemerkungen über die imaginären Wurzeln der Gleichungen, s. m. bei Drobisch a. a. O. S. 320 und S. 326.

91. Wir schließen diesen Artikel wieder mit einigen literarischen Bemerkungen. Die schönen völlig strengen Beweise, welche Gauß und Cauchy für den wichtigen Satz in (20.) gegeben haben, sind als die wichtigste Vervollkommnung anzusehen, welche der Theorie der Gleichungen in neuerer Zeit zu Theil geworden ist, da alle ältere Beweise dieses Fundamentalsatzes mehr oder weniger mangelhaft sind, wovon schon in (21.) ausführlich die Rede gewesen ist. Einen Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen, gab Abel in **Crelles Journal der reinen und angew. Math. B. I. S. 65.**; eine frühere Arbeit des italienischen Analysten Ruffini über denselben Gegenstand findet man in den **Memorie di matematica e di fisica della societa italiana delle scienze. P. I. 1803.** Die Auflösung der numerischen Gleichungen aller Grade ist am meisten durch Fourier vervollkommnet worden. Fouriers schon in (69.) angeführtes Werk ist nach seinem Tode von Navier herausgegeben worden, enthält aber in dem bis jetzt erschienenen ersten Theile, wie aus dem vorausgeschickten **exposé synoptique des résultats demontrés dans cet ouvrage** erhellet, bei Weitem nicht alle Entdeckungen Fouriers über die Auflösung der numerischen Gleichungen. Was bis jetzt von diesen Entdeckungen in analytischer Vollständigkeit bekannt geworden, ist in diesem Artikel in ziemlicher Ausführlichkeit mitgetheilt worden. Fourier knüpft seine Untersuchungen fast immer an geometrische Betrachtungen, indem wir dagegen in diesem Artikel stets den rein analytischen Gesichtspunkt festzuhalten, und alle Beweise aus diesem Gesichtspunkte

zu führen gesucht haben, wodurch sich unsere Arbeit von Fouriers Werke wesentlich unterscheidet, und so gern wir auch zuzugeben bereit sind, daß dergleichen geometrische Betrachtungen die deutliche Einsicht in die Natur des Gegenstandes zu befördern geeignet sind; so sind wir doch auch auf der andern Seite überzeugt, daß, von dem streng wissenschaftlichen Standpunkte aus betrachtet, in der reinen Arithmetik auch bloß rein arithmetische Beweise und Betrachtungen an ihrer Stelle sind. Drobisch hat in dem schon in (87.) angeführten Buche nebst den übrigen zur Theorie der Gleichungen nothwendigen Sätzen auch Fouriers Entdeckungen auf eine faßliche Weise vorgetragen und ebenfalls geometrisch erläutert; nur die Theorie der Elimination, namentlich bei Gleichungen des ersten Grades (s. den Artikel Elimination i. d. Z.), hätte wohl in diesem Buche nicht ganz unberücksichtigt bleiben sollen. Stern hat einige Sätze Fouriers wiederherzustellen gesucht (Crelles Journal B. IX. S. 305.); nach unserer Meinung ein sehr verdienstliches Unternehmen. Von den ältern Methoden zur annähernden Auflösung der numerischen Gleichungen ist vorzüglich die auf die Theorie der höhern arithmetischen Reihen gegründete zu nennen, und über dieselbe sind vorzüglich Kramps Elémens d'Arithmetique universelle. Cologne. 1808. p. 385. nachzusehen; auch ist es dem Verfasser dieser Supplemente wohl erlaubt, hier sein eignes Lehrbuch der Mathematik für die obern Classen höherer Lehranstalten. T. I. Zweite Auflage. Brandenburg. 1835. S. 161. zu nennen. Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen mittelst der Kettenbrüche s. m. den Artikel Kettenbruch im dritten Theile dieses Wörterbuchs S. 66.; Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés par Lagrange, nouv. éd. Paris. 1808.; Legendre Théorie des nombres, die zweite Ausgabe Paris. 1808., und vorzüglich Sterns Theorie der Kettenbrüche. Berlin. 1834., abgedruckt aus dem Crelleschen Journal. Von Cauchy's Auflösungsmethode ist in (77—82.) ausführlich die Rede gewesen. Man vergl. aber auch Cauchy cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. P. I. Paris. 1821. p. 460., und desselben Verfassers Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829, einem in jeder Beziehung trefflichen Buche, in dem sich auch Vieles namentlich über die Berechnung der imaginären Wurzeln der numerischen Gleichungen, und über die Auflösung der transcendenten Gleichungen findet. Eine bei gegenwärtigem Artikel mehrfach benutzte Abhandlung Cauchy's ist schon in (21.) angeführt. M. Hirsch Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Thl. I. Berlin. 1809. verbreitet sich vorzüglich über die symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichungen, die Theorie der Elimination und die Transformation der Gleichungen; daß der Verfasser die allgemeine Auflösung der Gleichungen gefunden zu haben glaubte, ist schon in dem Ar-

tikel Algebra im ersten Theile dieser Supplemente erwähnt worden. Von den in neuerer Zeit in großer Anzahl erschienenen Lehrbüchern über die Elemente der Algebra auch nur die bessern zu nennen, wird man mir an diesem Orte gewiß gern erlassen. Lacroixs Lehrbücher verdienen noch immer erwähnt zu werden, und unter den deutschen Werken ist Egen's allgemeine Arithmetik und Algebra, wovon kürzlich eine neue Auflage erschienen, und die sich ganz an die viel gebrauchte Beispielsammlung von Meier Hirsch anschließt, besonders zum Selbststudium recht sehr zu empfehlen. Wegen der vielen zweckmäßigen Beispiele verdient indeß auch noch L'Huiliers schon 1799 erschienene, wie es scheint, nicht nach Verdienst bekannt gewordene Anleitung zur Elementar-Algebra genannt zu werden. Von Eulers Algebra hat Garnier eine recht gute französische Ausgabe mit den Zusätzen von Lagrange, veranstaltet, welche in zwei Bänden zu Paris (1807.) erschienen ist. Ueber Sturms Satz von den Gleichungen s. m. einen besondern Artikel.

Goniometrie.

I. Erklärung des Sinus und Cosinus.

Allgemeine Entwickelung der Grundformeln.

1. Um die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, denken wir uns zwei auf einander senkrechte gerade Linien von unbestimmter Länge in derselben Ebene, welche die Axen genannt werden. Der Durchschnittspunkt derselben heißt der Anfang und mag im Folgenden immer durch **O** bezeichnet werden. Derselbe theilt jede der beiden Axen in zwei Theile von unbestimmter Länge. Den einen dieser beiden Theile nennt man bei jeder Axe den positiven, den andern den negativen Theil. Obgleich es an sich ganz willkührlich ist, welchen der beiden Theile man als den positiven, und welchen man als den negativen annehmen will; so ist es doch nöthig, in dieser Beziehung eine bestimmte Uebereinkunft zu treffen. Wir wollen daher im Folgenden immer die eine Axe in horizontaler, die andere in vertikaler Lage annehmen, und erstere die Abscissenaxe, letztere die Ordinatenaxe nennen. Bei ersterer soll jederzeit der links vom Anfange liegende Theil als der positive, der rechts vom Anfange liegende Theil dagegen als der negative Theil angenommen werden, und auf ähnliche Weise wollen wir den oberhalb von der Abscissenaxe liegenden Theil der Ordinatenaxe als den positiven, den unterhalb der Abscissenaxe liegenden Theil derselben als den negativen Theil annehmen. Auch wollen wir die Seite einer jeden der beiden Axen, auf welcher der positive und negative Theil der andern Axe liegt, respective die positive und negative Seite der erstern Axe nennen.

2. Von einem beliebigen Punkte **M** in der Ebene, in welcher die beiden Axen liegen, denke man sich nun ein Perpendikel

MN auf die Abscissenaxe gefällt; so wird zwischen dem Fußpunkte **N** dieses Perpendikels und dem Anfange **O** ein gewisses Stück **ON** der Abscissenaxe liegen. Dieses Stück **ON** wird als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem es auf dem positiven oder negativen Theile der Abscissenaxe liegt, und dies durch Vorsetzung des Zeichens + oder — vor das Symbol **ON** angedeutet, so daß also + **ON** oder — **ON** anzeigt, daß im erstern Falle die Linie **ON** auf dem positiven, im zweiten Falle dagegen auf dem negativen Theile der Abscissenaxe liegt. Eben so nimmt man auch **MN** als positiv oder negativ an, jenachdem diese Linie auf der positiven oder negativen Seite der Abscissenaxe liegt, und bezeichnet das Erste durch Vorsetzung des Zeichens +, das Zweite durch Vorsetzung des Zeichens —, so daß also + **MN** und — **MN** anzeigt, daß im ersten Falle das Perpendikel **MN** auf der positiven, im zweiten dagegen auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegt. Die Linien **ON** und **MN**, mit Rücksicht auf die Vorzeichen, welche ihnen nach dem Vorhergehenden zukommen, d. h. die Ausdrücke $\pm$ **ON** und $\pm$ **MN**, wo keine Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander Statt findet, heißen die Coordinaten des Punktes **M**, und zwar heißt $\pm$ **ON** die Abscisse, dagegen $\pm$ **MN** die Ordinate dieses Punktes.

3. Durch seine beiden Coordinaten ist die Lage des Punktes **M** in der Ebene, in welcher auch die beiden Axen liegen, offenbar vollkommen bestimmt. Um den Anfang **O** herum liegen nämlich vier rechte Winkel, welche von dem positiven Theile der Abscissenaxe und dem positiven Theile der Ordinatenaxe, von dem positiven Theile der Ordinatenaxe und dem negativen Theile der Abscissenaxe, von dem negativen Theile der Abscissenaxe und dem negativen Theile der Ordinatenaxe, von dem negativen Theile der Ordinatenaxe und dem positiven Theile der Abscissenaxe eingeschlossen werden, und nach dieser Ordnung der erste, zweite, dritte, vierte rechte Winkel genannt werden sollen. Je nachdem nun der Punkt **M** in dem ersten, zweiten, dritten, vierten rechten Winkel liegt, sind seine Coordinaten offenbar

$$+\text{ON},\ +\text{MN};$$
$$-\text{ON},\ +\text{MN};$$
$$-\text{ON},\ -\text{MN};$$
$$+\text{ON},\ -\text{MN};$$

wodurch man die obige Behauptung, daß durch seine beiden Coordinaten die Lage des Punktes **M** vollständig bestimmt werde, gerechtfertigt finden wird. Liegt der Punkt **M** in der Ordinatenaxe, so ist seine Abscisse $= 0$; liegt derselbe dagegen in der Abscissenaxe, so ist seine Ordinate $= 0$; die Coordinaten des Anfangs **O** sind beide $= 0$.

4. Man denke sich jetzt zwei beliebige einander parallele gerade Linien oder Axen, die der Kürze wegen durch **A** und (**A**) bezeichnet werden mögen. Jeder dieser beiden Axen legen wir eine

positive und eine negative Seite bei, und zwar sollen die positive und negative Seite der Axe (A) von dieser Axe an nach derselben Gegend hin liegen, wie die positive und negative Seite der Axe **A** von dieser Axe an. Die Entfernung der Axe (A) von der Axe **A**, mit gehöriger Berücksichtigung ihres Vorzeichens, sey **e**. **M** sey ein beliebiger Punkt in derselben Ebene, in welcher die beiden Axen liegen, und t, (t) seyen die Entfernungen dieses Punktes von den beiden Axen, ebenfalls mit gehöriger Berücksichtigung ihrer Vorzeichen. Ist nun zuerst e positiv, so können in Bezug auf die Lage des Punktes **M** gegen die beiden Axen folgende Fälle Statt finden. Liegt **M** auf der positiven Seite der Axe (A), so sind t und (t) beide positiv; t ist offenbar größer wie (t), und, wie sogleich in die Augen fällt, $t = e + (t)$. Ist $(t) = 0$, so liegt **M** in der durch (A) bezeichneten Axe, die vorhergehende Gleichung findet aber offenbar noch Statt. Liegt **M** auf der negativen Seite der Axe (A), aber auf der positiven Seite der Axe **A**, d. i. zwischen den beiden Axen; so ist (t) negativ, $-(t)$ positiv, t positiv, und offenbar $t + \{-(t)\} = e$, d. i. $t - (t) = e$, oder wieder $t = e + (t)$. Liegt **M** auf der negativen Seite der Axe **A**; so sind t und (t) beide negativ, $-t$ und $-(t)$ beide positiv, $-(t)$ ist größer als $-t$, und offenbar $-(t) = e + (-t) = e - t$, d. i. wieder $t = e + (t)$. Ist $t = 0$, so liegt **M** in der durch **A** bezeichneten Axe, und es ist in diesem Falle offenbar $(t) = -e$, so daß also die vorhergehende Gleichung noch Statt findet. Ist folglich e positiv, so ist in allen Fällen $t = e + (t)$. Ist e negativ, so kann man sich die positive und negative Seite einer jeden der beiden Axen mit einander vertauscht denken. Dann ist das positive $-e$ die Entfernung der Axe (A) von der Axe **A**, und $-t$, $-(t)$ sind die Abstände des Punktes **M** von den beiden Axen mit gehöriger Berücksichtigung ihrer Vorzeichen. Also ist nach dem Vorhergehenden $-t = -e + \{-(t)\} = -e - (t)$, d. i. $t = e + (t)$. Man sieht also, daß für jedes positive und negative e, wenn e, t, (t) die ihnen oben beigelegte Bedeutung behalten, in völliger Allgemeinheit

$$1. \quad t = e + (t)$$

ist.

5. Nimmt man die auf einander senkrechten Axen in anderer Lage an, so ändern sich natürlich auch die Coordinaten des Punktes **M**, und man nennt die Operation, durch welche die Coordinaten eines gegebenen Punktes in Bezug auf zwei Axen, welche man die primitiven Axen nennt, durch seine Coordinaten in Bezug auf zwei andere Axen, welche man die secundären Axen nennt, ausgedrückt werden, Veränderung, Verwandlung oder Transformation der Coordinaten, woraus nun auch von selbst erhellen wird, was man unter primitiven und secundären Coordinaten zu verstehen hat. Die secun-

dären Coordinaten sollen im Folgenden immer durch Einschließung in Parenthesen von den primitiven Coordinaten unterschieden werden. Die primitive Abscisse und Ordinate des neuen Anfangs, d. h. des Durchschnittspunktes der secundären Axen, wollen wir immer respective durch **a** und **b** bezeichnen.

Sind die secundären Axen den primitiven parallel, nämlich die secundäre Abscissenaxe der primitiven Abscissenaxe, die secundäre Ordinatenaxe der primitiven Ordinatenaxe, und werden in beiden Systemen die positiven und negativen Abscissen und Ordinaten von den Anfangspunkten an nach denselben Seiten hin genommen; so folgt aus (1.), weil die dortigen t, (t) sowohl die primitive und secundäre Abscisse, als auch die primitive und secundäre Ordinate bezeichnen können, auf der Stelle, daß immer in völliger Allgemeinheit

$$2. \quad x = a + (x), \quad y = b + (y)$$

ist, wenn x, y und $(x), (y)$ die primitiven und secundären Coordinaten eines und desselben Punktes sind.

6. Denkt man sich jetzt in **Fig. 28.**, wo **Ox** und **Oy** die positiven Theile der beiden Axen sind, eine beliebige durch den Anfang **O** gehende gerade Linie gezogen; so kann dieselbe, wenn sie mit keiner der beiden Axen zusammenfällt, bloß eine der beiden in der Figur dargestellten Lagen haben. In dem ersten dieser beiden Fälle ist, wie sogleich erhellet:

$$\left.\begin{array}{r} +ON : +MN \\ = +ON_1 : +M_1N_1 \\ = +ON_2 : +M_2N_2 \\ = +ON_3 : +M_3N_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} -ON' : -M'N' \\ = -ON'_1 : -M'_1N'_1 \\ = -ON'_2 : -M'_2N'_2 \\ = -ON'_3 : -M'_3N'_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

und im zweiten Falle:

$$\left.\begin{array}{r} +ON : -MN \\ = +ON_1 : -M_1N_1 \\ = +ON_2 : -M_2N_2 \\ = +ON_3 : -M_3N_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} -ON' : +M'N' \\ = -ON'_1 : +M'_1N'_1 \\ = -ON'_2 : +M'_2N'_2 \\ = -ON'_3 : +M'_3N'_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

In beiden Fällen ist also für jeden Punkt der in Rede stehenden geraden Linie das Verhältniß der Abscisse zur Ordinate ein constantes Verhältniß. Bezeichnen wir folglich den Exponenten dieses Verhältnisses durch **A**; so ist für jedes x und y eines und desselben Punktes der geraden Linie $x : y = 1 : A$, d. i.

$$3. \quad y = Ax.$$

Fiele die durch den Anfang gehende gerade Linie mit der Abscissenaxe zusammen, so wäre für jedes x die entsprechende Ordinate y offenbar $= 0$, in obiger Gleichung folglich $A = 0$ zu setzen. Den Fall, wo die in Rede stehende gerade Linie mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, schließen wir jetzt von der Betrachtung

ganz aus, da in demselben offenbar von einem Verhältnisse der Abscisse zur Ordinate im eigentlichen Sinne gar nicht die Rede seyn kann, weil in diesem Falle die Abscisse immer $= 0$ ist, die Ordinate aber jeden beliebigen Werth haben kann. Man nennt die Gleichung $y = Ax$ die Gleichung einer durch den Anfang der Coordinaten gehenden geraden Linie, weil durch dieselbe die zwischen der Abscisse und Ordinate eines jeden Punktes einer solchen Linie Statt findende Relation ganz allgemein algebraisch oder analytisch dargestellt wird.

Vorzüglich wichtig für das Folgende ist die aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebende Bemerkung, daß, wenn $y = Ax$ und $y = A'x$ die Gleichungen zweier durch den Anfang gehenden geraden Linien von den beiden in Fig. 28. dargestellten Lagen sind, die constanten Größen A und A' jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen haben.

7. Man denke sich jetzt zwei beliebige durch den Anfang O gehende auf einander senkrechte gerade Linien. Die Gleichungen dieser beiden Linien sind, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, von der Form

$$y = Ax, \quad y = A'x .$$

Nimmt man nun auf den beiden in Rede stehenden in Fig. 29. dargestellten Linien $OM = OM'$, und fällt von M und M' auf die Abscissenaxe die Perpendikel MN, $M'N'$; so ist, wie auf der Stelle erhellet, $ON = M'N'$ und $MN = ON'$. Die constanten Coefficienten in den beiden obigen Gleichungen haben nach (6.) die absoluten Werthe

$$\frac{MN}{ON} \text{ und } \frac{M'N'}{ON'},$$

oder, weil nach der eben gemachten Bemerkung $M'N' = ON$, $ON' = MN$ ist, die absoluten Werthe

$$\frac{MN}{ON} \text{ und } \frac{ON}{MN},$$

so daß also, weil

$$\frac{MN}{ON} \cdot \frac{ON}{MN} = 1$$

ist, das Product der absoluten Werthe der beiden constanten Coefficienten A und A' jederzeit die Einheit ist. Weil aber die Lage der einen der beiden auf einander senkrechten geraden Linien jederzeit mit dem einen, die Lage der andern der beiden auf einander senkrechten geraden Linien dagegen jederzeit mit dem andern der beiden in (6.) betrachteten Fälle übereinstimmt; so haben A und A' immer entgegengesetzte Vorzeichen, und es ist folglich für jede zwei durch den Anfang O gehende auf einander senkrechte gerade Linien, deren Gleichungen $y = Ax$ und $y = A'x$ sind,

$$4. \quad AA' = -1 .$$

Ist also

$$y = Ax$$

die Gleichung einer beliebigen durch den Anfang gehenden geraden Linie; so ist

$$y = -\frac{1}{A}x$$

jederzeit die Gleichung der auf derselben senkrechten, ebenfalls durch den Anfang gehenden geraden Linie.

8. Wir denken uns jetzt zwei beliebige durch den Anfang gehende auf einander senkrechte neue Axen, und stellen uns folgende Aufgabe:

Die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes M in Bezug auf die primitiven Axen durch die Coordinaten (x), (y) dieses Punktes in Bezug auf die secundären Axen auszudrücken.

Die Gleichung der secundären Abscissenaxe in Bezug auf die primitiven Axen sey

$$y = Ax;$$

so ist nach (7.)

$$y = -\frac{1}{A}x$$

die Gleichung der secundären Ordinatenaxe.

Den positiven Theil der secundären Abscissenaxe wollen wir immer so annehmen, daß er mit dem positiven Theile der primitiven Abscissenaxe auf einer Seite der primitiven Ordinatenaxe liegt, und eben so wollen wir den positiven Theil der secundären Ordinatenaxe jederzeit so annehmen, daß er mit dem positiven Theile der primitiven Ordinatenaxe auf einer Seite der primitiven Abscissenaxe liegt.

Unter diesen Voraussetzungen unterscheiden wir nun bei der Auflösung der obigen Aufgabe die drei folgenden Fälle:

I. Wenn der Punkt **M** in der secundären Abscissenaxe liegt.

II. Wenn der Punkt **M** in der secundären Ordinatenaxe liegt.

III. Wenn der Punkt **M** in keiner der beiden secundären Axen liegt.

Jeden dieser drei Fälle wollen wir im Folgenden näher betrachten.

9. Liegt der Punkt **M** zuerst in der secundären Abscissenaxe, so bilden die den drei Coordinaten x, y, (x) entsprechenden Linien offenbar jederzeit ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die der secundären Abscisse (x) entsprechende Linie ist. Weil nun jedes Quadrat positiv ist; so ist, wie man auf der Stelle übersieht, in völliger Allgemeinheit:

$$5. \quad x^2 + y^2 = (x)^2.$$

Die Gleichung der secundären Abscissenaxe, in welcher der Punkt M liegt, ist nach (8.) die Gleichung $y = Ax$. Daher findet in allen Fällen zwischen den primitiven Coordinaten des Punktes M die Gleichung

$$6. \quad y = Ax$$

Statt, so daß man also jetzt zwischen x, y und (x) die beiden Gleichungen (5.) und (6.) hat, aus denen man sehr leicht in völliger Allgemeinheit

$$7. \quad x^2 = \frac{(x)^2}{1 + A^2}, \quad y^2 = \frac{A^2 (x)^2}{1 + A^2}$$

erhält. Durch Ausziehung der Quadratwurzel würde man nun x und y selbst erhalten, wobei es aber eine besondere Untersuchung, welche hier die Hauptsache ist, erfordert, mit welchen Vorzeichen die Quadratwurzeln zu nehmen sind. Diese Untersuchung läßt sich auf folgende Art anstellen.

Die secundäre Abscissenaxe kann gegen die primitiven Axen bloß eine der beiden in Fig. 28. dargestellten Lagen haben. Im ersten Falle ist nach (6.)

$$A = \frac{+ MN}{+ ON},$$

also positiv. Ist in diesem Falle M der gegebene Punkt, so ist $(x) = + OM$, d. i. positiv, und x, y sind beide positiv. Folglich ist nach (7.)

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Ist dagegen in demselben Falle M' der gegebene Punkt, so ist $(x) = - OM'$, d. i. negativ, und x, y sind beide negativ. Also ist, da A positiv ist, nach (7.) wieder

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen.

In dem zweiten der beiden in Fig. 28. dargestellten Fälle ist nach (6.)

$$A = \frac{- MN}{+ ON},$$

d. i. negativ. Ist in diesem Falle M der gegebene Punkt, so ist $(x) = + OM$, also positiv, und x ist positiv, y dagegen negativ. Folglich ist, weil A negativ ist, nach (7.) wieder

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Ist dagegen in diesem Falle M' der gegebene Punkt, so ist $(x) = - OM'$, d. i. negativ, und x ist negativ, y positiv. Also ist, weil A negativ ist, nach (7.) wieder

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen.

Liegt also der Punkt **M** in der secundären Abscissenaxe, so ist immer

$$8. \quad x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen.

10. Liegt der Punkt **M** ferner in der secundären Ordinatenaxe, so bilden wieder die den Coordinaten x, y, (y) entsprechenden Linien ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die der secundären Ordinate (y) entsprechende Linie ist, und es ist folglich, weil jedes Quadrat positiv ist, immer in völliger Allgemeinheit

$$9. \quad x^2 + y^2 = (y)^2.$$

Da nun die Gleichung der secundären Ordinatenaxe, in welcher **M** liegt, bekanntlich $y = -\frac{1}{A}x$ ist; so hat man zwischen den primitiven Coordinaten des Punktes **M** immer die Gleichung

$$10. \quad y = -\frac{1}{A}x,$$

und findet nun leicht aus (9.) und (10.) in völliger Allgemeinheit

$$11. \quad x^2 = \frac{A^2(y)^2}{1 + A^2}, \quad y^2 = \frac{(y)^2}{1 + A^2}.$$

Durch Ausziehung der Quadratwurzeln würde man x, y selbst erhalten, muß nun aber wieder eine besondere Untersuchung über die Zeichen, mit denen die Quadratwurzeln zu nehmen sind, anstellen.

Die neue Ordinatenaxe kann gegen die primitiven Axen bloß eine der beiden in Fig. 28. dargestellten Lagen haben. In dem ersten der in Fig. 28. dargestellten Fälle ist nach (6.)

$$-\frac{1}{A} = \frac{+MN}{+ON},$$

also **A** negativ. Ist nun **M** der gegebene Punkt, so ist (y) $= +$ **OM**, d. i. positiv, und x, y sind positiv. Also ist, weil **A** negativ ist, nach (11.)

$$x = -\frac{A(y)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{(y)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Ist **M'** der gegebene Punkt, so ist (y) $= -$ **OM'**, d. i. negativ, und x, y sind negativ. Also ist nach (11.) wieder

$$x = -\frac{A(y)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{(y)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen.

Im zweiten Falle ist nach (6.)

$$-\frac{1}{A} = \frac{-MN}{+ON},$$

also **A** positiv. Ist nun in diesem Falle **M** der gegebene Punkt, so ist $(y) = -OM$, d. i. negativ, und **x** ist positiv, **y** dagegen negativ. Also ist nach (11.)

$$x = -\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\quad y = \frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Ist dagegen **M'** der gegebene Punkt, so ist $(y) = +OM'$, d. i. positiv, und **x** ist negativ, **y** positiv. Also ist, weil **A** positiv ist, nach (11.) wieder

$$x = -\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\quad y = \frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen.

Liegt also der Punkt **M** in der secundären Ordinatenaxe, so ist immer

$$12.\quad x = -\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}},\quad y = \frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen.

11. Wir wollen nun zu der Betrachtung des allgemeinsten Falls, wenn der Punkt **M** in keiner der beiden secundären Axen liegt, übergehen, wobei wir bemerken, daß, wenn wir uns größerer Deutlichkeit wegen dabei hier auf Fig. 30. beziehen, die folgenden Betrachtungen doch so allgemein aufgefaßt werden müssen, wie sie es in der That sind. Dieselben sind durchaus nicht auf den in der erwähnten Figur dargestellten speciellen Fall eingeschränkt, sondern gelten in der größten Allgemeinheit, und würden auch ohne diese Figur, die nur größerer Deutlichkeit wegen gezeichnet worden ist, völlig verständlich seyn. Dieselbe mag daher bei dem ersten Durchdenken des Folgenden verglichen, dann aber ganz bei Seite gelegt werden.

Durch den Punkt **M** denke man sich eine mit der Axe der (x) parallele gerade Linie gelegt, welche die Axe der (y) in einem gewissen Punkte schneiden wird, den wir uns durch O_1 bezeichnet denken wollen. Diesen Punkt nehme man als den Durchschnittspunkt zweier mit den secundären Axen der (x) und (y), und zugleich als den Durchschnittspunkt zweier mit den primitiven Axen der **x** und **y** parallelen Axen an, und denke sich also durch den Punkt O_1 sowohl zwei neue mit den Axen der (x) und (y), als auch zwei neue mit den Axen der **x** und **y** parallele Axen gelegt. Die positiven Theile der erstern wollen wir uns durch O_1x_1, O_1y_1, die positiven Theile der letztern durch O_1x_2, O_1y_2 bezeichnet denken, wobei wir zugleich bestimmen, daß die positiven Theile O_1x_1, O_1y_1 von O_1 aus nach denselben Seiten hin wie die positiven Theile O(x), O(y) der secundären Axen der (x),

(y) von O aus, die positiven Theile O_1x_2, O_1y_2 aber von O_1 aus nach denselben Seiten hin wie die positiven Theile Ox, Oy der primitiven Axen der x, y von O aus liegen sollen. Da nun das System der Linien O_1x_2, O_1y_2, O_1x_1 offenbar bloß seinem Orte in der Constructionsebene nach von dem Systeme der Linien Ox, Oy, O(x) verschieden ist; so ist

$$y_2 = Ax_2$$

die Gleichung der Axe der x_1 in Bezug auf die Axen der x_2 und y_2, weil nach der in (8.) gemachten Voraussetzung

$$y = Ax$$

die Gleichung der Axe der (x) in Bezug auf die Axen der x und y ist. Der Punkt M liegt in der Axe der x_1. Also ist nach (8.)

$$13.\quad x_2 = \frac{x_1}{\sqrt{1+A^2}}\,;\quad y_2 = \frac{Ax_1}{\sqrt{1+A^2}},$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Es ist aber klar, daß für jede Lage des Punktes M in völliger Allgemeinheit der Größe und dem Zeichen nach immer $x_1 = (x)$ ist. Also ist immer in völliger Allgemeinheit

$$14.\quad x_2 = \frac{(x)}{\sqrt{1+A^2}}\,,\quad y_2 = \frac{A(x)}{\sqrt{1+A^2}}\,,$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Sind nun a, b die Coordinaten des Punktes O_1 in Bezug auf die primitiven Axen der x und y; so ist nach (2.) in völliger Allgemeinheit

$$15.\quad x = a + x_2\,,\quad y = b + y_2\,.$$

Also ist nach (14.)

$$16.\quad x = a + \frac{(x)}{\sqrt{1+A^2}}\,,\quad y = b + \frac{A(x)}{\sqrt{1+A^2}}\,,$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Der Punkt O_1 liegt aber in der Axe der (y). Also ist nach (12.), da das (y) des Punktes O_1 mit dem (y) des Punktes M in allen Fällen offenbar völlig einerlei ist,

$$17.\quad a = -\frac{A(y)}{\sqrt{1+A^2}}\,,\quad b = \frac{(y)}{\sqrt{1+A^2}}\,,$$

die Quadratwurzel im Nenner positiv genommen. Nach (16.) und (17.) ist folglich, wenn man die Quadratwurzel im Nenner positiv nimmt, in größter Allgemeinheit:

$$18.\quad x = \frac{(x) - A(y)}{\sqrt{1+A^2}}\,,\quad y = \frac{(y) + A(x)}{\sqrt{1+A^2}}\,.$$

12. Die beiden vorhergehenden Formeln sind völlig allgemein, wenn das primitive und secundäre System einerlei Anfangspunkt haben. Ist dies aber nicht der Fall, so bezeichne man die Coordinaten des Anfangspunktes des neuen Systems in Bezug auf das primitive System durch a, b, und denke sich durch

den Anfangspunkt des secundären Systems zwei mit den primitiven Axen parallele Axen gelegt, in Bezug auf welche die Coordinaten eines jeden Punktes durch x_1, y_1 bezeichnet werden sollen. Dann ist nach (18.)

$$x_1 = \frac{(x) - A(y)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y_1 = \frac{(y) + A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen. Weil nun aber nach (2.)

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1$$

ist; so ist für jede zwei rechtwinklige Systeme in völliger Allgemeinheit

$$19. \quad x = a + \frac{(x) - A(y)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = b + \frac{(y) + A(x)}{\sqrt{1 + A^2}},$$

die Quadratwurzel positiv genommen. Obgleich wir diese Formeln zu unserm nächsten Zwecke nicht gebrauchen, so haben wir sie doch kurz entwickelt, weil sie sich aus dem Vorhergehenden mit größter Leichtigkeit ergeben.

13. Man denke sich jetzt um **O** als Mittelpunkt mit dem beliebigen Halbmesser **r** einen Kreis beschrieben, und nehme in dessen Peripherie zwei ganz beliebige Punkte **M** und **M'** an. Ferner lege man durch **O** zwei beliebige auf einander senkrechte Axen, und bezeichne die Coordinaten der Punkte **M** und **M'** in Bezug auf diese Axen respective durch x, y und x', y'. Dann lege man durch **O** noch zwei neue auf einander senkrechte Axen und lasse die Abscissenaxe dieses Systems durch den Punkt **M** gehen. Die Coordinaten der Punkte **M** und **M'** in Bezug auf diese neuen Axen seyen respective (x), (y) und (x'), (y'), wo aber augenblicklich erhellet, daß $(y) = 0$ und (x) seinem absoluten Werthe nach $= r$ ist. Die positiven Theile der beiden Axen werden den in (8.) gegebenen Bestimmungen gemäß genommen. Unter diesen Voraussetzungen ist nach (8.) und (18.), wenn $y = Ax$ die Gleichung der Axe der (x) oder (x') in Bezug auf die beiden primitiven Axen ist,

$$x = \frac{(x)}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y = \frac{A(x)}{\sqrt{1 + A^2}};$$

$$x' = \frac{(x') - A(y')}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad y' = \frac{(y') + A(x')}{\sqrt{1 + A^2}};$$

die Quadratwurzel positiv genommen. Hieraus folgt nach leichter Rechnung in völliger Allgemeinheit

$$20. \quad xx' + yy' = (x)(x'), \quad xy' - x'y = (x)(y').$$

Da (x) positiv ist, wenn **M** im ersten oder vierten, negativ dagegen, wenn **M** im zweiten oder dritten Quadranten liegt, wobei man die in (1.) und (8.) gegebenen Bestimmungen zu berücksichtigen hat; so ist, weil der absolute Werth von (x) dem Halbmesser **r** gleich ist,

21. $xx' + yy' = \pm r(x'), \quad xy' - x'y = \pm r(y')$,

unter der Bedingung, daß man die obern Zeichen nimmt, wenn **M** im ersten oder vierten, die untern dagegen, wenn **M** im zweiten oder dritten Quadranten liegt.

Will man aber der doppelten Vorzeichen überhoben seyn, so vertausche man, wenn **M** im zweiten oder dritten Quadranten liegt, die positiven und negativen Theile der secundären Axen mit einander. Dann ändern (x') und (y') ihre Zeichen, und die obigen Gleichungen werden in den beiden in Rede stehenden Fällen

$$xx' + yy' = -r\{-(x')\}, \quad xy' - x'y = -r\{-(y')\}$$

oder

$$xx' + yy' = r(x'), \quad xy' - x'y = r(y'),$$

so daß man also allgemein

22. $xx' + yy' = r(x'), \quad xy' - x'y = r(y')$

setzen kann, wenn man sich nur an die folgenden Bestimmungen hält:

Wenn **M** im ersten Quadranten liegt, liegt der positive Theil der secundären Abscissenaxe im ersten, der positive Theil der secundären Ordinatenaxe im zweiten rechten Winkel. Wenn **M** im zweiten Quadranten liegt, liegt der positive Theil der secundären Abscissenaxe im zweiten, der positive Theil der secundären Ordinatenaxe im dritten rechten Winkel. Wenn **M** im dritten Quadranten liegt, liegt der positive Theil der secundären Abscissenaxe im dritten, der positive Theil der secundären Ordinatenaxe im vierten rechten Winkel. Wenn **M** im vierten Quadranten liegt, liegt der positive Theil der secundären Abscissenaxe im vierten, der positive Theil der secundären Ordinatenaxe im ersten rechten Winkel. Ueberhaupt wird immer der von **O** nach **M** gezogene Radius als der positive Theil der secundären Abscissenaxe, der positive Theil der secundären Ordinatenaxe aber in dem rechten Winkel angenommen, welcher auf den Quadranten folgt, in dem der Punkt **M** liegt. Der erste rechte Winkel folgt hierbei auf den vierten Quadranten. Alles dieses ist des Folgenden wegen wohl zu berücksichtigen.

14. Nimmt man nun in der Peripherie des um **O** mit dem Radius **r** beschriebenenen Kreises einen beliebigen Punkt **A** an; so kann man von diesem Punkte an die Peripherie offenbar ein oder mehrere Mal nach zwei verschiedenen Richtungen hin durchlaufen, indem man nämlich entweder immer aus jedem Quadranten in den nächst folgenden oder in den nächst vorhergehenden übergeht, wobei immer der erste Quadrant auf den vierten folgt. Jeder von **A** an nach der ersten Richtung hin durchlaufene Bogen soll als positiv, jeder von **A** an nach der zweiten Richtung hin durchlaufene Bogen als negativ betrachtet werden. In beiden Fällen kann man die Peripherie beliebig oft überschreiten. Jeder auf die eine oder andere Art durchlaufene Bogen, welcher, bei **A** anfangend, bei dem beliebigen Punkte **M** der Peripherie sich endigt, soll ein dem Punkte **M** zugehörender Bogen ge-

nannt werden, woraus sogleich erhellet, daß jedem Punkte der Peripherie unendlich viele positive und negative Bogen zugehören können. A wird immer als Anfang betrachtet. Den absoluten Werth der halben Peripherie eines Kreises, dessen Radius $= r$ ist, wollen wir durch p, den absoluten Werth der halben Peripherie eines Kreises, dessen Radius die Einheit ist, dagegen durch π bezeichnen. Dies vorausgesetzt, ist es leicht, den folgenden Satz zu beweisen.

15. Wenn M und M′ (Fig. 31.) zwei beliebige Punkte in der Peripherie des um O mit r als Radius beschriebenen Kreises, und α, α' zwei beliebige den Punkten M, M′ für A als Anfangspunkt zugehörende Bogen sind; so ist immer $\alpha' - \alpha$ ein dem Punkte M′ zugehörender Bogen, wenn man M als Anfangspunkt betrachtet, und die positiven und negativen Bogen von M an nach denselben Seiten hin nimmt, wie von A an.

Um diesen Satz mit völliger Strenge und Deutlichkeit zu beweisen, wollen wir zuerst den Fall besonders betrachten, wenn der absolute Werth keines der Bogen α, α' eine Peripherie übersteigt. In Bezug auf die gegenseitige Lage des Anfangspunktes A und der Punkte M, M′ können offenbar bloß die beiden in Fig. 31. dargestellten Fälle Statt finden, indem man nämlich, wenn man von A aus die positive Richtung verfolgt, entweder zuerst auf den Punkt M, oder zuerst auf den Punkt M′ treffen muß. Rücksichtlich der Vorzeichen der von einander abzuziehenden Bogen können in den beiden so eben angedeuteten Hauptfällen bloß die folgenden verschiedenen Fälle eintreten.

I. In dem ersten der beiden in Fig. 31. dargestellten Fälle:

$$(+AM') - (+AM) = +(AMM' - AM) = +MM',$$
$$(-AM') - (+AM) = -(AM' + AM) = -MM',$$
$$(+AM') - (-AM) = +(AMM' + AM'M) = +(2p + MM'),$$
$$(-AM') - (-AM) = +(AM'M - AM') = +MM'.$$

II. In dem zweiten der beiden in Fig. 31. dargestellten Fälle:

$$(+AM') - (+AM) = -(AM'M - AM') = -MM',$$
$$(-AM') - (+AM) = -(AMM' + AM'M) = -(2p + MM'),$$
$$(+AM') - (-AM) = +(AM' + AM) = +MM',$$
$$(-AM') - (-AM) = -(AMM' - AM) = -MM'.$$

Man sieht also, daß, wenn die absoluten Werthe der Bogen α, α' eine Peripherie nicht übersteigen, die Differenz $\alpha' - \alpha$ immer ein bei M anfangender, bei M′ sich endigender, d. i. ein in Bezug auf M als Anfangspunkt dem Punkte M′ zugehörender Bogen ist, indem man die positiven und negativen Bogen von M an ganz nach derselben Richtung hin nimmt, wie von A an.

Uebersteigen aber die absoluten Werthe der Bogen α, α' eine Peripherie, so kann man immer

$$\alpha = 2kp + \alpha_1, \quad \alpha' = 2k'p + \alpha'_1$$

setzen und annehmen, daß die absoluten Werthe von α_1 und α'_1 eine Peripherie nicht übersteigen, und daß α_1 mit k, α'_1 mit k' gleiches Vorzeichen hat. Also ist

$$\alpha' - \alpha = 2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 .$$

Den positiven oder negativen Bogen $2(k' - k)p$ kann man sich immer sowohl bei **A**, als auch bei **M** anfangend, und respective bei denselben Punkten sich endigend denken. $\alpha'_1 - \alpha_1$ ist nach dem Vorhergehenden ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender Bogen, weil nämlich offenbar α_1 und α'_1 respective den Punkten **M** und **M'** in Bezug auf **A** als Anfangspunkt zugehörende Bogen sind, und nach der Voraussetzung der absolute Werth keines dieser beiden Bogen eine Peripherie übersteigt. Haben also $2(k' - k)p$ und $\alpha'_1 - \alpha_1$ gleiche Vorzeichen, so ist offenbar

$$2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$$

ein bei **M** anfangender, bei **M'** sich endigender, d. i. ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender Bogen. Haben aber $2(k' - k)p$ und $\alpha'_1 - \alpha_1$ entgegengesetzte Vorzeichen, so sey zuerst $2(k' - k)p$ positiv, $\alpha'_1 - \alpha_1$ negativ. Ist $k' - k = 0$, so folgt der Satz unmittelbar aus dem Obigen, weil dann $\alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$ ist. Ist aber $k' - k > 0$, so sey zuerst der absolute Werth von $\alpha'_1 - \alpha_1 \leqq 2p$. Dann ist offenbar

$$2p + \alpha'_1 - \alpha_1$$

ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender positiver Bogen. Also ist auch, wie sogleich erhellet,

$$2(k' - k - 1)p + 2p + \alpha'_1 - \alpha_1 = 2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$$

ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender positiver Bogen. Ist ferner, wie vorher, $k' - k > 0$, der absolute Werth von $\alpha'_1 - \alpha_1$ aber $> 2p$, jedoch, weil der absolute Werth keines der beiden Bogen α_1, α'_1 eine Peripherie übersteigt, nicht $> 4p$; so sey

$$\alpha'_1 - \alpha_1 = -2p - \alpha'',$$

wo α'' ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender positiver Bogen ist, dessen Werth, weil der absolute Werth von $\alpha'_1 - \alpha_1$ nicht $> 4p$ ist, eine Peripherie nicht übersteigt oder $\leqq 2p$ ist. Es ist folglich

$$2(k' - k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = 2(k' - k)p - 2p - \alpha'' = 2(k' - k - 1)p - \alpha'' = \alpha' - \alpha.$$

Hier ist $2(k' - k - 1)p$ positiv und $-\alpha''$ ist ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender Bogen, dessen

absoluter Werth $\gtrless 2p$ ist, so daß wir also jetzt wieder ganz den vorher betrachteten Fall haben, und folglich auch in diesem Falle $\alpha' - \alpha$ ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen ist.

Ferner sey zweitens $2(k'-k)p$ negativ, $\alpha'_1 - \alpha_1$ positiv. Der Bogen

$$2(k-k')p + \alpha_1 - \alpha'_1,$$

wo $2(k-k')p$ positiv, $\alpha_1 - \alpha'_1$ negativ ist, ist nach dem Vorhergehenden ein dem Punkte M in Bezug auf M' als Anfangspunkt zugehörender Bogen. Denkt man sich nun diesen Bogen nach der durch sein Vorzeichen vorgeschriebenen Richtung von M' bis M wirklich durchlaufen, und legt dann denselben Weg von M bis M' wieder nach entgegengesetzter Richtung zurück; so hat man jetzt offenbar den Bogen

$$-\{2(k-k')p + \alpha_1 - \alpha'_1\} = 2(k'-k)p + \alpha'_1 - \alpha_1 = \alpha' - \alpha$$

von M bis M' durchlaufen, woraus also unmittelbar hervorgeht, daß dieser Bogen ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen ist, wie bewiesen werden sollte.

Der Bogen $\alpha' - \alpha$ ist folglich in allen Fällen ein dem Punkte M' in Bezug auf M als Anfangspunkt zugehörender Bogen, welches der zu beweisende Satz war.

16. Wir denken uns nun wieder um den Durchschnittspunkt O der Coordinatenaxen mit dem beliebigen Halbmesser r einen Kreis beschrieben, und nehmen den Punkt A, in welchem die Peripherie dieses Kreises von dem positiven Theile der Axe der x geschnitten wird, als Anfangspunkt der Bogen (14.) an. Ist nun M ein beliebiger Punkt in der Peripherie des beschriebenen Kreises, so heißt die Abscisse dieses Punktes der Cosinus, die Ordinate dagegen der Sinus eines jeden dem Punkte M in Bezug auf A als Anfangspunkt zugehörenden Bogens für den Radius r. Auch nennt man den Cosinus und Sinus eines Bogens den Cosinus und Sinus des von diesem Bogen gemessenen Winkels am Mittelpunkte, wobei man zu bemerken hat, daß die Winkel immer mit demselben Vorzeichen genommen werden, wie die Bogen, welche diese Winkel messen.

Bezeichnet α einen beliebigen positiven oder negativen Bogen, oder den von diesem Bogen gemessenen, immer mit demselben Vorzeichen zu nehmenden, Winkel; so soll der Sinus und Cosinus dieses Bogens oder Winkels, wenn r der Radius ist, durch $\mathrm{Sin}\,\alpha$ und $\mathrm{Cos}\,\alpha$ bezeichnet werden. Setzt man aber den Radius r der Einheit gleich, so sollen der Sinus und Cosinus des Bogens oder Winkels α durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bezeichnet werden.

Aus der obigen Erklärung des Sinus und Cosinus eines Bogens ergiebt sich unmittelbar der für das Folgende nicht un-

wichtige Satz, daß alle ein und demselben Punkte in der Peripherie des um **O** beschriebenen Kreises zugehörende Bogen gleiche Sinus und Cosinus haben, so wie umgekehrt jeder Sinus und Cosinus zu unendlich vielen verschiedenen Bogen gehören kann.

17. Sind nun α, α' zwei ganz beliebige den ganz beliebigen Punkten **M**, **M'** in der Peripherie des mit dem beliebigen Radius **r** um **O** als Mittelpunkt beschriebenen Kreises in Bezug auf **A** als Anfangspunkt zugehörende Bogen; so ist, wenn x, y und x', y' die Coordinaten der Punkte **M** und **M'** sind, wobei man sich immer den positiven Theil der Axe der **x** oder **x'** von **O** aus nach dem Punkte **A** gezogen denken muß, nach (16.)

$$x = \mathrm{Cos}\,\alpha, \quad y = \mathrm{Sin}\,\alpha; \quad x' = \mathrm{Cos}\,\alpha', \quad y' = \mathrm{Sin}\,\alpha' .$$

Durch **O** lege man zwei neue auf einander senkrechte Axen, lasse die neue Abscissenaxe durch den Punkt **M** gehen, und nehme die positiven Theile dieser neuen Axen ganz den in (13.) gegebenen Bestimmungen gemäß; so ist, wenn wir die Coordinaten von **M'** in Bezug auf diese neuen Axen durch (x'), (y') bezeichnen, nach (22.) allgemein

$$r(x') = xx' + yy', \quad r(y') = xy' - x'y .$$

Ferner ist nach (15.) $\alpha' - \alpha$ ein dem Punkte **M'** in Bezug auf **M** als Anfangspunkt zugehörender Bogen. Denkt man sich nun das System der secundären Axen nach der Ordnung der aus dem Obigen bekannten vier rechten Winkel um den Punkt **O** herumgedreht, bis es mit dem Systeme der primitiven Axen zusammenfällt, wobei man immer die in (13.) wegen der positiven Theile der secundären Axen gegebenen Bestimmungen im Auge zu behalten hat; so ist klar, daß in allen Fällen

$$(x') = \mathrm{Cos}\,(\alpha' - \alpha), \quad (y') = \mathrm{Sin}\,(\alpha' - \alpha) ,$$

und folglich wegen der beiden obigen Gleichungen in größter Allgemeinheit für jedes beliebige positive oder negative α und α'

$$23. \quad r\,\mathrm{Cos}\,(\alpha' - \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha',$$

$$24. \quad r\,\mathrm{Sin}\,(\alpha' - \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha' - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha',$$

oder, wenn man größerer Einfachheit wegen jetzt α, β respective für α', α setzt, in völliger Allgemeinheit:

$$25. \quad r\,\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta) = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta ,$$

$$26. \quad r\,\mathrm{Sin}\,(\alpha - \beta) = \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta .$$

Diese beiden Gleichungen sind das Fundament alles Folgenden, weshalb wir hier auf den völlig strengen und allgemeinen Beweis derselben alle nur mögliche Sorgfalt verwandt haben.

Denkt man sich mit einem der Einheit gleichen Radius um **O** als Mittelpunkt einen zweiten Kreis beschrieben; so ist klar, daß in allen Fällen $\mathrm{Sin}\,\alpha$, $\sin\alpha$ und $\mathrm{Cos}\,\alpha$, $\cos\alpha$ gleiche Vorzeichen haben, und daß die den Größen r, $\mathrm{Sin}\,\alpha$, $\mathrm{Cos}\,\alpha$ und 1, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ entsprechenden Linien jederzeit zwei einander ähnliche rechtwinklige Dreiecke bilden. Daher ist immer

$$1 : r = \cos\alpha : \mathrm{Cos}\,\alpha = \sin\alpha : \mathrm{Sin}\,\alpha ,$$

d. i. in völliger Allgemeinheit

$$27.\quad \mathrm{Cos}\,\alpha = r\cos\alpha ,$$

$$28.\quad \mathrm{Sin}\,\alpha = r\sin\alpha .$$

Man findet also $\mathrm{Cos}\,\alpha$, $\mathrm{Sin}\,\alpha$ aus $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ sehr leicht, wenn man $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ bloß mit r multiplicirt, und ist also berechtigt, im Folgenden, der Einfachheit wegen, immer $r = 1$ zu setzen.

Für $r = 1$ erhält man aus (25.) und (26.) auf der Stelle in völliger Allgemeinheit

$$29.\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta ,$$

$$30.\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta ,$$

zwei Formeln, auf denen wir nun unsere ganze Wissenschaft aufbauen wollen.

II. Erklärung der übrigen goniometrischen Functionen. Relationen der goniometrischen Functionen unter einander.

18. Der Bruch $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ heißt die Tangente des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$31.\quad \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

bezeichnet.

Der Bruch $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ heißt die Cotangente des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$32.\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

bezeichnet.

Der reciproke Cosinus, d. h. der Bruch $\frac{1}{\cos\alpha}$, heißt die Secante des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$33.\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

bezeichnet.

Der reciproke Sinus, d. h. der Bruch $\frac{1}{\sin\alpha}$, heißt die Cosecante des Bogens oder Winkels α und wird durch

$$34.\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

bezeichnet.

Die Ergänzung des Cosinus zur Einheit, d. h. die Differenz $1 - \cos\alpha$, nennt man den Sinus versus des Bogens oder Winkels α und bezeichnet dieselbe durch

$$35.\quad \mathrm{sinv}\,\alpha = 1 - \cos\alpha .$$

Die Ergänzung des Sinus zur Einheit, d. h. die Differenz $1 - \sin\alpha$, nennt man den Cosinus versus des Bogens oder Winkels α und bezeichnet dieselbe durch

$$36.\quad \operatorname{cosv}\alpha = 1 - \sin\alpha .$$

Aus (31.) und (32.) folgt auf der Stelle

$$37.\quad \operatorname{tang}\alpha \cot\alpha = 1$$

und aus (31.), (33.), (34.) folgt

$$38.\quad \sec\alpha = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{cosec}\alpha .$$

19. Jeden Winkel oder Bogen α kann man immer als die Differenz zweier andern Bogen betrachten. Setzen wir also

$$\alpha = \Theta - \Theta', \quad -\alpha = \Theta' - \Theta ;$$

so ist nach (29.) und (30.)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin\Theta\cos\Theta' - \cos\Theta\sin\Theta' ,\\
\cos\alpha &= \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta' ,\\
\sin(-\alpha) &= \sin\Theta'\cos\Theta - \cos\Theta'\sin\Theta\\
&= -\{\sin\Theta\cos\Theta' - \cos\Theta\sin\Theta'\} ,\\
\cos(-\alpha) &= \cos\Theta'\cos\Theta + \sin\Theta'\sin\Theta\\
&= \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta' .
\end{aligned}$$

Also ist in völliger Allgemeinheit

$$39.\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha ,$$

$$40.\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha .$$

Setzen wir nun in den beiden Fundamentalformeln $-\beta$ für β; so wird

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)\\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta ,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)\\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta ,
\end{aligned}$$

und wir erhalten folglich in Verbindung mit den beiden Fundamentalformeln die beiden folgenden höchst wichtigen ganz allgemeinen Ausdrücke:

$$41.\quad \sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta ,$$

$$42.\quad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta .$$

20. Aus der Definition des Sinus und Cosinus ergiebt sich unmittelbar, daß für jedes ganze positive oder negative n

$$43.\quad \sin n\pi = \sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi) = 0 ,$$

$$44.\quad \cos n\pi = \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi) = (-1)^n$$

ist. Man überzeugt sich hiervon augenblicklich, wenn man nur bedenkt, daß sich $\sin n\pi$ und $\cos n\pi$ für jedes ganze positive oder negative n auf die beiden Endpunkte des durch den Anfang aller Bogen gezogenen Durchmessers beziehen, und daß für diese beiden Punkte der Sinus offenbar immer $= 0$, der Cosinus dagegen $= +1$ oder $= -1$ ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Eben so folgt aus der Erklärung des

Sinus und Cosinus unmittelbar die Richtigkeit der beiden folgenden Formeln:

$$45.\quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1, \qquad 46.\quad \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0\,.$$

Also ist, wenn n immer eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\begin{aligned}\sin\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\} &= \sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi)\\ &= \sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}\pi + \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}\pi\\ &= \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi) = (-1)^n \ (44.)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\} &= \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi)\\ &= \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}\pi - \sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}\pi\\ &= 0 \ (43.)\,.\end{aligned}$$

Folglich ist für jedes ganze positive oder negative n

$$47.\quad \sin\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\} = (-1)^n\,,$$
$$48.\quad \cos\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\} = 0\,.$$

Ferner ist, wenn α einen beliebigen positiven oder negativen Bogen bezeichnet:

$$\sin(n\pi+\alpha) = \sin n\pi\cos\alpha + \cos n\pi\sin\alpha = \sin\alpha\cdot(-1)^n\,,$$
$$\cos(n\pi+\alpha) = \cos n\pi\cos\alpha - \sin n\pi\sin\alpha = \cos\alpha\cdot(-1)^n\,;$$

also ist immer

$$49.\quad \sin(n\pi+\alpha) = \sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \sin\alpha\cdot(-1)^n\,,$$
$$50.\quad \cos(n\pi+\alpha) = \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \cos\alpha\cdot(-1)^n\,,$$

und, wenn man hierin $-\alpha$ für α setzt, nach (39.) und (40.)

$$51.\quad \sin(n\pi-\alpha) = \sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) = -\sin\alpha\cdot(-1)^n\,,$$
$$52.\quad \cos(n\pi-\alpha) = \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) = \cos\alpha\cdot(-1)^n\,.$$

Für $n=1$ erhält man

$$53.\quad \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha\,,$$
$$54.\quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha\,,$$
$$55.\quad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha\,,$$
$$56.\quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha\,,$$
$$57.\quad \sin(\pi\pm\alpha) = \mp\sin\alpha\,,$$
$$58.\quad \cos(\pi\pm\alpha) = -\cos\alpha\,.$$

Auch ist in völliger Allgemeinheit

$$59.\quad \sin(n\pi+\alpha) = -\sin(n\pi-\alpha)\,,$$
$$60.\quad \cos(n\pi+\alpha) = \cos(n\pi-\alpha)\,,$$
$$61.\quad \sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = -\sin(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\,,$$
$$62.\quad \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\alpha) = \cos(2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\,.$$

Ferner ist

$$\sin\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = \sin\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\}\cos\alpha + \cos\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\}\sin\alpha\,,$$
$$\cos\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\alpha\} = \cos\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\}\cos\alpha - \sin\{(2n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\}\sin\alpha\,.$$

Also ist nach (47.), (48.) und, wenn man zugleich $-\alpha$ für α setzt, nach (39.) und (40.)

63. $\sin\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = \cos\alpha.(-1)^n$,
64. $\cos\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\sin\alpha.(-1)^n$,
65. $\sin\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = \cos\alpha.(-1)^n$,
66. $\cos\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = \sin\alpha.(-1)^n$,
67. $\sin\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi \pm \alpha\} = \cos\alpha.(-1)^n$,
68. $\cos\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi \pm \alpha\} = \mp\sin\alpha.(-1)^n$,
69. $\sin\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = \sin\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\}$,
70. $\cos\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\cos\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\}$.

Für $n = 0$ erhält man:

71. $\sin(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$,
72. $\cos(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$,
73. $\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$,
74. $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$.

Da $(\frac{1}{2}\pi - \alpha) + \alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ das Complement des Bogens α. Da nun nach (71.)

$$\cos\alpha = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)$$

ist; so ist der Cosinus eines Bogens nichts anders als der Sinus des Complements dieses Bogens, welches zu der Benennung Cosinus (complementi sinus) Veranlassung gegeben haben mag.

Für die übrigen goniometrischen Functionen erhält man nun aus deren Definitionen in (18.) und den vorher für die Sinus und Cosinus entwickelten ganz allgemeinen Formeln leicht die folgenden ebenfalls ganz allgemeinen Ausdrücke:

75. $\operatorname{tang} n\pi = \operatorname{tang}(2n.\frac{1}{2}\pi) = \frac{0}{(-1)^n} = 0$,

76. $\cot n\pi = \cot(2n.\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{0}.(-1)^n = \infty.(-1)^n$,

77. $\sec n\pi = \sec(2n.\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$,

78. $\operatorname{cosec} n\pi = \operatorname{cosec}(2n.\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{0} = \infty$,

79. $\operatorname{sinv} n\pi = \operatorname{sinv}(2n.\frac{1}{2}\pi) = 1 - (-1)^n$,

80. $\operatorname{cosv} n\pi = \operatorname{cosv}(2n.\frac{1}{2}\pi) = 1$.

Ferner ist

81. $\operatorname{tang}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = \frac{(-1)^n}{0} = \frac{1}{0}.(-1)^n = \infty.(-1)^n$,

82. $\cot\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = \frac{0}{(-1)^n} = 0$,

83. $\sec\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = \frac{1}{0} = \infty$,

84. $\operatorname{cosec}\{2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$,

85. $\text{sinv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = 1$,

86. $\text{cosv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi\} = 1 - (-1)^n$.

Ferner ist

87. $\text{tang}(n\pi+\alpha) = \text{tang}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = \text{tang}\,\alpha$,

88. $\cot(n\pi+\alpha) = \cot(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = \cot\alpha$,

90. $\sec(n\pi+\alpha) = \sec(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

90. $\text{cosec}(n\pi+\alpha) = \text{cosec}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha.(-1)^n} = \text{cosec}\,\alpha.(-1)^n$,

91. $\text{sinv}(n\pi+\alpha) = \text{sinv}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$,

92. $\text{cosv}(n\pi+\alpha) = \text{cosv}(2n.\frac{1}{2}\pi+\alpha) = 1 - \sin\alpha.(-1)^n$,

und auf ähnliche Art:

93. $\text{tang}(n\pi-\alpha) = \text{tang}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\frac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = -\text{tang}\,\alpha$,

94. $\cot(n\pi-\alpha) = \cot(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\frac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = -\cot\alpha$,

95. $\sec(n\pi-\alpha) = \sec(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

96. $\text{cosec}(n\pi-\alpha) = \text{cosec}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\frac{1}{\sin\alpha.(-1)^n} = -\text{cosec}\,\alpha.(-1)^n$,

97. $\text{sinv}(n\pi-\alpha) = \text{sinv}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$,

98. $\text{cosv}(n\pi-\alpha) = \text{cosv}(2n.\frac{1}{2}\pi-\alpha) = 1 + \sin\alpha.(-1)^n$.

Also ist auch

99. $\text{tang}(n\pi+\alpha) = -\text{tang}(n\pi-\alpha)$,

100. $\cot(n\pi+\alpha) = -\cot(n\pi-\alpha)$,

101. $\sec(n\pi+\alpha) = \sec(n\pi-\alpha)$,

102. $\text{cosec}(n\pi+\alpha) = -\text{cosec}(n\pi-\alpha)$,

103. $\text{sinv}(n\pi+\alpha) = \text{sinv}(n\pi-\alpha)$,

104. $\text{cosv}(n\pi+\alpha) + \text{cosv}(n\pi-\alpha) = 2$.

Für $n = 1$ erhält man:

105. $\text{tang}(\pi \pm \alpha) = \pm\,\text{tang}\,\alpha$,

106. $\cot(\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha$,

107. $\sec(\pi \pm \alpha) = -\sec\alpha$,

108. $\text{cosec}(\pi \pm \alpha) = \mp\,\text{cosec}\,\alpha$,

109. $\text{sinv}(\pi \pm \alpha) = 1 + \cos\alpha$,

110. $\text{cosv}(\pi \pm \alpha) = 1 \pm \sin\alpha$.

Für $n = 0$ erhält man:

111. $\text{tang}(-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha$,

112. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$,

113. $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$,

114. $\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$,

115. $\text{sinv}(-\alpha) = \text{sinv}\,\alpha$,

116. $\text{cosv}(-\alpha) = 2 - \text{cosv}\,\alpha$.

Ferner erhält man:

117. $\text{tang}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\frac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = -\cot\alpha$,

118. $\cot\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\frac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = -\text{tang}\,\alpha$,

119. $\sec\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\frac{1}{\sin\alpha.(-1)^n} = -\text{cosec}\,\alpha.(-1)^n$,

120. $\text{cosec}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = \frac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

121. $\text{sinv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = 1 + \sin\alpha.(-1)^n$,

122. $\text{cosv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$,

und eben so

123. $\text{tang}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = \frac{\cos\alpha.(-1)^n}{\sin\alpha.(-1)^n} = \cot\alpha$,

124. $\cot\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = \frac{\sin\alpha.(-1)^n}{\cos\alpha.(-1)^n} = \text{tang}\,\alpha$,

125. $\sec\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = \frac{1}{\sin\alpha.(-1)^n} = \text{cosec}\,\alpha.(-1)^n$,

126. $\text{cosec}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = \frac{1}{\cos\alpha.(-1)^n} = \sec\alpha.(-1)^n$,

127. $\text{sinv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = 1 - \sin\alpha.(-1)^n$

128. $\text{cosv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = 1 - \cos\alpha.(-1)^n$.

Also

129. $\text{tang}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\text{tang}\{2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

130. $\cot\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\cot\{2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

131. $\sec\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = -\sec\{2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

132. $\text{cosec}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = \text{cosec}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\}$,

133. $\text{sinv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} + \text{sinv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\} = 2$,

134. $\text{cosv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi + \alpha\} = \text{cosv}\{(2n+1).\frac{1}{2}\pi - \alpha\}$.

Für $n = 0$ erhält man:

135. $\tang(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \mp \cot\alpha$,

136. $\cot(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \mp \tang\alpha$,

137. $\sec(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \mp \operatorname{cosec}\alpha$,

138. $\operatorname{cosec}(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = \sec\alpha$,

139. $\sinv(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = 1 \pm \sin\alpha$,

140. $\cosv(\frac{1}{2}\pi \pm \alpha) = 1 - \cos\alpha$.

Auch ist

141. $\sinv(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = 1 - \sin\alpha = \cosv\alpha$,

142. $\cosv(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = 1 - \cos\alpha = \sinv\alpha$.

In den Formeln

$$\cot\alpha = \tang(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha),$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = \sec(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha),$$
$$\cosv\alpha = \sinv(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha),$$

liegt der Grund der Benennungen Cotangente, Cosecante, Cosinus versus, auf ähnliche Art wie beim Cosinus.

21. Nimmt man in der Formel (42.) das untere Zeichen und setzt $\alpha = \beta$; so ist, weil nach (44.) in diesem Falle $\cos(\alpha - \beta) = \cos 0 = 1$ ist:

143. $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$

für jedes α. Folglich ist

144. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos\alpha^2}$,

145. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha^2}$.

In der Formel (144.) ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im ersten oder zweiten Quadranten liegt, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im dritten oder vierten Quadranten liegt, welches sich immer leicht beurtheilen lassen wird. In der Formel (145.) ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im ersten oder vierten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt dieses Bogens im zweiten oder dritten Quadranten liegt.

Aus (31.) und (143.) und eben so aus (32.) und (143.) ergiebt sich

$$1 + \tang\alpha^2 = \frac{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} = \frac{1}{\cos\alpha^2},$$

$$1 + \cot\alpha^2 = \frac{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2}{\sin\alpha^2} = \frac{1}{\sin\alpha^2}.$$

Folglich ist nach (33.) und (34.)

146. $1 + \tang\alpha^2 = \sec\alpha^2$,

147. $1 + \cot\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2$.

Also

$$148. \quad \sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tang}\alpha^2},$$

$$149. \quad \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1 + \cot\alpha^2}.$$

Weil

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

ist; so hat die Secante immer gleiches Zeichen mit dem Cosinus, die Cosecante immer gleiches Zeichen mit dem Sinus. In der Formel (148.) muß man daher die Quadratwurzel positiv nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im ersten oder vierten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im zweiten oder dritten Quadranten liegt. In der Formel (149.) muß man die Quadratwurzel positiv nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im ersten oder zweiten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im dritten oder vierten Quadranten liegt.

Auch ist

$$150. \quad \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\sec\alpha^2 - 1},$$

$$151. \quad \cot\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}\alpha^2 - 1}.$$

Weil nun immer

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist; so ist klar, daß die Tangente und Cotangente eines Bogens oder Winkels jederzeit positiv oder negativ sind, jenachdem der Sinus und Cosinus dieses Bogens gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. In den Formeln (150.) und (151.) sind also die Quadratwurzeln positiv zu nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens α im ersten oder dritten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens α im zweiten oder vierten Quadranten liegt.

22. Aus

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta},$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cos\beta}$$

folgt leicht, wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruchs durch $\cos\alpha\cos\beta$ oder $\sin\alpha\sin\beta$, Zähler und Nenner des zweiten durch $\sin\alpha\cos\beta$ oder $\sin\alpha\sin\beta$ dividirt:

$$152. \quad \operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta},$$

$$153. \quad \operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta \mp 1},$$

154. $$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \mp \tang\beta}{1 \pm \cot\alpha \tang\beta},$$

155. $$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}.$$

Setzt man in den Formeln (41.), (42.), (152.), (155.) $\alpha = \beta$, indem man zugleich die obern Zeichen nimmt; so erhält man:

156. $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

157. $$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2,$$

158. $$\tang 2\alpha = \frac{2\tang\alpha}{1 - \tang\alpha^2},$$

159. $$\cot 2\alpha = \frac{\cot\alpha^2 - 1}{2\cot\alpha}.$$

Da ferner nach (143.)

$$\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2, \quad \sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$$

ist; so erhält man aus (157.) leicht

160. $$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha^2 = 2\cos\alpha^2 - 1.$$

Setzt man in (153.) und (154.) $\alpha = \beta$, so erhält man, weil nach (37.) $\tang\alpha\cot\alpha = 1$ ist:

161. $$\tang 2\alpha = \frac{2\cot\alpha}{\cot\alpha^2 - 1},$$

162. $$\cot 2\alpha = \tfrac{1}{2}(\cot\alpha - \tang\alpha).$$

23. Aus (160.) ergiebt sich

163. $$\sin\alpha^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

164. $$\cos\alpha^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

oder, wenn man $\frac{1}{2}\alpha$ für α setzt:

165. $$\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

166. $$\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

Also ist

167. $$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$

168. $$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}},$$

mit der Bestimmung, daß man in der ersten dieser beiden Formeln die Quadratwurzel positiv zu nehmen hat, wenn der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im ersten oder zweiten, negativ dagegen, wenn der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im dritten oder vierten Quadranten liegt. In der zweiten der beiden obigen Formeln muß man die Quadratwurzel positiv nehmen, wenn der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im ersten oder vierten, negativ dagegen, wenn der

Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, welches sich immer leicht beurtheilen lassen wird.

Nach (143.) und (156.) ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 \pm 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1 \pm \sin\alpha,$$

d. i.

$$169.\quad (\sin\tfrac{1}{2}\alpha \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 1 \pm \sin\alpha$$

und folglich

$$170.\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$171.\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha},$$

wo nun aber noch eine besondere Bestimmung nöthig ist, mit welchen Vorzeichen man in diesen Formeln die Quadratwurzeln zu nehmen hat, die sich auf folgende Art geben läßt. Nach (157.) ist immer

$$\sqrt{1+\sin\alpha}\,.\,\sqrt{1-\sin\alpha} = (\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha)(\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = -\cos\alpha;$$

also haben $\sqrt{1+\sin\alpha}$ und $\sqrt{1-\sin\alpha}$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen, je nachdem $\cos\alpha$ negativ oder positiv ist. Kennt man also nur das Vorzeichen, mit dem die eine der beiden in Rede stehenden Quadratwurzeln genommen werden muß; so kennt man auch das Vorzeichen, mit dem die andere zu nehmen ist. Haben nun zuerst $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ gleiche Vorzeichen, so muß man $\sqrt{1+\sin\alpha}$ positiv oder negativ nehmen, jenachdem $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ beide positiv oder beide negativ sind. Haben aber $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ ungleiche Vorzeichen, so muß man $\sqrt{1-\sin\alpha}$ positiv oder negativ nehmen, jenachdem $\sin\frac{1}{2}\alpha$ positiv oder negativ ist. Nach diesen Regeln wird man immer sehr leicht beurtheilen können, mit welchen Vorzeichen die beiden Quadratwurzeln zu nehmen sind, wie wir an folgenden Beispielen zeigen wollen.

Wenn $\alpha > \pi$, $\alpha < \frac{3}{2}\pi$ ist, so ist $\cos\alpha$ negativ; also sind die beiden Quadratwurzeln mit gleichen Vorzeichen zu nehmen. Da ferner $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \frac{3}{4}\pi$, d. i. $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$ ist; so haben $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ entgegengesetzte Vorzeichen, und man muß folglich $\sqrt{1-\sin\alpha}$ positiv nehmen, da $\sin\frac{1}{2}\alpha$ positiv ist. Also ist in diesem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha},$$

indem man nämlich beide Quadratwurzeln positiv nimmt.

Wenn $\alpha > 0$, $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist $\cos\alpha$ positiv und die beiden Quadratwurzeln sind folglich in diesem Falle mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen. Ferner ist $\frac{1}{2}\alpha > 0$, $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$. Also haben $\sin\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha$ gleiche Vorzeichen und sind beide positiv. Daher muß man $\sqrt{1+\sin\alpha}$ positiv nehmen, und hat also in diesem Falle:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1+\sin\alpha},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\tfrac{1}{2}\alpha = -\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Auf diese Weise werden sich in allen Fällen leicht und mit völliger Sicherheit die Vorzeichen beurtheilen lassen, mit denen die beiden Quadratwurzeln zu nehmen sind. Eine solche Beurtheilung wird gewöhnlich, aber mit großem Unrecht, bei den goniometrischen Formeln, die Quadratwurzeln enthalten, unterlassen, und wir wollen daher, um die Nothwendigkeit dieser Beurtheilung recht deutlich zu zeigen, jetzt noch das folgende Beispiel etwas ausführlicher betrachten.

Aus (170.) und (171.) folgt durch Addition und Subtraction

172. $$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

173. $$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

wo nun aber wieder eine besondere Beurtheilung der Vorzeichen nöthig ist, mit denen die Quadratwurzeln zu nehmen sind. Nach dem Vorhergehenden sind die beiden Quadratwurzeln mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen zu nehmen, jenachdem $\cos\alpha$ negativ oder positiv ist, und aus den Vorzeichen von $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\alpha$ wird sich nun immer leicht das Zeichen beurtheilen lassen, mit dem jede einzelne Quadratwurzel zu nehmen ist, wie wir an den folgenden Beispielen zeigen wollen.

Wenn $\alpha > 0$, $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, so ist $\cos\alpha$ positiv, und die beiden Quadratwurzeln sind also mit entgegesetzten Vorzeichen zu nehmen. Folglich ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

$\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\alpha$ sind sämmtlich positiv; also muß man, weil $\sqrt{1+\sin\alpha}$ größer wie $\sqrt{1-\sin\alpha}$ ist, in diesem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

setzen, wo nun natürlich beide Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Ist $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\alpha < \pi$, so ist $\cos\alpha$ negativ und die beiden Quadratwurzeln sind folglich mit gleichen Vorzeichen zu nehmen, so daß man also

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

setzen muß. $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\alpha$ sind sämmtlich positiv; also muß man in diesem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

setzen, wo nun die Quadratwurzeln natürlich wieder positiv zu nehmen sind.

Ist $\alpha > \pi$, $\alpha < \frac{3}{2}\pi$, so ist $\cos\alpha$ negativ, und die Quadratwurzeln sind folglich mit gleichen Vorzeichen zu nehmen. Also ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Da aber $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \frac{3}{4}\pi$, d. i. $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$ ist; so ist $\sin\frac{1}{2}\alpha$ positiv, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ negativ, $\sin\alpha$ ist negativ. Also ist in diesem Falle, da $\sqrt{1-\sin\alpha}$ größer wie $\sqrt{1+\sin\alpha}$ ist,

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

die Quadratwurzeln positiv genommen.

Ist $\alpha > \frac{3}{2}\pi$, $\alpha < 2\pi$, so ist $\cos\alpha$ positiv, und man muß folglich die Quadratwurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen nehmen. Also ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Weil aber $\frac{1}{2}\alpha > \frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$, d. i. $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha < \pi$ ist; so ist $\sin\frac{1}{2}\alpha$ positiv, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ negativ, $\sin\alpha$ ist negativ. Also ist in diesem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Um nur ein Beispiel für ein negatives α zu geben, so sey α negativ, und der absolute Werth dieses Bogens sey $> \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$, so

ist $\cos\alpha$ negativ, und die beiden Quadratwurzeln sind also mit gleichen Vorzeichen zu nehmen. Folglich ist in diesem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Der absolute Werth von $\frac{1}{2}\alpha$ ist $> \frac{1}{4}\pi$, $< \frac{1}{2}\pi$, d. i. > 0, $< \frac{1}{2}\pi$. Also ist $\sin\frac{1}{2}\alpha$ negativ, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ positiv, $\sin\alpha$ ist negativ. Folglich ist in diesem Falle

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Wie man sich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat, wird aus diesen Beispielen mit hinreichender Deutlichkeit erhellen.

24. Nach (165.), (166.), (156.) ist

$2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \cos\alpha$, $2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 + \cos\alpha$, $2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\alpha$.

Hieraus erhält man durch Division leicht:

174. $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

175. $$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Weil nun, wie leicht erhellet,

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\alpha} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha^2, \quad \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

ist; so ist

176. $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

177. $$\cot\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

oder

178. $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

179. $$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},$$

mit der Bestimmung, daß man in diesen beiden Formeln die Quadratwurzel positiv oder negativ nimmt, jenachdem der Endpunkt des Bogens $\frac{1}{2}\alpha$ im ersten und dritten, oder im zweiten und vierten Quadranten liegt, welches sich immer leicht beurtheilen lassen wird.

Aus (176.) und (177.) ergiebt sich ferner leicht:

180. $$1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad 1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{2}{1+\cos\alpha};$$

181. $1-\cot\frac{1}{2}\alpha^2 = -\frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$, $1+\cot\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{2}{1-\cos\alpha}$;

also

182. $\cos\alpha = \frac{1-\tang\frac{1}{2}\alpha^2}{1+\tang\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha^2-1}{\cot\frac{1}{2}\alpha^2+1}$.

Aus (174.), (175.), (180.), (181.) folgt leicht:

183. $\sin\alpha = \frac{2\tang\frac{1}{2}\alpha}{1+\tang\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{2\cot\frac{1}{2}\alpha}{1+\cot\frac{1}{2}\alpha^2}$,

Ferner ergiebt sich aus (174.) und (175.) durch Addition und Subtraction

184. $\begin{cases} \cot\frac{1}{2}\alpha + \tang\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{\sin\alpha} = 2\operatorname{cosec}\alpha, \\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}\alpha + \tang\frac{1}{2}\alpha); \end{cases}$

185. $\begin{cases} \cot\frac{1}{2}\alpha - \tang\frac{1}{2}\alpha = 2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cot\alpha, \\ \cot\alpha = \frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}\alpha - \tang\frac{1}{2}\alpha). \end{cases}$

Auch ist nach (174.) und (175.)

186. $\tang\frac{1}{2}\alpha + \cot\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$,

187. $\cot\frac{1}{2}\alpha - \cot\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$.

Also ist auch

188. $\sin\alpha = \frac{1}{\tang\frac{1}{2}\alpha + \cot\alpha} = \frac{1}{\cot\frac{1}{2}\alpha - \cot\alpha}$,

Ferner ist nach (174.) und (175.)

$\tang\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1 = \sec\alpha - 1$,

$\cot\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} + 1 = \sec\alpha + 1$,

also

189. $\sec\alpha = \tang\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha + 1 = \cot\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha - 1$,

190. $\cos\alpha = \frac{1}{\tang\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha + 1} = \frac{1}{\cot\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha - 1}$.

Nach (188.) und (190.) ist also auch immer

191. $\tang\frac{1}{2}\alpha + \cot\alpha = \cot\frac{1}{2}\alpha - \cot\alpha$,

192. $\tang\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha + 1 = \cot\frac{1}{2}\alpha\tang\alpha - 1$.

Die Zahl dieser Relationen würde sich leicht vermehren lassen; die vorher entwickelten sind aber die am häufigsten in Anwendung kommenden.

25. Aus (41.) und (42.) folgt leicht

193. $\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tang\alpha \pm \tang\beta$,

194. $\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \cot\beta \pm \cot\alpha$,

195. $\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cos\beta} = 1 \pm \cot\alpha \operatorname{tang}\beta$,

196. $\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \sin\beta} = \operatorname{tang}\alpha \cot\beta \pm 1$,

197. $\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cos\beta} = \cot\alpha \mp \operatorname{tang}\beta$,

198. $\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \sin\beta} = \cot\beta \mp \operatorname{tang}\alpha$,

199. $\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = 1 \mp \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta$,

200. $\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \cot\alpha \cot\beta \mp 1$.

Also ist auch

201. $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{1 + \cot\alpha \operatorname{tang}\beta}{1 - \cot\alpha \operatorname{tang}\beta} = \frac{\operatorname{tang}\alpha \cot\beta + 1}{\operatorname{tang}\alpha \cot\beta - 1},$$

202. $$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\alpha - \operatorname{tang}\beta}{\cot\alpha + \operatorname{tang}\beta} = \frac{\cot\beta - \operatorname{tang}\alpha}{\cot\beta + \operatorname{tang}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\alpha \cot\beta + 1},$$

26. Aus den Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

folgt leicht durch Addition und Subtraction:

203. $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$,

204. $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$,

205. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$,

206. $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$;

folglich, wenn man

$\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$; $\alpha = \frac{1}{2}(x+y)$, $\beta = \frac{1}{2}(x-y)$

setzt:

207. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$,

208. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$,

209. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$,

210. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$.

Setzt man nx für x, mx für y, so erhält man:

211. $\sin nx + \sin mx = 2\sin\frac{1}{2}(n+m)x\cos\frac{1}{2}(n-m)x$,

212. $\sin nx - \sin mx = 2\cos\frac{1}{2}(n+m)x\sin\frac{1}{2}(n-m)x$,

213. $\cos nx + \cos mx = 2\cos\frac{1}{2}(n+m)x\cos\frac{1}{2}(n-m)x$,

214. $\cos nx - \cos mx = -2\sin\frac{1}{2}(n+m)x\sin\frac{1}{2}(n-m)x$,

und, wenn man $n+1$ für n, $n-1$ für m setzt:

215. $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x = 2\sin nx\cos x$,

216. $\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 2\cos nx\sin x$,

217. $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx\cos x$,

218. $\cos(n+1)x - \cos(n-1)x = -2\sin nx\sin x$.

Auch erhält man leicht:

219. $\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)\cot\frac{1}{2}(x-y) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}$,

220. $\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y} = -\cot\frac{1}{2}(x+y)\cot\frac{1}{2}(x-y)$,

221. $\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)$,

222. $\frac{\sin x-\sin y}{\cos x-\cos y} = -\cot\frac{1}{2}(x+y)$,

223. $\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)$,

224. $\frac{\sin x+\sin y}{\cos x-\cos y} = -\cot\frac{1}{2}(x-y)$.

Auch ergiebt sich leicht mittelst einiger aus dem Obigen bekannten Formeln:

225. $\sin x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \cos x^2$
$= (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)$
$= 4\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$
$= \sin(x+y)\sin(x-y)$,

226. $\cos x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \sin x^2$
$= \cos x^2(1-\sin y^2) - \sin y^2(1-\cos x^2)$
$= \cos x^2\cos y^2 - \sin x^2\sin y^2$
$= (\cos x\cos y + \sin x\sin y)(\cos x\cos y - \sin x\sin y)$
$= \cos(x+y)\cos(x-y)$.

27. Bevor wir zu andern Relationen übergehen, wollen wir nun noch zeigen, wie sich die Sinus einiger bestimmten Winkel in algebraischen Ausdrücken darstellen lassen, wobei wir durch bloße Rechnung, ohne alle Construction, wie dies wohl sonst gewöhnlich ist, zu diesen Ausdrücken zu gelangen suchen wollen. Zuerst müssen wir

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi = \sin 45°,\quad \sin\tfrac{1}{5}\pi = \sin 36°,\quad \sin\tfrac{1}{6}\pi = \sin 30°$$

zu finden suchen. Daß

$$227.\quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$$

ist, folgt aus (47.) für $n=0$. Nach (71.) ist

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos\alpha.$$

Also ist für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$:

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi = \cos\tfrac{1}{4}\pi .$$

Aber bekanntlich

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi^2 + \cos\tfrac{1}{4}\pi^2 = 1 .$$

Also

$$2\sin\tfrac{1}{4}\pi^2 = 2\cos\tfrac{1}{4}\pi^2 = 1 ,$$

und folglich

$$228.\quad \sin\tfrac{1}{4}\pi = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} ,$$

die Quadratwurzel positiv genommen. Ferner ist nach (207.) und (210.)

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi + \sin\tfrac{1}{12}\pi = 2\sin\tfrac{1}{6}\pi\cos\tfrac{1}{12}\pi ,$$
$$\cos\tfrac{1}{4}\pi - \cos\tfrac{1}{12}\pi = -2\sin\tfrac{1}{6}\pi\sin\tfrac{1}{12}\pi ,$$

d. i. nach (228.)

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \sin\tfrac{1}{12}\pi = 2\sin\tfrac{1}{6}\pi\cos\tfrac{1}{12}\pi ,$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \cos\tfrac{1}{12}\pi = -2\sin\tfrac{1}{6}\pi\sin\tfrac{1}{12}\pi ,$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen von einander subtrahirt,

$$\sin\tfrac{1}{12}\pi + \cos\tfrac{1}{12}\pi = 2\sin\tfrac{1}{6}\pi\{\sin\tfrac{1}{12}\pi + \cos\tfrac{1}{12}\pi\} ;$$

also

$$229.\quad \sin\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} .$$

Hieraus ergiebt sich auf der Stelle:

$$230.\quad \cos\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} ,$$

die Quadratwurzel positiv genommen.

Nach (160.) ist, wenn wir

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi = z$$

setzen,

$$z = \cos\tfrac{1}{5}\pi - 2\cos\tfrac{1}{5}\pi\cos\tfrac{1}{5}\pi + 1$$
$$= \cos\tfrac{1}{5}\pi - 2(z+\cos\tfrac{2}{5}\pi)\cos\tfrac{1}{5}\pi + 1$$
$$- (z - \cos\tfrac{1}{5}\pi + \cos\tfrac{2}{5}\pi) ,$$

woraus sehr leicht nach (205.)

$$2z(1+\cos\tfrac{1}{5}\pi) = 1 + \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi - \cos\tfrac{1}{5}\pi$$
$$+ \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi$$
$$= 1 + \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi$$

folgt. Nach (56.) ist aber

$$\cos\tfrac{2}{5}\pi = -\cos(\pi - \tfrac{2}{5}\pi) = -\cos\tfrac{2}{5}\pi ;$$

folglich ist

$$\cos\tfrac{2}{5}\pi + \cos\tfrac{2}{5}\pi = 0 ,$$

und deshalb nach dem Vorhergehenden

$$2z(1+\cos\tfrac{1}{5}\pi) = 1 + \cos\tfrac{1}{5}\pi ,$$

d. i.

$$231.\quad z = \cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi = \tfrac{1}{2} .$$

Setzen wir nun $\cos\frac{1}{5}\pi = x$, so ist nach (160.)

$$\cos\tfrac{2}{5}\pi = 2x^2 - 1$$

und folglich nach (231.)

$$x - 2x^2 + 1 = \tfrac{1}{2},\ 2x^2 - x = \tfrac{1}{2},\ x^2 - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Weil aber $\cos\frac{1}{5}\pi$ positiv ist, so ist, indem man die Quadratwurzel positiv nimmt,

232. $$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Nach (144.) ergiebt sich hieraus

233. $$\sin\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right\}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})},$$

indem man beide Quadratwurzeln positiv nimmt.

Mittelst der Ausdrücke

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sin\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2},\ \sin\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})};$$
$$\cos\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \cos\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}),$$

in denen alle Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind, und aus den Formeln

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$$

kann man nun leicht die, in dem entsprechenden Artikel im zweiten Theile dieses Wörterbuchs angegebenen, algebraischen Ausdrücke der Sinus aller positiven Winkel oder Bogen im ersten Quadranten von drei zu drei Graden entwickeln, wobei wir nur bemerken, daß alle Quadratwurzeln in diesen Ausdrücken positiv zu nehmen sind. Die vorkommenden Quadratwurzeln sind nur folgende:

$$\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})}$$
$$\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(6 \pm 2\sqrt{5})} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(9 \pm 3\sqrt{5})} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(18 \pm 6\sqrt{5})} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(15 \pm 3\sqrt{5})} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}$$
$$\sqrt{(30 \pm 6\sqrt{5})} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}.$$

Daher reduciren sich alle vorkommenden Quadratwurzeln auf folgende drei:

$$\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})},\ \sqrt{(3 \pm \sqrt{5})},\ \sqrt{(5 \pm \sqrt{5})}\ .$$

Weil nun bekanntlich

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ist; so kann man auch

$$\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$\sqrt{(5 \pm \sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2}} \pm \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}}$$

setzen und folglich die erwähnten algebraischen Ausdrücke auf mannigfaltige Weise umgestalten.

28. Setzt man in (207.) und (208.) $x = 90°$, $y = \alpha$; so erhält man, weil nach (71.)

$$\cos(45° - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin(45° + \tfrac{1}{2}\alpha),$$
$$\cos(45° + \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

ist:

234. $1 + \sin\alpha = 2\sin(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2\cos(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)^2$,

235. $1 - \sin\alpha = 2\cos(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2\sin(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)^2$.

Also ist

236. $\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \cot(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)^2$,

237. $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\alpha)^2 + 1} = \dfrac{\cot(45° - \frac{1}{2}\alpha)^2 - 1}{\cot(45° - \frac{1}{2}\alpha)^2 + 1}$,

238. $\sin\alpha = \dfrac{1 - \cot(45° + \frac{1}{2}\alpha)^2}{1 + \cot(45° + \frac{1}{2}\alpha)^2} = \dfrac{1 - \operatorname{tang}(45° - \frac{1}{2}\alpha)^2}{1 + \operatorname{tang}(45° - \frac{1}{2}\alpha)^2}$.

Setzt man in der Gleichung (183.) $90° - \alpha$ für α, so erhält man

239. $\cos\alpha = \dfrac{2\operatorname{tang}(45° - \frac{1}{2}\alpha)}{1 + \operatorname{tang}(45° - \frac{1}{2}\alpha)^2} = \dfrac{2\cot(45° - \frac{1}{2}\alpha)}{1 + \cot(45° - \frac{1}{2}\alpha)^2}$,

oder, weil bekanntlich nach dem Obigen

$$\operatorname{tang}(45° - \tfrac{1}{2}\alpha) = \cot(45° + \tfrac{1}{2}\alpha),\ \cot(45° - \tfrac{1}{2}\alpha) = \operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

ist,

240. $\cos\alpha = \dfrac{2\cot(45° + \frac{1}{2}\alpha)}{1 + \cot(45° + \frac{1}{2}\alpha)^2} = \dfrac{2\operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\alpha)}{1 + \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\alpha)^2}$.

Setzt man in den Gleichungen (207.) und (208.) $x = \alpha$, $y = 90° - \alpha$; so erhält man, weil nach (228.)

$$\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist, die Quadratwurzel positiv genommen:

241. $\sin\alpha + \cos\alpha = \cos(\alpha - 45^\circ).\sqrt{2} = \cos(45^\circ - \alpha).\sqrt{2}$,
242. $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin(\alpha - 45^\circ).\sqrt{2} = -\sin(45^\circ - \alpha).\sqrt{2}$,

oder auch, weil bekanntlich

$$\cos(45^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha),\quad \sin(45^\circ - \alpha) = \cos(45^\circ + \alpha)$$

ist,

243. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin(45^\circ + \alpha).\sqrt{2}$,
244. $\sin\alpha - \cos\alpha = -\cos(45^\circ + \alpha).\sqrt{2}$.

Also ist

245. $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \pm\sin(45^\circ \pm \alpha).\sqrt{2} = \pm\cos(45^\circ \mp \alpha).\sqrt{2}$,

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Setzt man in den Gleichungen (207.), (208.), (209.) und (210.) $x = 30^\circ + \alpha$, $y = 30^\circ - \alpha$; so werden dieselben, weil nach (229.) und (230.) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist:

246. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha$,
247. $\sin(30^\circ + \alpha) - \sin(30^\circ - \alpha) = \sin\alpha.\sqrt{3}$,
248. $\cos(30^\circ + \alpha) + \cos(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha.\sqrt{3}$,
249. $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$,

die Quadratwurzel positiv genommen. Auch erhellet leicht, daß man diese Formeln auf folgende Art schreiben kann:

250. $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) = \cos\alpha$,
251. $\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha) = \sin\alpha.\sqrt{3}$,
252. $\sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = \cos\alpha.\sqrt{3}$,
253. $\sin(60^\circ - \alpha) - \sin(60^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$.

Setzt man in (225.) nach und nach $x = 45^\circ$, 30°, 60° und $y = \alpha$; so erhält man:

254. $\frac{1}{2} = \sin\alpha^2 + \sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha)$
$= \sin\alpha^2 + \cos(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)$,
255. $\frac{1}{4} = \sin\alpha^2 + \sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)$
$= \sin\alpha^2 + \cos(60^\circ + \alpha)\cos(60^\circ - \alpha)$,
256. $\frac{3}{4} = \sin\alpha^2 + \sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$
$= \sin\alpha^2 + \cos(30^\circ + \alpha)\cos(30^\circ - \alpha)$.

Aus (228.), (229.), (230.) erhält man leicht:

257. $\operatorname{tang} 45^\circ = 1$, 258. $\operatorname{tang} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;
259. $\cot 45^\circ = 1$, 260. $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$,

die Quadratwurzel positiv genommen.

Setzt man in (152.) und (154.) $\alpha = 45^\circ$ und schreibt α für β; so erhält man:

261. $\operatorname{tang}(45^\circ \pm \alpha) = \frac{1 \pm \operatorname{tang}\alpha}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha}$,

262. $\cot(45^\circ \pm \alpha) = \frac{1 \mp \operatorname{tang}\alpha}{1 \pm \operatorname{tang}\alpha}$.

Also ist auch

263. $\tang(45^\circ+\alpha)-\tang(45^\circ-\alpha)=\frac{4\tang\alpha}{1-\tang\alpha^2}$,

264. $\cot(45^\circ-\alpha)-\cot(45^\circ+\alpha)=\frac{4\tang\alpha}{1-\tang\alpha^2}$.

Folglich nach (158.)

265. $2\tang 2\alpha=\tang(45^\circ+\alpha)-\tang(45^\circ-\alpha)$
$=\cot(45^\circ-\alpha)-\cot(45^\circ+\alpha)$.

Ferner ist

266. $\tang(45^\circ+\alpha)+\tang(45^\circ-\alpha)=2.\frac{1+\tang\alpha^2}{1-\tang\alpha^2}$,

267. $\cot(45^\circ+\alpha)+\cot(45^\circ-\alpha)=2.\frac{1+\tang\alpha^2}{1-\tang\alpha^2}$;

folglich, weil

$$\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha$$

ist, nach (182.)

268. $2\sec 2\alpha=\tang(45^\circ+\alpha)+\tang(45^\circ-\alpha)$
$=\cot(45^\circ+\alpha)+\cot(45^\circ-\alpha)$,

mittelst welcher Formeln man die Secanten durch bloße Addition der Tangenten oder Cotangenten finden kann.

Aus (265.) und (268.) folgt

269. $\sec 2\alpha+\tang 2\alpha=\tang(45^\circ+\alpha)=\cot(45^\circ-\alpha)$,

270. $\sec 2\alpha-\tang 2\alpha=\cot(45^\circ+\alpha)=\tang(45^\circ-\alpha)$,

d. i.

271. $\sec 2\alpha\pm\tang 2\alpha=\tang(45^\circ\pm\alpha)=\cot(45^\circ\mp\alpha)$.

Aus (265.) und (268.) ergiebt sich auch leicht durch Division

272. $\sin\alpha=\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)-\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)+\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}$
$=\frac{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)-\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)+\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}$
$=\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)-\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)+\cot(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}$
$=\frac{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)-\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{\cot(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)+\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}$.

Setzt man in den aus dem Obigen bekannten Formeln

$1-\cos\alpha=2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$, $1+\cos\alpha=2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$

$90^\circ-\alpha$ für α; so wird

273. $1-\sin\alpha=2\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)^2$,

274. $1+\sin\alpha=2\cos(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)^2$;

oder auch

275. $1\mp\sin\alpha=2\sin(45^\circ\mp\frac{1}{2}\alpha)^2=2\cos(45^\circ\pm\frac{1}{2}\alpha)^2$.

Auch ist

276. $\operatorname{sinv}\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$,

277. $\operatorname{cosv}\alpha = 2\sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)^2 = 2\cos(45^0 + \frac{1}{2}\alpha)^2$.

29. Zwischen den goniometrischen Functionen dreier beliebigen Winkel, die wir durch α, β, γ bezeichnen wollen, finden gewisse merkwürdige Relationen Statt, von denen die wichtigsten jetzt entwickelt werden sollen.

Entwickelt man zunächst

$$\sin(\gamma-\beta),\ \sin(\alpha-\gamma),\ \sin(\beta-\alpha)$$

nach (41.), so erhält man sehr leicht:

278. $\sin\alpha\sin(\gamma-\beta) + \sin\beta\sin(\alpha-\gamma) + \sin\gamma\sin(\beta-\alpha) = 0$,

279. $\cos\alpha\sin(\gamma-\beta) + \cos\beta\sin(\alpha-\gamma) + \cos\gamma\sin(\beta-\alpha) = 0$.

Nach (206.) und (205.) ist

$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta),$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta);$$

folglich

$$-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma,$$
$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma + 2\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma;$$

also nach (204.) und (205.)

280. $-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$= \sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma)$,

281. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta-\gamma)$,

oder auch nach (39.) und (40.)

282. $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$= -\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\alpha+\gamma-\beta) + \sin(\alpha+\beta-\gamma)$,

283. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

Setzen wir in diesen beiden Gleichungen x, y, z für α, β, γ; so ergiebt sich

$$\sin(y+z-x) + \sin(x+z-y) + \sin(x+y-z) = 4\sin x\sin y\sin z + \sin(x+y+z),$$
$$\cos(y+z-x) + \cos(x+z-y) + \cos(x+y-z) = 4\cos x\cos y\cos z - \cos(x+y+z).$$

Setzen wir nun

$$y+z-x=\alpha,\ x+z-y=\beta,\ x+y-z=\gamma;$$

so ergiebt sich durch Auflösung dieser drei Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma),\ y = \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma),\ z = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

und folglich nach den beiden obigen allgemeinen Formeln:

284. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$
$= 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)$,

285. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$

$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

Nach (193.) und (194.) ist

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Folglich ist

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= \frac{\{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\}\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\{\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)\}\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma + \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} - \frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Also ist immer

286. $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma + \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$,

287. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - \frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$,

für jedes α, β, γ.

Nach (205.) und (206.) ist

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = -\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha,$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = -\cos\alpha + \cos(\gamma-\beta),$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = \cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \cos\alpha + \cos(\gamma-\beta).$$

Also ist

$$4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= -\cos\alpha^2 - \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) + \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma) + \cos(\gamma-\beta)\},$$
$$4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= \cos\alpha^2 + \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) + \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma) + \cos(\gamma-\beta)\},$$
$$4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= \cos\alpha^2 - \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) - \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma) - \cos(\gamma-\beta)\},$$
$$4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= -\cos\alpha^2 + \cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta) - \cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma) - \cos(\gamma-\beta)\}.$$

Aber

$$\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma-\beta)$$
$$= \{\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\}\{\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\}$$

$$= \cos\beta^2 \cos\gamma^2 - (1 - \cos\beta^2)(1 - \cos\gamma^2)$$
$$= -1 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 ,$$

und nach (205.) und (206.)

$$\cos(\beta+\gamma) + \cos(\gamma-\beta) = 2\cos\beta\cos\gamma ,$$
$$\cos(\beta+\gamma) - \cos(\gamma-\beta) = -2\sin\beta\sin\gamma .$$

Also ist

288. $4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma ,$

289. $4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= -1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma ,$

290. $4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= 1 + \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma ,$

291. $4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$
$= -1 - \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma .$

30. Wir wollen nun

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

setzen; so ist

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\gamma,\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\beta,\ \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha ;$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\tfrac{1}{2}\gamma,\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \cos\tfrac{1}{2}\beta,\ \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \cos\tfrac{1}{2}\alpha ;$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma,\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\beta,\ \cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha ;$$
$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0,\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1 .$$

Folglich ist nach (284.), (285.), (286.), (287.)

292. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma ,$

293. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma ,$

294. $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma ,$

295. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma + \operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma .$

Da ferner

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$$

ist; so ist

$$\sin(2\alpha+2\beta+2\gamma) = 0,\ \cos(2\alpha+2\beta+2\gamma) = 1 .$$

Weil nun ferner nach aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma,\ \sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta,\ \sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha ;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma,\ \cos(\alpha+\gamma) = -\cos\beta,\ \cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha$$

ist; so ist nach (284.), (285.), (286.), (287.), wenn man 2α, 2β, 2γ für die dortigen α, β, γ setzt:

296. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma ,$

297. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma ,$

298. $\tang 2\alpha + \tang 2\beta + \tang 2\gamma = \tang 2\alpha \tang 2\beta \tang 2\gamma$,

299. $\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = \cot 2\alpha \cot 2\beta \cot 2\gamma$
$- \operatorname{cosec} 2\alpha \operatorname{cosec} 2\beta \operatorname{cosec} 2\gamma$.

Ferner ist auch

$\alpha+\beta+\gamma = \pi$, $\beta+\gamma-\alpha = \pi-2\alpha$, $\alpha+\gamma-\beta = \pi-2\beta$,
$\alpha+\beta-\gamma = \pi-2\gamma$;

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}\pi-\alpha$, $\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) = \frac{1}{2}\pi-\beta$,
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{1}{2}\pi-\gamma$.

Also ist

$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0$, $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1$;
$\sin(\beta+\gamma-\alpha) = \sin 2\alpha$, $\cos(\beta+\gamma-\alpha) = -\cos 2\alpha$;
$\sin(\alpha+\gamma-\beta) = \sin 2\beta$, $\cos(\alpha+\gamma-\beta) = -\cos 2\beta$;
$\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin 2\gamma$, $\cos(\alpha+\beta-\gamma) = -\cos 2\gamma$;
$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 1$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 0$;
$\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = \sin\alpha$;
$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) = \cos\beta$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) = \sin\beta$;
$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \cos\gamma$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \sin\gamma$.

Folglich ist nach (282.) und (283.)

$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$,
$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -1 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma$,

wie in (296.) und (297.) schon auf anderm Wege gefunden worden ist.

Aus (289.) und (291.) folgt

300. $0 = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

301. $0 = 1 + \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Dieselben Gleichungen folgen auch aus (288.) und (290.) .

31. Sey nun ferner

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi$, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$;

so ist nach (292.), (293.), (294.), (295.)

302. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

303. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1 + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

304. $\tang 2\alpha + \tang 2\beta + \tang 2\gamma = \tang 2\alpha \tang 2\beta \tang 2\gamma$,

305. $\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = \cot 2\alpha \cot 2\beta \cot 2\gamma$
$+ \operatorname{cosec} 2\alpha \operatorname{cosec} 2\beta \operatorname{cosec} 2\gamma$.

Nach (284.) und (285.) ist

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1 + 4\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta)\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma)$,
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta)\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma)$.

Aber nach (41.), (42.) und (228.)

$\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha) = (\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha).\Upsilon\frac{1}{2}$,
$\cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha) = (\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha).\Upsilon\frac{1}{2}$,

die Quadratwurzel positiv genommen.

Also ist

306. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$
$= 1 + (\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha)(\cos\frac{1}{2}\beta - \sin\frac{1}{2}\beta)(\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\gamma) \cdot \gamma 2$,

307. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$
$= (\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha)(\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\beta)(\cos\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\gamma) \cdot \gamma 2$.

Aus (286.) und (287.) folgt

308. $\tang\alpha + \tang\beta + \tang\gamma = \tang\alpha\tang\beta\tang\gamma + \sec\alpha\sec\beta\sec\gamma$,

309. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$,

zwei Relationen, von denen namentlich die letztere sehr merkwürdig ist.

Auch ist, wie leicht erhellet,

$$\tang\alpha\tang\gamma + \tang\beta\tang\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta)\tang\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cot(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tang\alpha\tang\beta;$$

also ist immer

310. $\tang\alpha\tang\beta + \tang\alpha\tang\gamma + \tang\beta\tang\gamma = 1$.

32. Wir wollen nun auch noch untersuchen, was sich aus den Gleichungen

$$\sin x = \sin y,\ \cos x = \cos y,\ \tang x = \tang y,\ \cot x = \cot y;$$
$$\sec x = \sec y,\ \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} y,\ \operatorname{sinv} x = \operatorname{sinv} y,\ \operatorname{cosv} x = \operatorname{cosv} y,$$

wo x und y ein Paar an sich ganz beliebige, nur einer oder der andern der obigen Gleichungen genügende Bogen bezeichnen, in Bezug auf des gegenseitige Verhalten dieser Bogen schließen läßt.

I. Sey daher zunächst $\sin x = \sin y$ und überhaupt

$$y = x + \Theta;$$

so ist nach (41.)

$$\sin y = \sin x\cos\Theta + \cos x\sin\Theta,$$

und folglich nach der Voraussetzung

$$\sin x = \sin x\cos\Theta + \cos x\sin\Theta;$$

also

$$\sin x(1 - \cos\Theta) = \cos x\sin\Theta,$$

d. i. nach (165.) und (156.)

$$2\sin x\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 = 2\cos x\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

woraus in völliger Allgemeinheit

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta(\cos x\cos\tfrac{1}{2}\Theta - \sin x\sin\tfrac{1}{2}\Theta) = 0,$$

d. i. nach (42.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0.$$

Folglich ist entweder

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta = 0$$

oder

$$\cos(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0 .$$

Aus der ersten Gleichung folgt, wenn n immer eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}\Theta = n\pi, \quad \Theta = 2n\pi, \quad y = x + 2n\pi ,$$

und aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen ergiebt sich

$$x + \tfrac{1}{2}\Theta = (2n+1).\tfrac{1}{2}\pi, \quad \Theta = (2n+1)\pi - 2x, \quad y = (2n+1)\pi - x .$$

Ist also $\sin x = \sin y$, so ist immer entweder

$$y = x + 2n\pi$$

oder

$$y = (2n+1)\pi - x .$$

II. Sey ferner $\cos x = \cos y$ und wieder

$$y = x + \Theta ;$$

so ist nach (42.)

$$\cos y = \cos x \cos\Theta - \sin x \sin\Theta ,$$

also nach der Voraussetzung

$$\cos x = \cos x \cos\Theta - \sin x \sin\Theta ;$$

folglich

$$\cos x(1 - \cos\Theta) = -\sin x \sin\Theta ,$$

d. i. nach (165.) und (156.)

$$2\cos x \sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 = -2\sin x \sin\tfrac{1}{2}\Theta \cos\tfrac{1}{2}\Theta ,$$

woraus

$$-\sin\tfrac{1}{2}\Theta(\sin x \cos\tfrac{1}{2}\Theta + \cos x \sin\tfrac{1}{2}\Theta) = 0 ,$$

d. i. nach (41.)

$$-\sin\tfrac{1}{2}\Theta \sin(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0$$

und folglich entweder

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta = 0$$

oder

$$\sin(x + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0 .$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\tfrac{1}{2}\Theta = n\pi, \quad \Theta = 2n\pi, \quad y = x + 2n\pi ,$$

und aus der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$x + \tfrac{1}{2}\Theta = n\pi, \quad \Theta = 2n\pi - 2x, \quad y = 2n\pi - x .$$

Ist also $\cos x = \cos y$, so ist immer, wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$y = 2n\pi \pm x .$$

III. Für $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} y$ sey wieder

$$y = x + \Theta ;$$

so ist

$$\operatorname{tang}(x + \Theta) = \operatorname{tang} x$$

oder

$$\frac{\sin(x+\Theta)}{\cos(x+\Theta)} = \frac{\sin x}{\cos x};$$

also

$$\sin(x+\Theta)\cos x = \cos(x+\Theta)\sin x,$$
$$\sin(x+\Theta)\cos x - \cos(x+\Theta)\sin x = 0,$$

d. i. nach (41.) $\sin\Theta = 0$, und folglich $\Theta = n\pi$, also

$$y = x + n\pi.$$

IV. Für $\cot x = \cot y$ ist nach (37.)

$$\frac{1}{\tang x} = \frac{1}{\tang y},$$

d. i.

$$\tang x = \tang y;$$

und folglich nach **III.**

$$y = x + n\pi.$$

V. Für $\sec x = \sec y$ ist

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos y},\quad \cos x = \cos y;$$

also nach **II.**

$$y = 2n\pi \pm x.$$

VI. Für $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} y$ ist

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin y},\quad \sin x = \sin y;$$

also nach **I.**

$$y = x + 2n\pi \text{ oder } y = (2n+1)\pi - x.$$

VII. Für $\operatorname{sinv} x = \operatorname{sinv} y$ ist

$$1 - \cos x = 1 - \cos y,\quad \cos x = \cos y;$$

also ist nach **II.**

$$y = 2n\pi \pm x.$$

VIII. Für $\operatorname{cosv} x = \operatorname{cosv} y$ ist

$$1 - \sin x = 1 - \sin y,\quad \sin x = \sin y;$$

also ist nach **I.**

$$y = x + 2n\pi \text{ oder } y = (2n+1)\pi - x.$$

IX. Aus der Gleichung $\sin x = \cos y$ folgt

$$\sin x = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - y);$$

folglich ist nach **I.**

$$\tfrac{1}{2}\pi - y = x + 2n\pi \text{ oder } \tfrac{1}{2}\pi - y = (2n+1)\pi - x,$$

d. i.

$$y = (\pm\tfrac{1}{2} - 2n)\pi \mp x.$$

Aus $\sin x = \cos y$ folgt auch

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos y,$$

also nach II.

$$y = (\pm \tfrac{1}{2} + 2n)\pi \mp x ,$$

welches mit dem Vorhergehenden einerlei ist, da n positiv und negativ seyn kann.

X. Aus $\text{tang}\, x = \cot y$ folgt

$$\text{tang}\, x = \text{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - y) ;$$

also ist nach III.

$$\tfrac{1}{2}\pi - y = x + n\pi ,$$

d. i. $y = (\frac{1}{2} - n)\pi - x$.

Aus $\text{tang}\, x = \cot y$ folgt auch

$$\cot(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cot y ;$$

also nach IV.

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - x + n\pi = (\tfrac{1}{2} + n)\pi - x ,$$

welches mit dem Vorhergehenden einerlei ist, da n positiv und negativ seyn kann.

Wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat, wird aus den beiden vorhergehenden Beispielen IX. und X. hinreichend erhellen.

III. Sinus und Cosinus vielfacher Bogen. Summirung einiger merkwürdigen goniometrischen Reihen. Ueber einige wichtige Producte.

33. In der Folge soll i immer die aus der Arithmetik bekannte imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ bezeichnen, für welche $i^2 = -1$, also allgemein für jedes positive ganze n, wie man leicht findet,

311. $i^{2n} = (-1)^n$, $i^{2n+1} = i.(-1)^n$

ist. Weil

$$i^{-2n} = \frac{1}{i^{2n}} = \frac{1}{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}} ,$$

$$i^{-(2n+1)} = \frac{1}{i^{2n+1}} = \frac{1}{i.(-1)^n} = \frac{i.(-1)^n}{i^2.(-1)^n(-1)^n} = -\frac{i.(-1)^n}{(-1)^{2n}} ,$$

und $(-1)^{2n} = 1$ ist; so ist

312. $i^{-2n} = (-1)^n$, $i^{-(2n+1)} = -i.(-1)^n$.

34. Entwickelt man das Product

$$(\cos nx \pm i \sin nx)(\cos x \mp i \sin x)$$

durch gemeine Multiplication, so erhält man

$$\cos nx \cos x - \sin nx \sin x$$
$$\pm i(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) ,$$

d. i. nach (41.) und (42.)

$$\cos(n+1)x \pm i\sin(n+1)x,$$

so daß also immer

313. $(\cos nx \pm i\sin nx)(\cos x \pm i\sin x) = \cos(n+1)x \pm i\sin(n+1)x$

ist. Setzt man nun nach und nach $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$; so ergiebt sich leicht

314. $(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos nx \pm i\sin nx$

für jedes ganze positive n.

Entwickeln wir die Potenz

$$(\cos x \pm i\sin x)^n$$

nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten, da wir jetzt immer annehmen wollen, daß n eine positive ganze Zahl sey, und bezeichnen die Binomial-Coefficienten der Kürze wegen durch $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \ldots$; so erhalten wir mit Rücksicht auf (311.)

315. $(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos nx \pm i\sin nx$

$$= \cos x^n - n_2\cos x^{n-2}\sin x^2 + n_4\cos x^{n-4}\sin x^4 - \ldots.$$

$$\pm i\{n_1\cos x^{n-1}\sin x - n_3\cos x^{n-3}\sin x^3 + n_5\cos x^{n-5}\sin x^5 - \ldots.\},$$

beide Reihen so weit fortgesetzt, bis sie wegen der verschwindenden Binomial-Coefficienten abbrechen. Verbindet man nun die für

$$\cos nx + i\sin nx \text{ und } \cos nx - i\sin nx$$

erhaltenen Ausdrücke durch Addition und Subtraction mit einander; so erhält man:

316. $\cos nx = \cos x^n - n_2\cos x^{n-2}\sin x^2 + n_4\cos x^{n-4}\sin x^4 - \ldots.$,

317. $\sin nx = n_1\cos x^{n-1}\sin x - n_3\cos x^{n-3}\sin x^3 + n_5\cos x^{n-5}\sin x^5 - \ldots$;

beide Reihen so weit fortgesetzt, bis sie wegen der $= 0$ werdenden Binomial-Coefficienten abbrechen.

Zu bemerken ist, daß man die beiden vorigen Formeln auch auf folgende Art ausdrücken kann:

318. $\cos nx = \cos x^n\{1 - n_2\tang x^2 + n_4\tang x^4 - n_6\tang x^6 + \ldots.\}$,

319. $\sin nx = \cos x^n\{n_1\tang x - n_3\tang x^3 + n_5\tang x^5 - \ldots.\}$,

so daß also auch

320. $$\tang nx = \frac{n_1\tang x - n_3\tang x^3 + n_5\tang x^5 - \ldots.}{1 - n_2\tang x^2 + n_4\tang x^4 - n_6\tang x^6 + \ldots.}$$

ist. Auch ist

321. $\cos nx = \sin x^n\{\cot x^n - n_2\cot x^{n-2} + n_4\cot x^{n-4} - \ldots.\}$,

322. $\sin nx = \sin x^n\{n_1\cot x^{n-1} - n_3\cot x^{n-3} + n_5\cot x^{n-5} - \ldots.\}$,

323. $$\cot nx = \frac{\cot x^n - n_2\cot x^{n-2} + n_4\cot x^{n-4} - \ldots.}{n_1\cot x^{n-1} - n_3\cot x^{n-3} + n_5\cot x^{n-5} - \ldots.}$$

34. Wir wollen nun die Reihen (316.) und (317.) auch nach Potenzen von $\sin x$ zu entwickeln suchen.

I. Zuerst sey n eine positive gerade Zahl, so ist, weil

$$\cos x^2 = 1 - \sin x^2$$

ist, nach (316.) und (317.)

$$\cos nx =$$

$$(1-\sin x^2)^{\frac{n}{2}} - n_2(1-\sin x^2)^{\frac{n-2}{2}}\sin x^2 + n_4(1-\sin x^2)^{\frac{n-4}{2}}\sin x^4 - \ldots,$$

$$\sin nx =$$

$$\cos x\{n_1(1-\sin x^2)^{\frac{n-2}{2}}\sin x - n_3(1-\sin x^2)^{\frac{n-4}{2}}\sin x^3 + \ldots.\}.$$

Entwickelt man nun in der ersten dieser beiden Reihen alle Potenzen von $1-\sin x^2$ nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten; so erhält man als $(p+1)$tes Glied der entstehenden Reihe

$$\left(\frac{n}{2}\right)_p + n_2\left(\frac{n-2}{2}\right)_{p-1} + n_4\left(\frac{n-4}{2}\right)_{p-2} + \ldots + n_{2p-2}\left(\frac{n-2p+2}{2}\right)_1 + n_{2p},$$

wenn man diese Größe, welche wir der Kürze wegen durch P bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p.\sin x^{2p}$ multiplicirt. Weil aber, wie leicht erhellet, allgemein

$$n_{2k}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q =$$

$$\frac{n(n-1)..(n-2k+1)}{1.2.3...2k}\cdot\frac{(n-2k)(n-2k-2)..(n-2k-2q+2)}{2.4.6.8....2q}$$

$$= \frac{n(n-2)..(n-2k-2q+2)}{1.3.5..(2k+2q-1)}\cdot\frac{(n-1)(n-3)..(n-2k+1)}{2.4.6...2k}\cdot\frac{(2k+2q-1)..(2k+1)}{2.4.6...2q}$$

$$= \frac{n(n-2)...(n-2k-2q+2)}{1.3.5...(2k+2q-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q$$

ist; so ist

$$P = \frac{n(n-2)..(n-2p+2)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_p$$

$$+\frac{n(n-2)..(n-2p+2)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_1\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-1}$$

$$+\frac{n(n-2)..(n-2p+2)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_2\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-2)..(n-2p+2)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_{p-1}\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_1$$

$$+\frac{n(n-2)..(n-2p+2)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_p;$$

also nach dem im Art. Binomischer Lehrsatz (10.) i. d. Z. bewiesenen Satze von den Binomial-Coefficienten

$$P = \frac{n(n-2)..(n-2p+2)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n+2p-2}{2}\right)_p.$$

Da nun das erste Glied der nach Potenzen von $\sin x$ entwickelten Reihe für $\cos nx$ offenbar die Einheit ist; so ist

$$324.\quad \cos nx = 1 - \frac{n}{1}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_1 \cdot \sin x^2 + \frac{n(n-2)}{1.3}\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)_2 \cdot \sin x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{1.3.5}\cdot\left(\frac{n+4}{2}\right)_3 \cdot \sin x^6 + \ldots.$$

oder

$$325.\quad \cos nx = 1 - \frac{n^2}{2}\sin x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7.8}\sin x^8 - \ldots.$$

für jedes n, welches positiv und eine gerade Zahl ist.

Entwickelt man ferner auch in der Reihe für $\sin nx$ alle Potenzen von $1-\sin x^2$ nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten; so erhält man als $(p+1)$tes Glied der entstehenden Reihe

$$n_1\left(\frac{n-2}{2}\right)_p + n_3\left(\frac{n-4}{2}\right)_{p-1} + n_5\left(\frac{n-6}{2}\right)_{p-2} + \ldots + n_{2p-1}\left(\frac{n-2p}{2}\right)_1 + n_{2p+1},$$

wenn man diese Größe, welche wir der Kürze wegen durch Q bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p.\cos x \sin x^{2p+1}$ multiplicirt. Weil nun allgemein

$$n_{2k-1}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q = \frac{n(n-1)..(n-2k+2)}{1.2.3...(2k-1)}\cdot\left(\frac{n-2k}{2}\right) = \frac{n(n-1)...(n-2k+1)}{1.2.3...2k}\cdot\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q \cdot \frac{2k}{n-2k+1} = n_{2k}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q \cdot \frac{2k}{n-2k+1},$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$n_{2k-1}\left(\frac{n-2k}{2}\right)_q =$$

$$\frac{n(n-2)..(n-2k-2q+2)}{1.3.5...(2k+2q-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_k \cdot \left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q \cdot \frac{2k}{n-2k+1} = \frac{n(n-2)..(n-2k-2q+2)}{1.3.5...(2k+2q-2)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-1}\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q$$

ist; so ist

$$Q = \frac{n(n-2)..(n-2p)}{1.3.5...(2p+1)}\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_p$$
$$+\frac{n(n-2)..(n-2p)}{1.3.5...(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_1\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-1}$$
$$+\frac{n(n-2)..(n-2p)}{1.3.5...(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_2\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-2)..(n-2p)}{1.3.5...(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_{p-1}\cdot\left(\frac{2p+1}{2}\right)_1$$
$$+\frac{n(n-2)..(n-2p)}{1.3.5...(2p+1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)_p,$$

d. i. nach dem angeführten Satze von den Binomial-Coefficienten

$$Q = \frac{n(n-2)..(n-2p)}{1.3.5...(2p+1)}\cdot\left(\frac{n+2p}{2}\right)_p.$$

Folglich ist

326. $$\sin nx = \cos x\left\{n\sin x - \frac{n(n-2)}{1.3}\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)_1\cdot\sin x^3 + \frac{n(n-2)(n-4)}{1.3.5}\cdot\left(\frac{n+4}{2}\right)_2\cdot\sin x^5 - \ldots.\right\}$$

oder

327. $$\sin nx = \cos x\left\{n\sin x - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\sin x^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\sin x^5 - \frac{n(n^2-4)(n-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7}\sin x^7 + \ldots..\right\}$$

für jedes n, welches positiv und eine gerade Zahl ist.

II. Ist ferner n eine positive ungerade Zahl, so ist nach (316.) und (317.)

$$\cos nx = \cos x\{(1-\sin x^2)^{\frac{n-1}{2}} - n_2(1-\sin x^2)^{\frac{n-3}{2}}\sin x^2 + \ldots..\},$$
$$\sin nx = n_1\{(1-\sin x^2)^{\frac{n-1}{2}}\sin x - n_3(1-\sin x^2)^{\frac{n-3}{2}}\sin x + \ldots..$$

Entwickelt man die Potenzen von $1-\sin x^2$ in der ersten dieser beiden Reihen nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten; so erhält man als $(p+1)$tes Glied der entstehenden Reihe

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)_p + n_2\left(\frac{n-3}{2}\right)_{p-1} + n_4\left(\frac{n-5}{2}\right)_{p-2} + \ldots + n_{2p-2}\left(\frac{n-2p+1}{2}\right)_1 + n_{2p},$$

wenn man diese Größe, welche wir durch **P'** bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p.\cos x\sin x^{2p}$ multiplicirt. Auf ähnliche Art wie vorher ist nun allgemein

$$n_{2k}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q =$$

$$\frac{n(n-1)..(n-2k+1)}{1.2.3...2k}\cdot\frac{(n-2k-1)(n-2k-3)..(n-2k-2q+1)}{2.4.6.8....2q}$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)..(n-2k-2q+1)}{1.3.5...(2k+2q-1)}\cdot\frac{n(n-2)..(n-2k+2)}{2.4.6...2k}\cdot\frac{(2k+2q-1)...(2k+1)}{2.4.6...2q}$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)..(n-2k-2q+1)}{1.3.5...(2k+2q-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_k\cdot\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q;$$

folglich

$$\begin{aligned}P' = {} & \frac{(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_p \\ & + \frac{(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_1\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-1} \\ & + \frac{(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_2\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_{p-2} \\ & \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ & + \frac{(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_{p-1}\cdot\left(\frac{2p-1}{2}\right)_1 \\ & + \frac{(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_p,\end{aligned}$$

d. i. nach dem angeführten Satze von den Binomial-Coefficienten

$$P' = \frac{(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5...(2p-1)}\cdot\left(\frac{n+2p-1}{2}\right)_p.$$

Folglich ist

328. $$\cos nx =$$

$$\cos x\left\{1 - \frac{n-1}{1}\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)_1\cdot\sin x^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{1.3}\cdot\left(\frac{n+3}{2}\right)_2\cdot\sin x^4 - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{1.3.5}\cdot\left(\frac{n+5}{2}\right)_3\cdot\sin x^6 + ...\right\}$$

oder

329. $$\cos nx = \cos x\left\{1 - \frac{n^2-1}{2}\sin x^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.}\sin x^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 + ...\right\}$$

für jedes positive ungerade n.

Entwickelt man ferner die Potenzen von $1 - \sin x^2$ in der Reihe für $\sin nx$ nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten; so erhält man als (p + 1)tes Glied der entstehenden Reihe

$$n_1\left(\frac{n-1}{2}\right)_p + n_3\left(\frac{n-3}{2}\right)_{p-1} + n_5\left(\frac{n-5}{2}\right)_{p-2} + .. + n_{2p-1}\left(\frac{n-2p+1}{2}\right)_1 + n_{2p+1},$$

wenn man diese Größe, welche wir durch Q' bezeichnen wollen, noch mit $(-1)^p . \sin x^{2p+1}$ multiplicirt. Weil nun allgemein

$$n_{2k+1}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q = \frac{n(n-1)..(n-2k)}{1.2.3..(2k+1)} \cdot \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q$$

$$= \frac{n(n-1)..(n-2k+1)}{1.2.3...2k} \cdot \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q \cdot \frac{n-2k}{2k+1}$$

$$= n_{2k}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q \cdot \frac{n-2k}{2k+1}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$n_{2k+1}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q =$$

$$\frac{(n-1)(n-3)..(n-2k-2q+1)}{1.3.5...(2k+2q-1)} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)_k \cdot \left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q \cdot \frac{n-2k}{2k+1}.$$

Aber

$$\left(\frac{n}{2}\right)_k = \frac{n(n-2)..(n-2k+2)}{2.4.6...2k},$$

$$\left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q = \frac{(2k+2q-1)(2k+2q-3)..(2k+1)}{2.4.6.8...2q};$$

also

$$\left(\frac{n}{2}\right)_k \cdot \left(\frac{2k+2q-1}{2}\right)_q \cdot \frac{n-2k}{2k+1} =$$

$$\frac{n}{2k+2q+1} \cdot \frac{(n-2)(n-4)..(n-2k)}{2.4.6...2k} \cdot \frac{(2k+2q+1)(2k+2q-1)...(2k+3)}{2.4.6.8....2q}$$

$$= \frac{n}{2k+2q+1} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)_k \cdot \left(\frac{2k+2q+1}{2}\right)_q,$$

und folglich

$$n_{2k+1}\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)_q = \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2k-2q+1)}{1.3.5.7...(2k+2q+1)} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)_k \cdot \left(\frac{2k+2q+1}{2}\right)_q$$

Also ist

$$Q' = \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5.7...(2p+1)} \cdot \left(\frac{2p+1}{2}\right)_p$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5.7....(2p+1)} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5.7...(2p+1)} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{2p+1}{2}\right)_{p-2}$$

. . . . . .

$$+ \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5.7...(2p+1)} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)_{p-1} \cdot \left(\frac{2p+1}{2}\right)_1$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5.7...(2p+1)} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)_p,$$

d. i. nach dem angeführten Satze von den Binomial-Coefficienten

$$Q' = \frac{n(n-1)(n-3)..(n-2p+1)}{1.3.5.7...(2p+1)} \cdot \left(\frac{n+2p-1}{2}\right)_p,$$

und folglich

330. $$\sin nx = n\sin x - \frac{n(n-1)}{1.3} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)_1 \cdot \sin x^3 + \frac{n(n-1)(n-3)}{1.3.5} \cdot \left(\frac{n+3}{2}\right)_2 \cdot \sin x^5 - \ldots.$$

oder

331. $$\sin nx = n\sin x - \frac{n(n^2-1)}{2.3} \cdot \sin x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5} \cdot \sin x^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7} \cdot \sin x^7 + \ldots.,$$

für jedes positive ungerade n.

Ueberlegt man, daß

$$\cos(-nx) = \cos nx, \quad \sin(-nx) = -\sin nx$$

ist; so erhellet auf der Stelle, daß die Formeln (325.), (327.), (329.), (331.) auch gelten, wenn n eine negative gerade oder ungerade Zahl ist.

35. Man kann nun auch leicht $\cos nx$ und $\sin nx$ nach Potenzen von $\cos x$ entwickeln. Zu diesen Entwickelungen gelangt man nämlich, wenn man in den in (34.) gefundenen Formeln $\frac{1}{2}\pi - x$ für x setzt, und bemerkt, daß nach (41.), (42.), (43.), (44.), (47.), (48.) für jedes positive oder negative gerade n

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \cos\frac{n\pi}{2}\cos nx + \sin\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n}{2}}\cos nx,$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \sin\frac{n\pi}{2}\cos nx - \cos\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin nx,$$

und für jedes positive oder negative ungerade n

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \cos\frac{n\pi}{2}\cos nx + \sin\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin nx,$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \sin\frac{n\pi}{2}\cos nx - \cos\frac{n\pi}{2}\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos nx$$

ist. Auf diese Weise erhält man aus (325.) und (327.) für jedes positive oder negative gerade n:

332. $$(-1)^{\frac{n}{2}}\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2}\cos x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}\cos x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}\cos x^6 + \ldots.,$$

333. $$(-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin nx = \sin x\left\{n\cos x - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\cos x^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\cos x^5 - \ldots\right\},$$

und aus (329.) und (331.), wenn n eine positive oder negative ungerade Zahl ist:

334. $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin nx = \sin x\left\{1 - \frac{n^2-1}{2}\cos x^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}\cos x^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6}\cos x^6 + \ldots\right\},$$

335. $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos nx = n\cos x - \frac{n(n^2-1)}{2.3}\cos x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}\cos x^5 - \ldots$$

36. Nach (217.) und (215.) ist

$$\cos(n+1)x = 2\cos nx\cos x - \cos(n-1)x,$$
$$\sin(n+1)x = 2\sin nx\cos x - \sin(n-1)x.$$

Setzt man in diesen Formeln nach und nach $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; so erhält man:

$$\cos x = \cos x$$
$$\cos 2x = 2\cos x^2 - 1$$
$$\cos 3x = 4\cos x^3 - 3\cos x$$
$$\cos 4x = 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1$$
$$\cos 5x = 16\cos x^5 - 20\cos x^3 + 5\cos x$$
$$\cos 6x = 32\cos x^6 - 48\cos x^4 + 18\cos x^2 - 1$$
u. s. w. u. s. w.

und

$$\sin x = \sin x$$
$$\sin 2x = \sin x(2\cos x)$$
$$\sin 3x = \sin x(4\cos x^2 - 1)$$
$$\sin 4x = \sin x(8\cos x^3 - 4\cos x)$$
$$\sin 5x = \sin x(16\cos x^4 - 20\cos x^2 + 1)$$
$$\sin 6x = \sin x(32\cos x^5 - 32\cos x^3 + 6\cos x)$$
u. s. w. u. s. w.

woraus sich leicht die beiden folgenden für jedes ganze positive n geltenden Formeln ergeben:

336. $$\cos nx = 2^{n-1}\cos x^n - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}\cos x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}\cos x^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}2^{n-9}\cos x^{n-8} + \ldots$$

337. $\sin nx =$

$$\sin x\left\{2^{n-1}\cos x^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos x^{n-5}\right.$$
$$\left. \ldots\ldots - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos x^{n-7} + \ldots\ldots\right\}$$

mit der Bestimmung, daß man in diesen Ausdrücken bloß die Glieder beibehält, in denen der Exponent von $\cos x$ positiv ist. Der Kürze wegen unterlassen wir hier, diese Formeln allgemein zu beweisen, weil der Beweis durch die bekannte nach Jacob Bernoulli benannte Schlußart nicht die mindeste Schwierigkeit hat. Man zeigt nämlich, daß die beiden in Rede stehenden Formeln, wenn sie für $\cos(n-1)x$, $\cos nx$ und $\sin(n-1)x$, $\sin nx$ gelten, jederzeit auch für $\cos(n+1)x$ und $\sin(n+1)x$ gelten müssen, wodurch ihre Allgemeinheit bewiesen ist, da man sich mittelst des Obigen leicht überzeugt, daß sie bis $\cos 6x$ und $\sin 6x$ gelten. Setzt man $\frac{1}{2}\pi - x$ für x, so kann man für $\cos nx$ und $\sin nx$ auch leicht Reihen finden, welche nach den absteigenden Potenzen von $\sin x$ fortschreiten, eine Untersuchung, welche nicht die mindeste Schwierigkeit hat, und daher hier der Kürze wegen ebenfalls bei Seite gesetzt werden soll.

37. Wir wollen nun die Summirung einiger merkwürdigen goniometrischen Reihen versuchen. Zuerst habe man die Reihe

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} - \ldots \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

wo n natürlich eine positive ganze Zahl bezeichnet; so ist nach (217.)

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$-\cos\frac{2\pi}{2n+1} = -2\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1$$
$$\cos\frac{3\pi}{2n+1} = 2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$-\cos\frac{4\pi}{2n+1} = -2\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} = \mp 2\cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n-3)\pi}{2n+1}$$
$$\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \pm 2\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1};$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt,

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\left\{S \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\}\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1$$
$$- \left\{S \pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\},$$

$$2S\left\{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right\}=\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm 2\cos\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}+1$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1};$$

also nach (205.) und (209.)

$$2S\left\{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right\}=1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}$$
$$\mp\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm 2\cos\frac{(2n+1)\pi}{2(2n+1)}\cos\frac{\pi}{2(2n+1)}$$
$$=1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\pm 2\cos\tfrac{1}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2(2n+1)};$$

folglich, weil $\cos\frac{1}{2}\pi=0$ ist, $S=\frac{1}{2}$, d. i.

338. $$\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}-\ldots\pm\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\tfrac{1}{2}.$$

Ferner habe man die Reihe

$$S'=\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1},$$

wo n immer eine positive ganze Zahl bezeichnet; so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher nach (217.)

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}=\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$\cos\frac{3\pi}{2n+1}=2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$\cos\frac{5\pi}{2n+1}=2\cos\frac{4\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{3\pi}{2n+1}$$
$$\cos\frac{7\pi}{2n+1}=2\cos\frac{6\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{5\pi}{2n+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=2\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}$$

und folglich, wenn wir

$$S''=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

setzen:

$$S'=\cos\frac{\pi}{2n+1}+2\left\{S''-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right\}\cos\frac{\pi}{2n+1}-\left\{S'-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right\}.$$

Nach (56.) ist aber

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}=-\cos\left\{\pi-\frac{2\pi}{2n+1}\right\}=-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{4\pi}{2n+1}=-\cos\left\{\pi-\frac{4\pi}{2n+1}\right\}=-\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{6\pi}{2n+1}=-\cos\left\{\pi-\frac{6\pi}{2n+1}\right\}=-\cos\frac{(2n-5)\pi}{2n+1}$$

. . . . . .

$$\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\cos\left\{\pi-\frac{2n\pi}{2n+1}\right\}=-\cos\frac{\pi}{2n+1}\ ;$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt, $S''=-S'$, und folglich

$$2S'\left\{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right\}=\cos\frac{\pi}{2n+1}-2\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$=\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

$$=-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2n+1}=1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\ .$$

Also ist $S'=\frac{1}{2}$, $S''=-\frac{1}{2}$, $S'+S''=0$, d. i.

339. $$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+..+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}\ ,$$

340. $$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+..+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}\ ,$$

341. $$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+..+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=0.$$

38. Sey jetzt

$$S=\sin\alpha+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+2\gamma)+\ldots+\sin(\alpha+n\gamma)\ ,$$

so ist nach (203.)

$$\sin\alpha=\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha+\gamma)=2\sin\alpha\cos\gamma-\sin(\alpha-\gamma)$$
$$\sin(\alpha+2\gamma)=2\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma-\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha+3\gamma)=2\sin(\alpha+2\gamma)\cos\gamma-\sin(\alpha+\gamma)$$
. . . . . .
$$\sin(\alpha+n\gamma)=2\sin(\alpha+(n-1)\gamma)\cos\gamma-\sin(\alpha+(n-2)\gamma)\ ;$$

also, wenn man addirt,

$$S=\sin\alpha+2\{S-\sin(\alpha+n\gamma)\}\cos\gamma-\sin(\alpha-\gamma)$$
$$-\{S-\sin(\alpha+(n-1)\gamma)-\sin(\alpha+n\gamma)\}\ ,$$
$$2S(1-\cos\gamma)=\sin\alpha-2\sin(\alpha+n\gamma)\cos\gamma-\sin(\alpha-\gamma)$$
$$+\sin(\alpha+n\gamma)\cos\gamma-\cos(\alpha+n\gamma)\sin\gamma+\sin(\alpha+n\gamma)$$
$$=\sin\alpha(1-\cos\gamma)+\cos\alpha\sin\gamma$$
$$+\sin(\alpha+n\gamma)(1-\cos\gamma)-\cos(\alpha+n\gamma)\sin\gamma\ ;$$

folglich, weil bekanntlich

$$1 - \cos\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2, \quad \sin\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

ist, wenn man auf beiden Seiten mit $2\sin\frac{1}{2}\gamma$ dividirt,

$$\begin{aligned} 2S\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sin\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma + \cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin(\alpha+n\gamma)\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\ &\qquad - \cos(\alpha+n\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\ &= \cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\gamma) - \cos(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\gamma), \end{aligned}$$

und folglich nach (210.)

342. $$\sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+2\gamma) + \ldots + \sin(\alpha+n\gamma)$$
$$= \frac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\gamma) - \cos(\alpha+(n+\frac{1}{2})\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}n\gamma)\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Für $\alpha = 0$ wird

343. $$\sin\gamma + \sin 2\gamma + \sin 3\gamma + \ldots + \sin n\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}n\gamma\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Sey ferner

$$S' = \cos\alpha + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+2\gamma) + \ldots + \cos(\alpha+n\gamma);$$

so ist nach (205.)

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\alpha \\ \cos(\alpha+\gamma) &= 2\cos\alpha\cos\gamma - \cos(\alpha-\gamma) \\ \cos(\alpha+2\gamma) &= 2\cos(\alpha+\gamma)\cos\gamma - \cos\alpha \\ \cos(\alpha+3\gamma) &= 2\cos(\alpha+2\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos(\alpha+n\gamma) &= 2\cos(\alpha+(n-1)\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha+(n-2)\gamma); \end{aligned}$$

also, wenn man addirt,

$$\begin{aligned} S' &= \cos\alpha + 2\{S' - \cos(\alpha+n\gamma)\}\cos\gamma - \cos(\alpha-\gamma) \\ &\qquad - \{S' - \cos(\alpha+(n-1)\gamma) - \cos(\alpha+n\gamma)\}, \\ 2S'(1-\cos\gamma) &= \cos\alpha - 2\cos(\alpha+n\gamma)\cos\gamma - \cos(\alpha-\gamma) \\ &\qquad + \cos(\alpha+n\gamma)\cos\gamma + \sin(\alpha+n\gamma)\sin\gamma + \cos(\alpha+n\gamma) \\ &= \cos\alpha(1-\cos\gamma) - \sin\alpha\sin\gamma \\ &\qquad + \cos(\alpha+n\gamma)(1-\cos\gamma) + \sin(\alpha+n\gamma)\sin\gamma, \\ 2S'\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \cos(\alpha+n\gamma)\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\ &\qquad + \sin(\alpha+n\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\ &= \sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\gamma) - \sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\gamma), \end{aligned}$$

und folglich

344. $$\cos\alpha + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+2\gamma) + \ldots + \cos(\alpha+n\gamma)$$
$$= \frac{\sin(\alpha+(n+\frac{1}{2})\gamma) - \sin(\alpha-\frac{1}{2}\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\gamma)\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Für $\alpha = 0$ ist

345. $$1 + \cos\gamma + \cos 2\gamma + \ldots + \cos n\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}n\gamma\sin\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

oder

346. $$\cos\gamma + \cos 2\gamma + \ldots + \cos n\gamma = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\gamma + \sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} - 1$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\gamma - \sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}n\gamma\cos\frac{1}{2}(n+1)\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

39. Für die beliebigen Winkel oder Bogen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu, \nu$ ist nach (194.)

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} = \cot\alpha - \cot\beta,$$

$$\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma} = \cot\beta - \cot\gamma,$$

$$\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma\sin\delta} = \cot\gamma - \cot\delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin\mu\sin\nu} = \cot\mu - \cot\nu,$$

$$\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\nu\sin\alpha} = \cot\nu - \cot\alpha.$$

Also ist immer

347. $$0 = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma\sin\delta} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin\mu\sin\nu} + \frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\nu\sin\alpha}.$$

Auf ganz ähnliche Art ist nach (193.)

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma} = \operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\beta,$$

$$\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\delta} = \operatorname{tang}\delta - \operatorname{tang}\gamma,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\sin(\nu-\mu)}{\cos\mu\cos\nu} = \operatorname{tang}\nu - \operatorname{tang}\mu,$$

$$\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\cos\nu\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\nu,$$

und folglich immer

348. $$0 = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\delta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\delta} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sin(\nu-\mu)}{\cos\mu\cos\nu} + \frac{\sin(\alpha-\nu)}{\cos\nu\cos\alpha}.$$

Nach (225.) ist

$$\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta^2 - \sin\alpha^2$$
$$\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) = \sin\gamma^2 - \sin\beta^2 ,$$
$$\sin(\delta+\gamma)\sin(\delta-\gamma) = \sin\delta^2 - \sin\gamma^2 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) = \sin\nu^2 - \sin\mu^2 ,$$
$$\sin(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) = \sin\alpha^2 - \sin\nu^2 ,$$

und folglich

349. $$0 = \sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) + \ldots$$
$$\ldots + \sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) + \sin(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) .$$

Auch ist

$$\cos(x+y)\sin(x-y) =$$
$$(\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\sin x\cos y - \cos x\sin y)$$
$$= \sin x\cos x(\sin y^2 + \cos y^2) - \sin y\cos y(\sin x^2 + \cos x^2)$$
$$= \sin x\cos x - \sin y\cos y$$

und folglich

$$\cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha ,$$
$$\cos(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) = \sin\gamma\cos\gamma - \sin\beta\cos\beta ,$$
$$\cos(\delta+\gamma)\sin(\delta-\gamma) = \sin\delta\cos\delta - \sin\gamma\cos\gamma ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) = \sin\nu\cos\nu - \sin\mu\cos\mu ,$$
$$\cos(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) = \sin\alpha\cos\alpha - \sin\nu\cos\nu ;$$

also

350. $$0 = \cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \cos(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) + \ldots.$$
$$\ldots + \cos(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) + \cos(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) .$$

Aehnliche Formeln würden sich noch mehrere finden lassen.

40. Sey jetzt n immer eine positive ganze Zahl.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl; so ist, wenn wir der Kürze wegen $\sin x = p$ setzen, nach (325.)

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2}p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n^2(n^2-4)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5.6\ldots.n}p^n ,$$

oder auch, weil

$$\frac{n^2(n^2-4)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5.6\ldots n} = \frac{n(n+2)\ldots(2n-2).n(n-2)\ldots2}{2.3.4.5.6\ldots.n}$$
$$= \frac{2.4.6.8\ldots n(n+2)\ldots(2n-2)}{1.2.3.4.5.6\ldots(n-1)} = 2^{n-1}$$

ist,

351. $$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2}p^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} . 2^{n-1} p^n .$$

Nach (48.) verschwindet $\cos nx$ für

$$x = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \pm\frac{5\pi}{2n}, \ldots\ldots \pm\frac{(n-1)\pi}{2n} .$$

Also verschwindet auch die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Gleichung (351.) für

$$p = \pm\sin\frac{\pi}{2n}, \pm\sin\frac{3\pi}{2n}, \pm\sin\frac{5\pi}{2n}, \ldots\ldots \pm\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} .$$

Alle diese Werthe von p, deren Anzahl $= n$ ist, sind unter einander ungleich, weil

$$\frac{(n-1)\pi}{2n} < \tfrac{1}{2}\pi$$

ist. Daher ist nach der Theorie der Gleichungen für jedes gerade n

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \left\{\sin x - \sin\frac{\pi}{2n}\right\} .. \left\{\sin x - \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}$$
$$\times \left\{\sin x + \sin\frac{\pi}{2n}\right\} .. \left\{\sin x + \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\},$$

d. i., wie leicht erhellet,

352. $$\cos nx = 2^{n-1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\left\{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \left\{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\} .$$

Ist n eine ungerade Zahl, so ist nach (329.)

$$\cos nx = \cos x\left\{1 - \frac{n^2-1}{2}p^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}p^4 - \ldots\ldots\right.$$
$$\left. \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{(n^2-1)(n^2-9)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots(n-1)} p^{n-1}\right\},$$

oder auch, weil

$$\frac{(n^2-1)(n^2-9)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots(n-1)} = \frac{(n+1)(n+3)..(2n-2)(n-1)(n-3)..2}{2.3.4.5\ldots(n-1)}$$
$$= \frac{2.4.6.8\ldots(n-1)(n+1)..(2n-2)}{1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)} = 2^{n-1}$$

ist,

353. $$\cos nx = \cos x\left\{1 - \frac{n^2-1}{2}p^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}p^4 - \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . 2^{n-1} p^{n-1}\right\} .$$

Nach (48.) verschwindet $\cos nx$ für

$$x = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \pm\frac{5\pi}{2n}, \ldots \pm\frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

Also verschwindet auch die eingeklammerte Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (353.) für

$$p = \pm\sin\frac{\pi}{2n}, \pm\sin\frac{3\pi}{2n}, \pm\sin\frac{5\pi}{2n}, \ldots \pm\sin\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

und es ist folglich, weil diese $n-1$ Werthe von p, da

$$\frac{(n-2)\pi}{2n} < \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, sämmtlich unter einander verschieden sind, nach dem angeführten Satze von den Gleichungen für jedes ungerade n

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}\cos x\left\{\sin x - \sin\frac{\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x - \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\}$$
$$\times\left\{\sin x + \sin\frac{\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x + \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\},$$

oder, wie leicht erhellet,

354. $$\cos nx = 2^{n-1}\cos x\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\left\{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}....$$
$$....\left\{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}.$$

Setzt man $x = 0$, so erhält man aus (352.) für ein gerades n

355. $$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2....\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

und aus (354.) für ein ungerades n

356. $$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2....\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2.$$

Eben so folgt aus dem Vorhergehenden und bekannten Sätzen von den Gleichungen leicht, daß für ein gerades n immer

357. $$\frac{n^2}{2} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2},$$

oder

358. $$\frac{n^2}{2} = \left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{2n}\right)^2 + .. + \left(\operatorname{cosec}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

und für ein ungerades n immer

359. $$\frac{n^2-1}{2} = \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2}$$

oder

$$360.\ \frac{n^2-1}{2} = \left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{2n}\right)^2 + \ldots + \left(\operatorname{cosec}\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

ist.

Ferner ist für ein gerades n nach (327.)

$$\sin nx = p\cos x\left\{n - \frac{n(n^2-4)}{2.3}p^2 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}p^4 - \ldots . \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{n(n^2-4)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots(n-1)}p^{n-2}\right\}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\frac{n^2(n^2-4)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots.n} = \frac{n(n^2-4)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5\ldots(n-1)} = 2^{n-1}.$$

Also

$$361.\ \sin nx = p\cos x\left\{n - \frac{n(n^2-4)}{2.3}p^2 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}p^4 \right.$$
$$\left. \ldots . + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2^{n-1}p^{n-2}\right\}.$$

Nach (43.) wird $\sin nx = 0$ für

$$x = \pm\frac{2\pi}{2n},\ \pm\frac{4\pi}{2n},\ \pm\frac{6\pi}{2n},\ \ldots \pm\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

und die eingeklammerte Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (361.) verschwindet also für

$$p = \pm\sin\frac{2\pi}{2n},\ \pm\sin\frac{4\pi}{2n},\ \pm\sin\frac{6\pi}{2n},\ \ldots \pm\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

Daher ist

$$\sin nx = (-1)^{\frac{n-2}{2}}2^{n-1}\sin x\cos x\left\{\sin x - \sin\frac{2\pi}{2n}\right\}\ldots\left\{\sin x - \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\}$$
$$\times\left\{\sin x + \sin\frac{2\pi}{2n}\right\}\ldots\left\{\sin x + \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right\}$$

nach einer ganz ähnlichen Schlußweise wie vorher, oder, wie leicht erhellet,

$$362.\ \sin nx = 2^{n-1}\sin x\cos\left\{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\left\{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\ldots.$$
$$\ldots.\ \left\{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\},$$

für jedes gerade n.

Für ein ungerades n ist nach (331.)

$$\sin nx = p\left\{n - \frac{n(n^2-1)}{2.3}p^2 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}p^4 - \ldots . \right.$$
$$\left. \ldots . + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n(n^2-1)\ldots(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5.\ldots.n}p^{n-1}\right\},$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{n(n^2-1)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5...n} = \frac{(n^2-1)(n^2-9)..(n^2-(n-2)^2)}{2.3.4.5...(n-1)} = 2^{n-1}$$

ist,

363. $$\sin nx = p\left\{n - \frac{n(n^2-1)}{2.3}p^2 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}p^4 ..... \right.$$
$$\left. .... + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . 2^{n-1} p^{n-1} \right\}.$$

Nach (43.) verschwindet $\sin nx$ für

$$x = \pm\frac{2\pi}{2n}, \pm\frac{4\pi}{2n}, \pm\frac{6\pi}{2n}, ... \pm\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

und es verschwindet also auch die eingeklammerte Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (363.) für

$$p = \pm\sin\frac{2\pi}{2n}, \pm\sin\frac{4\pi}{2n}, \pm\sin\frac{6\pi}{2n}, ... \pm\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Folglich ist,

$$\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin x \left\{\sin x - \sin\frac{2\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x - \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}$$
$$\times \left\{\sin x + \sin\frac{2\pi}{2n}\right\}..\left\{\sin x + \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\},$$

oder, wie leicht erhellet,

364. $$\sin nx = 2^{n-1}\sin x \left\{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}\left\{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}....$$
$$.... \left\{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2 - \sin x^2\right\}.$$

Auch ergiebt sich mittelst des Obigen und bekannter Sätze von den Gleichungen leicht

365. $$n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2...\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein gerades n, und

366. $$n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2...\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n, so wie

367. $$\frac{n^2-4}{2.3} = \frac{1}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2} + .. + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2},$$

oder

368. $$\frac{n^2-4}{2.3} =$$
$$\left(\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{6\pi}{2n}\right)^2 + .. + \left(\operatorname{cosec}\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein gerades n, und

369. $$\frac{n^2-1}{2.3} = \frac{1}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2},$$

oder

370. $$\frac{n^2-1}{2.3} =$$

$$\left(\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{2n}\right)^2 + \left(\operatorname{cosec}\frac{6\pi}{2n}\right)^2 + \ldots + \left(\operatorname{cosec}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n.

Dividirt man die Gleichungen (352.), (354.), (362.), (364.) respective durch die Gleichungen (355.), (356.), (365.), (366.); so erhält man:

371. $$\cos nx =$$

$$\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{3\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein gerades n;

372. $$\cos nx =$$

$$\cos x\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{3\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein ungerades n;

373. $$\sin nx =$$

$$n\sin x\cos x\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{2\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{4\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein gerades n;

374. $$\sin nx =$$

$$n\sin x\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{2\pi}{2n}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{4\pi}{2n}}\right)^2\right\}\ldots\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)^2\right\}$$

für ein ungerades n.

Weil, wie leicht erhellet,

375. $$\sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2}$$

ist; so lassen sich die Gleichungen (352.), (354.), (362.), (364.) auch auf folgende Art darstellen:

376. $$\cos nx =$$

$$2^{\frac{n}{2}-1}\left\{\cos 2x - \cos\frac{\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x - \cos\frac{3\pi}{n}\right\}\ldots\left\{\cos 2x - \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

für jedes gerade n;

377. $\cos nx =$

$$2^{\frac{n-1}{2}}\cos x\left\{\cos 2x-\cos\frac{\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x-\cos\frac{3\pi}{n}\right\}..\left\{\cos 2x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right\}$$

für jedes ungerade n;

378. $\sin nx =$

$$2^{\frac{n}{2}-1}\sin 2x\left\{\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x-\cos\frac{4\pi}{n}\right\}..\left\{\cos 2x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right\}$$

für jedes gerade n;

379. $\sin nx =$

$$2^{\frac{n-1}{2}}\sin x\left\{\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{n}\right\}\left\{\cos 2x-\cos\frac{4\pi}{n}\right\}..\left\{\cos 2x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

für jedes ungerade n.

41. Nach (217.) ist

$$2\cos(n+1)x = 2\cos x\,.\,2\cos nx - 2\cos(n-1)x\,;$$

Aus dieser Gleichung erhält man, wenn man

$$2\cos x = 1 + \frac{1}{y}$$

setzt, nach und nach

$$2\cos 2x = 2\cos x\,.\,2\cos x - 2$$
$$= \left\{y+\frac{1}{y}\right\}\left\{y+\frac{1}{y}\right\} - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2}\,,$$
$$2\cos 3x = 2\cos x\,.\,2\cos 2x - 2\cos x$$
$$= \left\{y+\frac{1}{y}\right\}\left\{y^2+\frac{1}{y^2}\right\} - \left\{y+\frac{1}{y}\right\} = y^3 + \frac{1}{y^3}\,,$$
$$2\cos 4x = 2\cos x\,.\,2\cos 3x - 2\cos 2x$$
$$= \left\{y+\frac{1}{y}\right\}\left\{y^3+\frac{1}{y^3}\right\} - \left\{y^2+\frac{1}{y^2}\right\} = y^4 + \frac{1}{y^4}\,,$$
u. s. w. u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ergiebt sich also jetzt aus dem Vorhergehenden das merkwürdige Theorem, daß, wenn

380. $2\cos x = y + \frac{1}{y}$

ist, für jedes positive ganze n immer

381. $2\cos nx = y^n + \frac{1}{y^n}\,,$

oder, was dasselbe ist, daß, wenn

382. $y^2 - 2y\cos x + 1 = 0$

ist, für jedes positive ganze n immer

383. $y^{2n} - 2y^n\cos nx + 1 = 0$

ist. Die beiden Gleichungen (382.) und (383.) existiren also immer zusammen, so daß nämlich jede Wurzel der ersten immer auch eine Wurzel der zweiten ist.

Löst man die quadratische Gleichung (382.) nach bekannten Regeln der Algebra auf, so erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$y = \cos x \pm i \sin x$$

für die beiden Wurzeln dieser Gleichung, welche also auch Wurzeln der Gleichung (383.) sind. Ist $\sin x$ nicht $= 0$, so sind diese beiden Wurzeln ungleich, und nach einem sehr bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen ist also

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$

durch das Product

$$\{y - \cos x - i \sin x\}\{y - \cos x + i \sin x\}$$
$$= y^2 - 2y \cos x + 1$$

theilbar. Daß dies aber auch dann noch Statt findet, wenn $\sin x = 0$ ist, läßt sich auf folgende Art übersehen. Für jedes x ist

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$
$$= \{y^n - \cos nx - i \sin nx\}\{y^n - \cos nx + i \sin nx\},$$

und folglich, wenn man $n = 1$ setzt, wie wir auch schon kurz vorher gesehen haben,

$$y^2 - 2y \cos x + 1$$
$$= \{y - \cos x - i \sin x\}\{y - \cos x + i \sin x\}.$$

Ist nun $\sin x = 0$, so ist, wenn k eine gewisse positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $x = k\pi$, also $nx = nk\pi$, $\sin nx = 0$, und für $\sin x = 0$ ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$y^2 - 2y \cos x + 1 = (y - \cos x)^2,$$
$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1 = (y^n - \cos nx)^2;$$

Für $y = \cos x$ ist $(y - \cos x)^2 = 0$. Also ist $y = \cos x$ in dem vorliegenden Falle ein Wurzel der Gleichung

$$y^2 - 2y \cos x + 1 = 0,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch eine Wurzel der Gleichung

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1 = 0,$$

d. i. eine Wurzel der Gleichung

$$(y^n - \cos nx)^2 = 0;$$

folglich offenbar auch eine Wurzel der Gleichung

$$y^n - \cos nx = 0.$$

Daher ist die Function $y^n - \cos nx$ durch $y - \cos x$, also natürlich auch $(y^n - \cos nx)^2$ durch $(y - \cos x)^2$, d. i. nach dem Obigen

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$

durch

$$y^2 - 2y \cos x + 1$$

theilbar.

Hieraus sieht man also, daß in völliger Allgemeinheit die Größe

$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1$$

immer durch die Größe

$$y^2 - 2y \cos x + 1$$

theilbar ist.

Also ist auch, wenn man x für nx setzt, die Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

jederzeit durch die Function

$$y^2 - 2y \cos \frac{x}{n} + 1$$

theilbar. Weil nun aber für jedes positive oder negative ganze k bekanntlich

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \cos 2k\pi - \sin x \sin 2k\pi = \cos x ,$$

folglich auch für jedes positive oder negative ganze k

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = y^{2n} - 2y^n \cos(x + 2k\pi) + 1$$

ist; so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar das in jeder Beziehung höchst merkwürdige Theorem, daß die Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

für jedes positive oder negative ganze k durch

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 2k\pi}{n} + 1$$

ohne Rest theilbar ist.

Setzt man also

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots (n-1) ;$$

so sind

$$y^2 - 2y \cos \frac{x}{n} + 1 ,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 2\pi}{n} + 1 ,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 4\pi}{n} + 1 ,$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 6\pi}{n} + 1 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y^2 - 2y \cos \frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + 1$$

n reelle Factoren des zweiten Grades der Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 .$$

Zerlegt man jeden dieser reellen Factoren, wie sehr leicht geschehen kann, in zwei Factoren des ersten Grades; so findet man, daß die Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

jederzeit die folgenden 2n Factoren des ersten Grades hat:

$$y - \cos\frac{x}{n} \mp i\sin\frac{x}{n},$$

$$y - \cos\frac{x+2\pi}{n} \mp i\sin\frac{x+2\pi}{n},$$

$$y - \cos\frac{x+4\pi}{n} \mp i\sin\frac{x+4\pi}{n},$$

$$y - \cos\frac{x+6\pi}{2} \mp i\sin\frac{x+6\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y - \cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} \mp i\sin\frac{x+2(n-1)\pi}{n}.$$

Die Reihe der Factoren, welche man erhält, wenn man die obern Zeichen nimmt, wollen wir die erste, die Reihe der Factoren dagegen, welche man erhält, wenn man die untern Zeichen nimmt, die zweite Reihe nennen, und das Product aller Factoren der ersten Reihe durch $\mathbf{P}$, das Product aller Factoren der zweiten Reihe dagegen durch $\mathbf{P'}$ bezeichnen.

Zuerst erhellet nun leicht, daß alle Factoren in jeder der beiden Reihen unter einander ungleich sind. Sollten nämlich irgend zwei Factoren einer und derselben Reihe einander gleich seyn; so müßte für zwei positive ganze Θ und Θ', deren keines größer als $\mathbf{n-1}$ ist, zugleich

$$\cos\frac{x+2\Theta\pi}{n} = \cos\frac{x+2\Theta'\pi}{n},\quad \sin\frac{x+2\Theta\pi}{n} = \sin\frac{x+2\Theta'\pi}{n}$$

seyn. Wegen der ersten dieser beiden Gleichungen wäre nach (32. II.), wenn k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = 2k\pi \pm \frac{x+2\Theta\pi}{n}.$$

Wegen der zweiten der beiden in Rede stehenden Gleichungen wäre dagegen, wenn auch k' eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach (32. I.) entweder

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = 2k'\pi + \frac{x+2\Theta\pi}{n}$$

oder

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = (2k'+1)\pi - \frac{x+2\Theta\pi}{n}.$$

Weil aber nun beide Gleichungen zugleich Statt finden, so müßte offenbar für ein gewisses positives oder negatives ganzes k

$$\frac{x+2\Theta'\pi}{n} = 2k\pi + \frac{x+2\Theta\pi}{n}$$

seyn, woraus leicht

$$\Theta' - \Theta = nk$$

folgt. Daß dies ungereimt ist, fällt sogleich in die Augen, indem nämlich der absolute Werth von nk mindestens $= n$, der absolute Werth von $\Theta' - \Theta$ dagegen offenbar immer kleiner als n ist. Man sieht also, daß die beiden obigen Gleichungen nie zugleich Statt finden können, und daß folglich die Factoren in jeder der beiden obigen Reihen sämmtlich unter einander ungleich sind.

Es könnte aber auch seyn, daß ein Factor der ersten Reihe einem Factor der zweiten Reihe gleich wäre, ein Fall, der offenbar nur dann eintreten könnte, wenn für ein gewisses Θ

$$\sin\frac{x + 2\Theta\pi}{n} = 0$$

wäre. In dieser Beziehung muß man zwei Fälle unterscheiden, deren jeden wir jetzt vollständig beleuchten wollen.

Ist nämlich zuerst $\sin x$ nicht $= 0$, so kann nie

$$\sin\frac{x + 2\Theta\pi}{n} = 0$$

seyn, weil sonst für ein gewisses positives oder negatives k

$$\frac{x + 2\Theta\pi}{n} = k\pi\,,$$

folglich

$$x = (nk - 2\Theta)\pi\,,$$

also $\sin x = 0$ seyn müßte, welches gegen die Voraussetzung ist. Wenn also $\sin x$ nicht $= 0$ ist, so ist kein Factor der ersten Reihe einem Factor der zweiten Reihe gleich, und die obigen 2n Factoren des ersten Grades der Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

sind also, weil auch alle Factoren jeder der beiden Reihen unter einander ungleich sind, sämmtlich unter einander ungleich. Also ist nach bekannten Sätzen von den Gleichungen, wenn $\sin x$ nicht $= 0$ ist,

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = PP'.$$

Ist aber $\sin x = 0$, so ist, weil

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

für jedes x dem Producte

$$\{y^n - \cos x - i\sin x\}\{y^n - \cos x + i\sin x\}$$

gleich ist:

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = (y^n - \cos x)^2\,,$$

und jede Wurzel der Gleichung

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = 0$$

ist also in diesem Falle auch eine Wurzel der Gleichung

$$y^n - \cos x = 0,$$

folglich auch jeder Factor des ersten Grades der Function

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1$$

ein Factor des ersten Grades der Function

$$y^n - \cos x.$$

Nach dem Obigen sind also sowohl die Factoren der ersten Reihe, als auch die Factoren der zweiten Reihe n Factoren des ersten Grades der Function $y^n - \cos x$, und es ist folglich, weil wir gesehen haben, daß für jedes x sämmtliche Factoren in jeder der beiden Reihen unter einander ungleich sind, nach der Theorie der Gleichungen sowohl

$$y^n - \cos x = P,$$

als auch

$$y^n - \cos x = P',$$

folglich

$$(y^n - \cos x)^2 = PP',$$

d. i. nach dem Vorhergehenden auch in diesem Falle, wo $\sin x = 0$ ist,

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = PP'.$$

Man sieht also, daß für jedes x

$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = PP',$$

und folglich, wie nun aus dem Obigen leicht folgt,

384.
$$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y \cos \frac{x}{n} + 1\right\} \times \left\{y^2 - 2y \cos \frac{x+2\pi}{n} + 1\right\} \times \left\{y^2 - 2y \cos \frac{x+4\pi}{n} + 1\right\} \times \left\{y^2 - 2y \cos \frac{x+6\pi}{n} + 1\right\} \cdots \times \left\{y^2 - 2y \cos \frac{x+2(n-1)\pi}{n} + 1\right\}$$

ist. Diese Gleichung gilt für jedes n. Wir wollen nun aber auch die beiden Fälle, wenn n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, besonders betrachten.

Ist zuerst n eine gerade Zahl, so kann man die Factoren des Products auf der rechten Seite der Gleichung (384.) auf folgende Art in zwei Klassen theilen:

$$y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+2\pi}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+4\pi}{n} + 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+(n-2)\pi}{n} + 1$$

und

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+n\pi}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+(n+2)\pi}{n} + 1,$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+(n+4)\pi}{n} + 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^2 - 2y\cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} + 1.$$

Nun ist aber

$$\frac{x+2(n-1)\pi}{n} + \frac{2\pi-x}{n} = 2\pi,$$

$$\frac{x+2(n-2)\pi}{n} + \frac{4\pi-x}{n} = 2\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x+(n+2)\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi-x}{n} = 2\pi,$$

$$\frac{x+n\pi}{n} + \frac{n\pi-x}{n} = 2\pi;$$

also nach (60.)

$$\cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n} = \cos\frac{2\pi-x}{n},$$

$$\cos\frac{x+2(n-2)\pi}{n} = \cos\frac{4\pi-x}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{x+(n+2)\pi}{n} = \cos\frac{(n-2)\pi-x}{n},$$

$$\cos\frac{x+n\pi}{n} = \cos\frac{n\pi-x}{n},$$

und folglich nach (384.), wenn n eine gerade Zahl ist:

385. $$y^{2n} - 2y^n \cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{2\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{2\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + 1\right\}$$
$$\times\left\{y^2 - 2y\cos\frac{n\pi - x}{n} + 1\right\}.$$

Ist n eine ungerade Zahl, so kann man die Factoren des Products auf der rechten Seite der Gleichung (384.) auf folgende Art in zwei Klassen theilen:

$$y^2 - 2y\cos\frac{x}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + 2\pi}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + 4\pi}{n} + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n-1)\pi}{n} + 1$$

und

$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n+1)\pi}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n+3)\pi}{n} + 1,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + (n+5)\pi}{n} + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + 1.$$

Nun ist aber

$$\frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + \frac{2\pi - x}{n} = 2\pi,$$
$$\frac{x + 2(n-2)\pi}{n} + \frac{4\pi - x}{n} = 2\pi,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x+(n+3)\pi}{n}+\frac{(n-3)\pi-x}{n}=2\pi,$$

$$\frac{x+(n+1)\pi}{n}+\frac{(n-1)\pi-x}{n}=2\pi,$$

folglich nach (60.)

$$\cos\frac{x+2(n-1)\pi}{n}=\cos\frac{2\pi-x}{n},$$

$$\cos\frac{x+2(n-2)\pi}{n}=\cos\frac{4\pi-x}{n},$$

. . . . . .

$$\cos\frac{x+(n+3)\pi}{n}=\cos\frac{(n-3)\pi-x}{n},$$

$$\cos\frac{x+(n+1)\pi}{n}=\cos\frac{(n-1)\pi-x}{n},$$

und daher nach (384.), wenn n eine ungerade Zahl ist:

386. $$y^{2n}-2y^n\cos x+1=\left\{y^2-2y\cos\frac{x}{n}+1\right\}$$
$$\times\left\{y^2-2y\cos\frac{2\pi-x}{n}+1\right\}$$
$$\times\left\{y^2-2y\cos\frac{2\pi+x}{n}+1\right\}$$
. . . . . .
$$\times\left\{y^2-2y\cos\frac{(n-1)\pi-x}{n}+1\right\}$$
$$\times\left\{y^2-2y\cos\frac{(n-1)\pi+x}{n}+1\right\}.$$

Weil

$$y^{2n}+2y^n\cos x+1=y^{2n}-2y^n\cos(\pi-x)+1$$

ist; so ergiebt sich aus (385.) und (386.), wenn n eine gerade Zahl ist:

387. $$y^{2n}+2y^n\cos x+1=\left\{y^2-2y\cos\frac{\pi-x}{n}+1\right\}$$
$$\times\left\{y^2-2y\cos\frac{\pi+x}{n}+1\right\}$$
$$\times\left\{y^2-2y\cos\frac{3\pi-x}{n}+1\right\}$$
$$\times\left\{y^2-2y\cos\frac{3\pi+x}{n}+1\right\}$$
. . . . . .

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-1)\pi - x}{n} + 1\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-1)\pi + x}{n} + 1\right\},$$

und, wenn n eine ungerade Zahl ist:

388. $$y^{2n} + 2y^n\cos x + 1 = \left\{y^2 - 2y\cos\frac{\pi - x}{n} + 1\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{\pi + x}{n} + 1\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{3\pi - x}{n} + 1\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{3\pi + x}{n} + 1\right\}$$

. . . . . .

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + 1\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + 1\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2y\cos\frac{n\pi - x}{n} + 1\right\}.$$

Weil

$$y^{2n} - 2a^n y^n\cos x + a^{2n} = a^{2n}\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{2n} - 2\left(\frac{y}{a}\right)^n\cos x + 1\right\}$$

ist; so erhält man aus den Gleichungen (384.), (385.), (386.), (387.), (388.) auch leicht:

389. $$y^{2n} - 2a^n y^n\cos x + a^{2n} = \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 2\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 4\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 6\pi}{n} + a^2\right\}$$

. . . . . .

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x + 2(n-1)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für jedes n.

390. $$y^{2n} - 2a^n y^n\cos x + a^{2n} = \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{x}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi - x}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi + x}{n} + a^2\right\}$$

. . . . . .

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{n\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

für ein gerades n.

391. $$y^{2n} - 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

. . . . . .

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

für ein ungerades n.

392. $$y^{2n} + 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

. . . . . .

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

für ein gerades n.

393. $$y^{2n} + 2a^n y^n \cos x + a^{2n} = \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi - x}{n} + a^2 \right\}$$

$$\times \left\{ y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi + x}{n} + a^2 \right\}$$

. . . . . .

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi - x}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi + x}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{n\pi - x}{n} + a^2\right\}$$

für ein ungerades n.

Setzt man $x = 0$, so erhält man aus den Gleichungen (390.), (391.), (392.), (393.) leicht:

394. $$y^n - a^n = (y^2 - a^2)\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein gerades n.

395. $$y^n - a^n = (y - a)\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein ungerades n.

396. $$y^n + a^n = \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{5\pi}{n} + a^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein gerades n.

397. $$y^n + a^n = (y+a)\left\{y^2 - 2ay\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right\} \times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{3\pi}{n} + a^2\right\} \times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{5\pi}{n} + a^2\right\} \times \ldots \times \left\{y^2 - 2ay\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right\}$$

für ein ungerades n.

Da die vorhergehenden vier Gleichungen durch Ausziehung von Quadratwurzeln erhalten worden sind; so kann man noch fragen, ob in denselben die Größen auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen mit den richtigen Vorzeichen genommen worden sind. Daß dies wirklich der Fall ist, läßt sich auf folgende Art übersehen. Weil

$$y^2 - 2ay + a^2 = (y-a)^2$$

eine positive Größe ist; so ist um so mehr für jeden Winkel α die Größe

$$y^2 - 2ay\cos\alpha + a^2$$

stets positiv. Daher sind in den Producten auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen in den in Rede stehenden Gleichungen die quadratischen trinomischen Factoren sämmtlich positive Größen, und in den Gleichungen (394.), (395.), (397.) hängen also die Vorzeichen der Producte auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen respective bloß von den Factoren $y^2 - a^2$, $y - a$, $y + a$ ab, das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (396.) ist aber stets positiv. Weil nun, wie leicht erhellet,

$$y^n - a^n = (y^2 - a^2)(y^{n-2} + y^{n-4}a^2 + \ldots + y^2 a^{n-4} + a^{n-2}),$$

und für ein gerades n die Größe

$$y^{n-2} + y^{n-4}a^2 + \ldots + y^2 a^{n-4} + a^{n-2}$$

offenbar stets positiv ist; so hat, wenn n eine gerade Zahl ist, $y^n - a^n$ mit $y^2 - a^2$ jederzeit einerlei Vorzeichen. Wenn ferner n eine ungerade Zahl ist, so hat $y^n - a^n$ mit $y - a$ stets einerlei Vorzeichen, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Wir wollen annehmen, daß $y - a$ positiv oder $y - a > 0$, also $y > a$ sey; so sind y und a entweder beide positiv oder beide negativ, oder y ist positiv und a negativ. Im ersten Falle ist offenbar $y^n > a^n$, $y^n - a^n > 0$. Im zweiten Falle ist der absolute Werth von y kleiner wie der absolute Werth von a, also auch der absolute Werth von y^n kleiner als der absolute Werth von a^n; da aber n eine ungerade Zahl ist, und y und a beide negativ sind, so sind auch y^n und a^n beide negativ, und folglich offenbar $y^n > a^n$ oder wieder $y^n - a^n > 0$. Im dritten Falle

ist y^n positiv, a^n dagegen, weil n eine ungerade Zahl ist, negativ; folglich wieder $y^n > a^n$, $y^n - a^n > 0$. Ist also $y - a > 0$, so ist, wenn n eine ungerade Zahl ist, immer auch $y^n - a^n > 0$. Ist $y - a < 0$, so ist $a - y > 0$; also, wenn n eine ungerade Zahl ist, nach dem Vorhergehenden $a^n - y^n > 0$, d. i. $y^n - a^n < 0$. Wäre $y - a = 0$, d. i. $y = a$, so wäre offenbar auch $y^n = a^n$, $y^n - a^n = 0$, und man sieht also, daß $y - a$ und $y^n - a^n$, wenn n eine ungerade Zahl ist, jederzeit gleiche Vorzeichen haben. Weil nun

$$(y^n - a^n)(y^n + a^n) = y^{2n} - a^{2n},\quad (y-a)(y+a) = y^2 - a^2$$

ist, und $y^{2n} - a^{2n}$ und $y^2 - a^2$ nach dem Obigen gleiche Vorzeichen haben; so haben auch die Producte

$$(y^n - a^n)(y^n + a^n) \text{ und } (y-a)(y+a)$$

jederzeit gleiche Vorzeichen. Für ein ungerades n haben aber, wie so eben bewiesen worden ist, $y^n - a^n$ und $y - a$ gleiche Vorzeichen; also haben für ein ungerades n jederzeit auch $y^n + a^n$ und $y + a$ gleiche Vorzeichen. Aus allen diesen Betrachtungen erhellet nun auf der Stelle, daß die Gleichungen (394.), (395.), (397.) völlig richtig sind. Weil aber nach dem Obigen das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (396.) stets positiv, und, weil in dieser Gleichung n als eine gerade Zahl angenommen wird, auch $y^n + a^n$ offenbar stets positiv ist; so erhellet auch die völlige Richtigkeit dieser Gleichung. Diese oft mit Unrecht vernachlässigten Bemerkungen schien uns die Strenge der Darstellung noch nothwendig zu fordern.

Setzt man in der Gleichung (396.) $a = y = 1$, so erhält man

$$2 = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{3\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{5\pi}{n}\right)\ldots\left(1 - \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

oder

$$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein gerades n, welches die schon in (355.) auf anderm Wege gefundene Gleichung ist. Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel aus, so erhält man

$$1 = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

wo die Wurzelgröße $2^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{2^{n-1}}$ positiv zu nehmen ist, da das Product

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

positiv ist, indem keiner der Bogen

$$\frac{\pi}{2n},\ \frac{3\pi}{2n},\ \frac{5\pi}{2n},\ \ldots,\ \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$\frac{1}{2}\pi$ übersteigt

Setzt man in der Formel (397.) $a = y = 1$, so erhält man

$$2 = 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{5\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right),$$

oder

$$1 = 2^{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n, welches die schon in (356.) auf anderm Wege gefundene Formel ist. Durch Ausziehung der Quadratwurzel erhält man

$$1 = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

wobei man wieder zu bemerken hat, daß das Product

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

positiv ist und also auch $2^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{2^{n-1}}$ positiv genommen werden muß.

Dividirt man auf beiden Seiten der Gleichung (394.) durch $y^2 - a^2$, so findet man, weil

$$\frac{y^n - a^n}{y^2 - a^2} = y^{n-2} + y^{n-4}a^2 + \ldots + y^2 a^{n-4} + a^{n-2}$$

ist, für $a = y = 1$ leicht:

$$\frac{n}{2} = 2^{\frac{n-2}{2}}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$

oder

$$n = 2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^2,$$

für ein gerades n, welches die schon in (365.) gefundene Gleichung ist. Durch Ausziehung der Quadratwurzel ergiebt sich

$$\sqrt{n} = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-2)\pi}{2n},$$

wobei alle Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Weil

$$\frac{y^n - a^n}{y - a} = y^{n-1} + y^{n-2}a + \ldots + ya^{n-2} + a^{n-1}$$

ist, so giebt die Gleichung (395.) für $a = y = 1$

$$n=2^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

oder

$$n=2^{n-1}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{4\pi}{2n}\right)^2\left(\sin\frac{6\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2$$

für ein ungerades n, welches die schon in (366.) gefundene Gleichung ist. Durch Ausziehung der Quadratwurzel erhält man

$$\sqrt{n}=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\sin\frac{6\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

die Quadratwurzeln positiv genommen.

Man vergleiche hierbei die Artikel Anwendung auf die Algebra. VI. VII. und Cotesischer Lehrsatz.

42. Setzt man in den Formeln (390.), (391.), (392.), (393.) $a=\frac{1}{y}$ und

$$y+\frac{1}{y}=2\cos\varphi;$$

so erhält man, weil nach (41.),

$$y^2+\frac{1}{y^2}=2\cos 2\varphi,\quad y^{2n}+\frac{1}{y^{2n}}=2\cos 2n\varphi$$

ist:

398. $$\cos 2n\varphi-\cos x=2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{2\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{2\pi+x}{n}\right\}$$
$$\ldots\ldots$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{(n-2)\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{(n-2)\pi+x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{n\pi-x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl ist.

399. $$\cos 2n\varphi-\cos x=2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{2\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi-\cos\frac{2\pi+x}{n}\right\}$$
$$\ldots\ldots$$

$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi + x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

400. $$\cos 2n\varphi + \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-1)\pi + x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl ist.

401. $$\cos 2n\varphi + \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{3\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-2)\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{(n-2)\pi + x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos 2\varphi - \cos\frac{n\pi - x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

Setzt man φ für $2n\varphi$, so gehen die vorhergehenden vier Formeln in folgende über:

402. $$\cos\varphi - \cos x = 2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{2\pi - x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{2\pi + x}{n}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi+x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{n\pi-x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl ist.

403. $$\cos\varphi-\cos x=2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{2\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{2\pi+x}{n}\right\}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-1)\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-1)\pi+x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

404. $$\cos\varphi+\cos x=2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{\pi+x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{3\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{3\pi+x}{n}\right\}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-1)\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-1)\pi+x}{n}\right\},$$

wenn n eine gerade Zahl ist.

405. $$\cos\varphi+\cos x=2^{n-1}\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{\pi+x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{3\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{3\pi+x}{n}\right\}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi-x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi+x}{n}\right\}$$
$$\times\left\{\cos\frac{\varphi}{n}-\cos\frac{n\pi-x}{n}\right\},$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

Setzt man $\varphi = 0$, so erhält man, weil bekanntlich

$$1-\cos x = 2\sin\tfrac{1}{2}x^2,\quad 1+\cos x = 2\cos\tfrac{1}{2}x^2$$

ist:

406. $$\sin\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}\cdot\left\{\sin\frac{x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi+x}{2n}\right\}^2\cdots$$
$$\cdots\left\{\sin\frac{(n-2)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{(n-2)\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{n\pi-x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine gerade Zahl ist.

407. $$\sin\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}\cdot\left\{\sin\frac{x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{2\pi+x}{2n}\right\}^2\cdots$$
$$\cdots\left\{\sin\frac{(n-1)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{(n-1)\pi+x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

408. $$\cos\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}\cdot\left\{\sin\frac{\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{3\pi-x}{2n}\right\}^2\cdots$$
$$\cdots\left\{\sin\frac{(n-1)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{(n-1)\pi+x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine gerade Zahl ist.

409. $$\cos\tfrac{1}{2}x^2 = 2^{2(n-1)}\cdot\left\{\sin\frac{\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{3\pi-x}{2n}\right\}^2\cdots$$
$$\cdots\left\{\frac{(n-2)\pi-x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{n-2)\pi+x}{2n}\right\}^2\left\{\sin\frac{n\pi-x}{2n}\right\}^2,$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

Diese Formeln werden auf eine noch etwas einfachere Gestalt gebracht, wenn man 2x für x setzt. Bei weitern Entwickelungen über diesen Gegenstand wollen wir indeß nicht länger verweilen.

43. Wir wollen nun nochmals zu den Gleichungen (316.) und (317.) zurückkehren, und wollen die dortigen in dem Falle, wo n eine positive ganze Zahl ist, summirten Reihen nun auch in den Fällen, wo n eine negative ganze oder eine beliebige gebrochene Zahl ist und dieselben convergiren, zu summiren suchen, wobei wir jetzt α statt des dortigen n setzen wollen. Zuerst bemerken wir, daß die beiden Reihen

I. $$\cos x^\alpha - \alpha_2\cos x^{\alpha-2}\sin x^2 + \alpha_4\cos x^{\alpha-4}\sin x^4 - \cdots,$$
II. $$\alpha_1\cos x^{\alpha-1}\sin x - \alpha_3\cos x^{\alpha-3}\sin x^3 + \alpha_5\cos x^{\alpha-5}\sin x^5 - \cdots$$

sich auch auf die Form

I*. $\cos x^\alpha \{1 - \alpha_2 \operatorname{tang} x^2 + \alpha_4 \operatorname{tang} x^4 - \alpha_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots.\}$,

II*. $\cos x^\alpha \{\alpha_1 \operatorname{tang} x - \alpha_3 \operatorname{tang} x^3 + \alpha_5 \operatorname{tang} x^5 - \alpha_7 \operatorname{tang} x^7 + \ldots.\}$

bringen und daher summiren lassen, wenn man im Stande ist, die beiden Reihen

I**. $1 - \alpha_2 \operatorname{tang} x^2 + \alpha_4 \operatorname{tang} x^4 - \alpha_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots.$,

II**. $\alpha_1 \operatorname{tang} x - \alpha_3 \operatorname{tang} x^3 + \alpha_5 \operatorname{tang} x^5 - \alpha_7 \operatorname{tang} x^7 + \ldots.$

zu summiren, wobei es nun zunächst darauf ankommt, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen diese beiden Reihen convergiren, indem natürlich bloß im Falle der Convergenz von einer Summation derselben die Rede seyn kann. Betrachten wir zu dem Ende überhaupt das Verhältniß der beiden Binomial-Coefficienten α_n, α_{n+2} zu einander; so finden wir leicht

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(\alpha - n)(\alpha - n - 1)}{(n+1)(n+2)} = \left\{1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right\}\left\{1 - \frac{\alpha+1}{n+2}\right\},$$

und schließen hieraus, daß der numerische Werth dieses Verhältnisses sich, wenn n wächst, der Einheit immer mehr und mehr nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug werden läßt. Daher sind nach dem im Artikel Convergenz der Reihen (21.) i. d. Z. bewiesenen Lehrsatze für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthaltene $\operatorname{tang} x$ die beiden obigen Reihen nicht bloß convergent, sondern bleiben offenbar auch convergent, wenn man jedes ihrer Glieder auf seinen absoluten Werth reducirt, wobei es übrigens auf die Beschaffenheit der Größe α, vorausgesetzt daß dieselbe nur reell ist, gar nicht ankommt. Soll aber $\operatorname{tang} x$ zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten seyn, so muß der Endpunkt des Bogens x nothwendig entweder in dem Bogen $-\frac{1}{4}\pi$ oder in dem Bogen $+\frac{1}{4}\pi$ liegen, d. h. der Bogen x muß, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, zwischen den beiden Gränzen $2k\pi - \frac{1}{4}\pi$ und $2k\pi + \frac{1}{4}\pi$ enthalten seyn, welches wir von nun an in allen den Fällen, wo α keine positive ganze Zahl ist, auch stets voraussetzen wollen. Ist α eine positive ganze Zahl, so brechen die beiden obigen Reihen jederzeit ab, und sind daher für jedes beliebige reelle x als convergent zu betrachten, wie sich von selbst versteht. Zu bemerken ist hierbei noch, daß in allen den Fällen, wo α keine positive ganze Zahl ist, wegen der Bedingung, daß x zwischen den Gränzen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthalten seyn muß, $\cos x$ jederzeit positiv, die Potenz $\cos x^\alpha$ folglich immer eine reelle Größe ist. In allen den Fällen, wo die Reihen I**. und II**. convergent sind und convergent bleiben, wenn man jedes Glied auf seinen absoluten Werth reducirt, sind natürlich auch die Reihen I. und II. convergent und bleiben convergent, wenn man jedes ihrer Glieder auf seinen absoluten Werth reducirt, so daß also in allen diesen Fällen die Reihen I. und II. eine Summe haben, die

wir als Functionen von α durch $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ bezeichnen und nun näher bestimmen wollen.

44. Immer unter der Voraussetzung, daß der Bogen x so beschaffen ist, daß alle folgende Reihen convergent sind und convergent bleiben, wenn man jedes ihrer Glieder auf seinen absoluten Werth reducirt, haben wir nun in der eingeführten Bezeichnung:

I. $f(\alpha) = \cos x^{\alpha} - \alpha_2 \cos x^{\alpha-2} \sin x^2 + \alpha_4 \cos x^{\alpha-4} \sin x^4 - \ldots,$

II. $\varphi(\alpha) = \alpha_1 \cos x^{\alpha-1} \sin x - \alpha_3 \cos x^{\alpha-3} \sin x^3 + \alpha_5 \cos x^{\alpha-5} \sin x^5 - \ldots,$

und eben so

I*. $f(\gamma) = \cos x^{\gamma} - \gamma_2 \cos x^{\gamma-2} \sin x^2 + \gamma_4 \cos x^{\gamma-4} \sin x^4 - \ldots,$

II*. $\varphi(\gamma) = \gamma_1 \cos x^{\gamma-1} \sin x - \gamma_3 \cos x^{\gamma-3} \sin x^3 + \gamma_5 \cos x^{\gamma-5} \sin x^5 - \ldots$

Wenden wir auf diese Reihen, wozu wir nach der gemachten Voraussetzung berechtigt sind, die im Artikel Convergenz der Reihen (19.) und (20.) i. d. Z. bewiesenen Sätze an; so erhalten wir nach leichter Rechnung:

$$f(\alpha) \cdot f(\gamma) - \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\gamma)$$

$$= \cos x^{\alpha+\gamma}$$
$$- \{\alpha_2 + \alpha_1\gamma_1 + \gamma_2\} \cos x^{\alpha+\gamma-2} \sin x^2$$
$$+ \{\alpha_4 + \alpha_3\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_1\gamma_3 + \gamma_4\} \cos x^{\alpha+\gamma-4} \sin x^4$$
$$- \{\alpha_6 + \alpha_5\gamma_1 + \alpha_4\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 + \alpha_2\gamma_4 + \alpha_1\gamma_5 + \gamma_6\} \cos x^{\alpha+\gamma-6} \sin x^6$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi(\alpha) \cdot f(\gamma) + f(\alpha) \cdot \varphi(\gamma)$$

$$= \{\alpha_1 + \gamma_1\} \cos x^{\alpha+\gamma-1} \sin x$$
$$- \{\alpha_3 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 + \gamma_3\} \cos x^{\alpha+\gamma-3} \sin x^3$$
$$+ \{\alpha_5 + \alpha_4\gamma_1 + \alpha_3\gamma_2 + \alpha_2\gamma_3 + \alpha_1\gamma_4 + \gamma_5\} \cos x^{\alpha+\gamma-5} \sin x^5$$
$$- \{\alpha_7 + \alpha_6\gamma_1 + \alpha_5\gamma_2 + \alpha_4\gamma_3 + \alpha_3\gamma_4 + \alpha_2\gamma_5 + \alpha_1\gamma_6 + \gamma_7\} \cos x^{\alpha+\gamma-7} \sin x^7$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d. i. nach dem im Artikel Binomischer Lehrsatz (10.) i. d. Z. bewiesenen, auch schon aus dem Artikel Binomial-Coefficienten bekannten, Lehrsatze von den Binomial-Coefficienten:

$$f(\alpha) \cdot f(\gamma) - \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\gamma)$$

$$= \cos x^{\alpha+\gamma} - (\alpha+\gamma)_2 \cdot \cos x^{\alpha+\gamma-2} \sin x^2 + (\alpha+\gamma)_4 \cdot \cos x^{\alpha+\gamma-4} \sin x^4$$
$$- (\alpha+\gamma)_6 \cdot \cos x^{\alpha+\gamma-6} \sin x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= (\alpha+\gamma)_1 . \cos x^{\alpha+\gamma-1} \sin x - (\alpha+\gamma)_3 . \cos x^{\alpha+\gamma-3} \sin x^3$$
$$+ (\alpha+\gamma)_5 . \cos x^{\alpha+\gamma-5} \sin x^5 - (\alpha+\gamma)_7 . \cos x^{\alpha+\gamma-7} \sin x^7 + \ldots ,$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung

410. $f(\alpha+\gamma) = f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$,

411. $\varphi(\alpha+\gamma) = \varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$,

wodurch wir also schon eine wichtige und merkwürdige Eigenschaft der durch die Functionszeichen f und φ bezeichneten Functionen gefunden haben. Setzen wir in den beiden vorhergehenden Gleichungen $\alpha = \gamma$; so gehen dieselben in folgende über:

412. $f(2\alpha) = \{f(\alpha)\}^2 - \{\varphi(\alpha)\}^2$,

413. $\varphi(2\alpha) = 2\varphi(\alpha).f(\alpha)$,

oder, was dasselbe ist,

414. $f(\alpha) = \{f(\frac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\frac{1}{2}\alpha)\}^2$,

415. $\varphi(\alpha) = 2f(\frac{1}{2}\alpha).\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$.

45. Zuerst wollen wir nun annehmen, daß α und γ positive ganze Zahlen seyen. Dann gelten die Gleichungen (410.) und (411.) für jedes reelle x. Für $\alpha = 0$ ist, wie auf der Stelle erhellet,

416. $f(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$,

und eben so leicht erhellet, daß für $\alpha = 1$

$$f(1) = \cos x, \quad \varphi(1) = \sin x$$

ist. Setzen wir nun ferner $\alpha = 1$, $\gamma = 1$; so ist nach den Gleichungen (410.) und (411.)

$$f(2) = f(1).f(1) - \varphi(1).\varphi(1)$$
$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos 2x ,$$
$$\varphi(2) = \varphi(1).f(1) + f(1).\varphi(1)$$
$$= \sin x \cos x + \cos x \sin x = \sin 2x .$$

Für $\alpha = 2$, $\gamma = 1$ ergiebt sich eben so:

$$f(3) = f(2).f(1) - \varphi(2).\varphi(1)$$
$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos 3x ,$$
$$\varphi(3) = \varphi(2).f(1) + f(2).\varphi(1)$$
$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \sin 3x.$$

Für $\alpha = 3$, $\gamma = 1$ erhält man ferner:

$$f(4) = f(3).f(1) - \varphi(3).\varphi(1)$$
$$= \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = \cos 4x ,$$
$$\varphi(4) = \varphi(3).f(1) + f(3).\varphi(1)$$
$$= \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = \sin 4x .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hieraus deutlich genug, und es ist folglich für jedes reelle x und jedes positive ganze α

417. $f(\alpha) = \cos\alpha x$, $\varphi(\alpha) = \sin\alpha x$,

wie schon in (316.) und (317.) auf anderm Wege mittelst der imaginären Größen gefunden worden ist.

46. Ist α wieder eine positive ganze Zahl, aber $\gamma = -\alpha$; so gelten, wenn k wie oben wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, die Gleichungen (410.) und (411.) bloß für alle zwischen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene Werthe von x, und für alle solche Werthe von x ist also nach (416.)

$$f(\alpha).f(-\alpha) - \varphi(\alpha).\varphi(-\alpha) = 1,$$
$$\varphi(\alpha).f(-\alpha) + f(\alpha).\varphi(-\alpha) = 0,$$

d. i., weil α eine positive ganze Zahl ist, nach (417.)

$$\cos\alpha x.f(-\alpha) - \sin\alpha x.\varphi(-\alpha) = 1,$$
$$\sin\alpha x.f(-\alpha) + \cos\alpha x.\varphi(-\alpha) = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$ und mit $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$; so erhält man

$$\cos\alpha x^2.f(-\alpha) - \sin\alpha x\cos\alpha x.\varphi(-\alpha) = \cos\alpha x,$$
$$\sin\alpha x^2.f(-\alpha) + \sin\alpha x\cos\alpha x.\varphi(-\alpha) = 0,$$

und

$$\sin\alpha x\cos\alpha x.f(-\alpha) - \sin\alpha x^2.\varphi(-\alpha) = \sin\alpha x,$$
$$\sin\alpha x\cos\alpha x.f(-\alpha) + \cos\alpha x^2.\varphi(-\alpha) = 0.$$

Folglich, wenn man die beiden ersten Gleichungen zu einander addirt, im letztern Falle dagegen die obere Gleichung von der untern abzieht, weil bekanntlich

$$\sin\alpha x^2 + \cos\alpha x^2 = 1$$

ist:

$$f(-\alpha) = \cos\alpha x, \quad \varphi(-\alpha) = -\sin\alpha x,$$

oder, weil bekanntlich

$$\cos\alpha x = \cos(-\alpha x), \quad \sin\alpha x = -\sin(-\alpha x)$$

ist, für jedes positive ganze α und jedes zwischen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x:

418. $f(-\alpha) = \cos(-\alpha x)$, $\varphi(-\alpha) = \sin(-\alpha x)$.

47. Sey jetzt α eine positive oder negative ganze Zahl; so ist nach (417.) und (418.) für jedes zwischen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x

$$f(\alpha) = \cos\alpha x, \quad \varphi(\alpha) = \sin\alpha x.$$

Für jedes beliebige γ und jedes zwischen den angegebenen Gränzen enthaltene x ist nach (414.) und (415.)

$$f(\gamma) = \{f(\tfrac{1}{2}\gamma)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\gamma)\}^2,$$
$$\varphi(\gamma) = 2f(\tfrac{1}{2}\gamma).\varphi(\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen und addirt die Quadrate zu einander; so erhält man nach leichter Rechnung

419. $\{f(\gamma)\}^2 + \{\varphi(\gamma)\}^2 = \left\{\{f(\frac{1}{2}\gamma)\}^2 + \{\varphi(\frac{1}{2}\gamma)\}^2\right\}^2$.

Also ist auch, wie man durch mehrfache successive Anwendung dieser Gleichung leicht findet:

$$\begin{aligned}\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2 &= \left\{\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 + \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2\right\}^2 \\ &= \left\{\{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 + \{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2\right\}^4 \\ &= \left\{\{f(\tfrac{1}{8}\alpha)\}^2 + \{\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha)\}^2\right\}^8 \\ &\quad \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \\ &= \left\{\left\{f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 + \left\{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2\right\}^{2^n},\end{aligned}$$

wo man die positive ganze Zahl n beliebig groß annehmen kann. Nach dem Obigen ist aber

$$\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2 = \sin\alpha x^2 + \cos\alpha x^2 = 1 .$$

Also ist auch für jedes positive oder negative ganze α, jedes zwischen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x und jedes positive ganze beliebig große n

$$\left\{\left\{f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 + \left\{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2\right\}^{2^n} = 1;$$

also auch unter denselben Voraussetzungen

$$\left\{f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 + \left\{\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)\right\}^2 = 1 .$$

Aus dem im Artikel Function (15.) i. d. Z., oben S. 354, bewiesenen Satze, den wir hier nicht wiederholen wollen, geht aber hervor, daß man sich die ganzen Zahlen α und n, von denen die erstere positiv und negativ seyn kann, die andere stets positiv ist, immer so verändern lassen kann, daß sich der Bruch $\frac{\alpha}{2^n}$ der beliebigen reellen positiven Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert. Läßt man also α und n sich auf diese Weise verändern und geht dann zu den Gränzen über; so erhält man aus der vorhergehenden Gleichung auf der Stelle

$$\{f(\mu)\}^2 + \{\varphi(\mu)\}^2 = 1 ,$$

oder, wenn wir jetzt wieder α für μ setzen,

$$420. \quad \{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2 = 1 ;$$

für jedes beliebige positive oder negative α und jedes zwischen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ enthaltene x.

Setzen wir jetzt in den Gleichungen (410.) und (411.) $\gamma = -\alpha$, so gehen dieselben in folgende über:

$$421. \quad f(\alpha).f(-\alpha) - \varphi(\alpha).\varphi(-\alpha) = 1 ,$$

$$422. \quad \varphi(\alpha).f(-\alpha) + f(\alpha).\varphi(-\alpha) = 0 .$$

Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\varphi(-\alpha) = -\frac{\varphi(\alpha).f(-\alpha)}{f(\alpha)},\quad f(-\alpha) = -\frac{f(\alpha).\varphi(-\alpha)}{\varphi(\alpha)}.$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\varphi(-\alpha)$ und $f(-\alpha)$ in die Gleichung (421.); so erhält man:

$$f(-\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2},\quad \varphi(-\alpha) = -\frac{\varphi(\alpha)}{\{f(\alpha)\}^2 + \{\varphi(\alpha)\}^2},$$

d. i. nach (420.)

423. $f(-\alpha) = f(\alpha),\ \varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$.

Aus den Gleichungen (414.) und (420.) ergiebt sich endlich

$$f(\alpha) = 2.\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - 1,\quad f(\alpha) = 1 - 2.\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2;$$

folglich

424. $$\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1+f(\alpha)}{2},\quad \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1-f(\alpha)}{2},$$

immer für jedes zwischen den angegebenen Gränzen enthaltene x.

Wir wollen nun einmal setzen, daß für jedes zwischen den Gränzen $(2k-\frac{1}{2})\pi$ und $(2k+\frac{1}{2})\pi$ enthaltene x, und für ein gewisses, übrigens beliebiges, α

$$f(\alpha) = \cos\alpha x,\quad \varphi(\alpha) = \sin\alpha x$$

sey; so ist nach (424.)

$$\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1+f(\alpha)}{2} = \frac{1+\cos\alpha x}{2},$$

$$\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \frac{1-f(\alpha)}{2} = \frac{1-\cos\alpha x}{2},$$

und folglich nach (165.) und (166.)

$$\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \cos\tfrac{1}{2}\alpha x^2,\quad \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 = \sin\tfrac{1}{2}\alpha x^2;$$

also für jedes x zwischen den angegebenen Gränzen

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha x,\quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\sin\tfrac{1}{2}\alpha x,$$

wo nun zunächst zu bestimmen ist, wie in diesen beiden Formeln die Vorzeichen auf einander zu beziehen sind. Dazu gelangt man sehr leicht auf folgende Art. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Vorzeichen auf einander

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha x,\quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \mp\sin\tfrac{1}{2}\alpha x;$$

so wäre

$$2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = -2\sin\tfrac{1}{2}\alpha x\cos\tfrac{1}{2}\alpha x = -\sin\alpha x,$$

d. i., weil nach der Voraussetzung $\varphi(\alpha) = \sin\alpha x$ ist,

$$2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = -\varphi(\alpha),$$

da doch im Gegentheil nach (415.)

$$2f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \varphi(\alpha)$$

ist. Also ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander nicht

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha x,\quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \mp\sin\tfrac{1}{2}\alpha x,$$

sondern jederzeit

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm \sin\tfrac{1}{2}\alpha x .$$

Ferner kommt es nun darauf an, zu bestimmen, ob in diesen Formeln die obern oder die untern Zeichen zu nehmen sind. Um zu dieser Bestimmung zu gelangen, wollen wir sowohl $\cos\frac{1}{2}\alpha x$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha x$, als auch $f(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$, als Functionen von x betrachten, und deshalb von jetzt an

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = F(x), \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \Phi(x)$$

setzen. Stellen wir uns nun vor, daß x sich von $(2k-\frac{1}{4})\pi$ bis $(2k+\frac{1}{4})\pi$ stetig verändert; so werden sich zwischen diesen beiden Gränzen offenbar auch sowohl $\cos\frac{1}{2}\alpha x$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha x$, als auch $F(x)$ und $\Phi(x)$ stetig verändern, weil die den letztern Functionen entsprechenden Reihen für jedes x zwischen den angegebenen Gränzen convergent sind. Wäre aber für irgend zwei einander unendlich nahe liegende Werthe von x zwischen diesen Gränzen, die wir, wenn jetzt i eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, durch $\xi - i$ und $\xi + i$ bezeichnen wollen,

$$F(\xi-i) = \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i), \quad F(\xi+i) = \mp \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i);$$

so wäre, immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander, nach dem Vorhergehenden auch

$$\Phi(\xi-i) = \pm \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i), \quad \Phi(\xi+i) = \mp \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i) .$$

Hätten nun

I. $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ gleiche Vorzeichen; so hätten $\pm\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\mp\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen, und es müßte folglich, wegen der stetigen Veränderung der Function $F(x)$, offenbar $F(\xi)$, d. i. $\cos\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ seyn.

Hätten dagegen

II. $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen; so müßte wieder, wegen der stetigen Veränderung der Function $\cos\frac{1}{2}\alpha x$, offenbar $\cos\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ seyn.

Hätten auf dieselbe Weise ferner

I. $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ gleiche Vorzeichen; so hätten $\pm\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\mp\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen, und es müßte folglich, wegen der stetigen Veränderung der Function $\Phi(x)$, offenbar $\Phi(\xi)$, d. i. $\sin\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ seyn.

Hätten dagegen

II. $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi-i)$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha(\xi+i)$ ungleiche Vorzeichen; so müßte wieder, wegen der stetigen Veränderung von $\sin\frac{1}{2}\alpha x$, offenbar $\sin\frac{1}{2}\alpha\xi = 0$ seyn.

Hieraus sieht man also, daß, wenn

$$F(\xi-i) = \pm \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i), \quad F(\xi+i) = \mp \cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i);$$
$$\Phi(\xi-i) = \pm \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi-i), \quad \Phi(\xi+i) = \mp \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi+i)$$

seyn könnte, jederzeit

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha\xi = 0, \quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha\xi = 0$$

seyn müßte, welches offenbar ungereimt ist, da der Cosinus und Sinus eines Winkels niemals zugleich verschwinden können. Daher ist nie

$$F(\xi - i) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad F(\xi + i) = \mp\cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i);$$
$$\Phi(\xi - i) = \pm\sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad \Phi(\xi + i) = \mp\sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i);$$

sondern jederzeit

$$F(\xi - i) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad F(\xi + i) = \pm\cos\tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i);$$
$$\Phi(\xi - i) = \pm\sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi - i), \quad \Phi(\xi + i) = \pm\sin\tfrac{1}{2}\alpha(\xi + i).$$

Aus dieser Betrachtung geht auf die deutlichste und unzweideutigste Weise hervor, daß die Functionen $F(x)$ oder $f(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\Phi(x)$ oder $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$ für alle Werthe von x zwischen $(2k - \frac{1}{4})\pi$ und $(2k + \frac{1}{4})\pi$ respective mit $\cos\frac{1}{2}\alpha x$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha x$ immer entweder gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Ist nun $k = 0$, so ist 0 ein zwischen den Gränzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegender Werth des Bogens x, und für diesen Werth von x ist also, weil $F(0)$ offenbar $= 1$ ist, $f(\frac{1}{2}\alpha) = \cos\frac{1}{2}\alpha x$. Folglich ist nach dem so eben Bewiesenen für alle zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegenden Werthe von x

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}\alpha x;$$

also nach dem Vorhergehenden auch

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha x.$$

Fassen wir nun alles Vorhergehende nochmals im Zusammenhange gehörig in's Auge; so haben wir jetzt eigentlich folgenden Satz bewiesen:

Wenn für ein gewisses α und ein jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegendes x

$$f(\alpha) = \cos\alpha x, \quad \varphi(\alpha) = \sin\alpha x$$

ist; so ist immer auch für jedes x zwischen den angegebenen Gränzen

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha x.$$

Nach (45.) und (46.) ist aber für jedes positive oder negative ganze α und jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ liegende x in der That

$$f(\alpha) = \cos\alpha x, \quad \varphi(\alpha) = \sin\alpha x;$$

also ist nach dem so eben Bewiesenen für dieselben Werthe von α und x auch

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha x;$$

folglich auf dieselbe Weise

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = \cos\tfrac{1}{4}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = \sin\tfrac{1}{4}\alpha x;$$

also ferner eben so

$$f(\tfrac{1}{8}\alpha) = \cos\tfrac{1}{8}\alpha x, \quad \varphi(\tfrac{1}{8}\alpha) = \sin\tfrac{1}{8}\alpha x;$$

u. s. w. u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man

schließt also hieraus im Allgemeinen, daß für jedes positive oder negative ganze α, für jedes positive ganze n und jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x,

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^n}x,\ \varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \sin\frac{\alpha}{2^n}x$$

ist.

Nach dem schon oben angewandten im Artikel Function (15.) i. d. Z. bewiesenen Satze kann man nun die ganzen Zahlen α und n sich jederzeit so verändern lassen, daß der Bruch $\frac{\alpha}{2^n}$ sich der beliebigen reellen positiven oder negativen Größe μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert. Läßt man also α und n sich auf diese Weise verändern, und geht dann zu den Gränzen über; so findet man mittelst des Vorhergehenden, daß für jedes reelle positive oder negative μ und jedes zwischen den Gränzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x

$$f(\mu) = \cos\mu x,\ \varphi(\mu) = \sin\mu x$$

ist.

Setzen wir nun wieder α für μ; so ist also für jedes reelle α und jeden zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltenen Bogen x

$$425.\quad f(\alpha) = \cos\alpha x,\ \varphi(\alpha) = \sin\alpha x\ ;$$

d. i.

$$426.\quad \cos\alpha x = \cos x^\alpha - \alpha_2 \cos x^{\alpha-2}\sin x^2 + \alpha_4 \cos x^{\alpha-4}\sin x^4 - \ldots\ldots,$$
$$427.\quad \sin\alpha x = \alpha_1 \cos x^{\alpha-1}\sin x - \alpha_3 \cos x^{\alpha-3}\sin x^3 + \alpha_5 \cos x^{\alpha-5}\sin x^5 - \ldots,$$

oder

$$428.\quad \cos\alpha x = \cos x^\alpha\{1 - \alpha_2 \operatorname{tang} x^2 + \alpha_4 \operatorname{tang} x^4 - \alpha_6 \operatorname{tang} x^6 + \ldots\ldots\},$$
$$429.\quad \sin\alpha x = \cos x^\alpha\{\alpha_1 \operatorname{tang} x - \alpha_3 \operatorname{tang} x^3 + \alpha_5 \operatorname{tang} x^5 - \ldots\ldots\},$$

immer unter der Bedingung, daß x zwischen den Gränzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten ist.

48. Die Reihe (429.) läßt sich, immer unter der Voraussetzung, daß x zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten ist, wie man leicht findet, auch auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\frac{\sin\alpha x}{\alpha\cos x^\alpha} = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}(1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\operatorname{tang} x^3$$
$$+ \tfrac{1}{5}(1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)(1-\tfrac{1}{3}\alpha)(1-\tfrac{1}{4}\alpha)\operatorname{tang} x^5$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Läßt man nun α, welches bekanntlich jeden beliebigen reellen Werth haben kann, sich immer mehr und mehr der Null nähern; so nähert die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sich offenbar immer mehr und mehr der Reihe

$$\operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang} x^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang} x^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang} x^7 + \ldots\ldots$$

als ihrer Gränze, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur α nahe genug bei Null annimmt. Bezeichnen wir also die Gränze, welcher sich

$$\frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^{\alpha}}$$

nähert, wenn α sich der Null nähert, durch

$$\operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^{\alpha}} ;$$

so ist

$$\operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^{\alpha}} = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} x^3 + \tfrac{1}{5} \operatorname{tang} x^5 - \tfrac{1}{7} \operatorname{tang} x^7 + \ldots$$

Weil nun aber $\cos x^{\alpha}$ sich der Einheit nähert, wenn α sich der Null nähert, und der Einheit offenbar auch beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur α nahe genug bei Null annimmt; so erhellet leicht, daß

$$\operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos x^{\alpha}} = \operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} ,$$

und folglich auch

$$\operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} x^3 + \tfrac{1}{5} \operatorname{tang} x^5 - \tfrac{1}{7} \operatorname{tang} x^7 + \ldots\ldots$$

Bezeichnet jetzt z einen beliebigen Bogen; so kann man z offenbar immer so nahe bei Null annehmen, daß in Bezug auf die absoluten Werthe der drei folgenden Größen

$$\sin z < z < \operatorname{tang} z$$

ist. Dann ist

$$\frac{\sin z}{\sin z} > \frac{\sin z}{z} > \frac{\sin z}{\operatorname{tang} z} ,$$

oder

$$1 > \frac{\sin z}{z} > \cos z ,$$

und folglich der Bruch $\frac{\sin z}{z}$ zwischen 1 und $\cos z$ enthalten. Da nun, wenn z sich der Null nähert, $\cos z$ sich immer mehr und mehr der Einheit nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur z nahe genug bei Null annimmt; so gilt dies nach dem so eben Bewiesenen offenbar um so mehr von dem Bruche $\frac{\sin z}{z}$, welcher sich also, wenn z sich der Null nähert, der Einheit als seiner Gränze nähert. Also ist, wenn man sich jetzt vorstellt, daß α sich der Null nähert, offenbar auch

$$\operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1 .$$

Weil nun aber augenscheinlich

$$\operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \frac{1}{x} \operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$$

ist; so ist

$$\frac{1}{x} \operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = 1, \quad \operatorname{Lim} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = x ,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$x = \text{tang}\, x - \tfrac{1}{3}\text{tang}\, x^3 + \tfrac{1}{5}\text{tang}\, x^5 - \tfrac{1}{7}\text{tang}\, x^7 + \ldots,$$

für jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x. Bezeichnet man den zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltenen Bogen, dessen trigonometrische Tangente $= x$ ist, wobei also x zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, durch Arc tang x; so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in die für jedes zwischen -1 und $+1$ enthaltene x geltende Gleichung:

430. $$\text{Arc tang}\, x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

Da nach dem im Artikel Convergenz der Reihen (15.) bewiesenen Satze die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots.$$

convergirt, so erhellet leicht, daß die vorstehende Gleichung auch noch für $x = \pm 1$ gilt, und daß folglich

431. $$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots.$$

ist.

Obgleich der hier behandelte Gegenstand nicht eigentlich zur Goniometrie gehört; so halten wir doch die obige Ableitung der Reihe (430.) aus der Reihe (429.) für einen sehr genügenden Beweis der erstern, und haben denselben daher bei dieser Gelegenheit hier mitzutheilen uns erlaubt.

49. Nehmen wir nun immer an, daß x zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten ist; so ist nach (426.)

$$\cos \alpha x = (1 - \sin x^2)^{\frac{\alpha}{2}} - \alpha_2 (1 - \sin x^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} \sin x^2 + \alpha_4 (1 - \sin x^2)^{\frac{\alpha-4}{2}} \sin x^4 - \ldots.$$

oder auch

$$\cos \alpha x = \cos x \left\{ (1 - \sin x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} - \alpha_2 (1 - \sin x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} \sin x^2 + \alpha_4 (1 - \sin x^2)^{\frac{\alpha-5}{2}} \sin x^4 - \ldots. \right\}.$$

Entwickelt man nun in der ersten dieser beiden Reihen alle Potenzen von $1 - \sin x^2$ nach dem binomischen Lehrsatze, dessen Anwendung hier verstattet ist, da nach der Voraussetzung x zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthalten, und folglich $\sin x^2$ kleiner als die Einheit ist (Binomischer Lehrsatz. 42. i. d. Z.), und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; so erhält man als $(p+1)$tes Glied dieser Reihe

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)_p + \alpha_2 \left(\frac{\alpha-2}{2}\right)_{p-1} + \alpha_4 \left(\frac{\alpha-4}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-2} \left(\frac{\alpha-2p+2}{2}\right)_1 + \alpha_{2p},$$

wenn man diese Größe noch mit $(-1)^p . \sin x^{2p}$ multiplicirt. Hieraus findet man nun ferner ganz auf dieselbe Art wie in (34. I.), daß für jedes reelle α und jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x

432. $$\cos\alpha x = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\sin x^2 + \frac{\alpha^2(\alpha^2-4)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{\alpha^2(\alpha^2-4)(\alpha^2-16)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 + \ldots$$

ist.

Entwickelt man eben so in der zweiten der beiden obigen für $\cos\alpha x$ gefundenen Reihen alle Potenzen von $1-\sin x^2$ nach dem binomischen Lehrsatze, und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; so erhält man als $(p+1)$tes Glied

$$\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)_p + \alpha_2\left(\frac{\alpha-3}{2}\right)_{p-1} + \alpha_4\left(\frac{\alpha-5}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-2}\left(\frac{\alpha-2p+1}{2}\right)_1 + \alpha_{2p},$$

wenn man diese Größe noch mit dem Producte $(-1)^p.\cos x\sin x^{2p}$ multiplicirt, und findet hieraus nun ferner auf ganz ähnliche Art wie in (34. II.), daß für jedes reelle α und jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x

433. $$\cos\alpha x = \cos x\left\{1 - \frac{\alpha^2-1}{2}\sin x^2 + \frac{(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)(\alpha^2-25)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 + \ldots\right\}$$

ist.

Nach (427.) ist auf ähnliche Art

$$\sin\alpha x = \cos x\left\{\alpha_1(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}\sin x - \alpha_3(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-4}{2}}\sin x^3 + \alpha_5(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-6}{2}}\sin x^5 - \ldots\ldots\right\}$$

oder auch

$$\sin\alpha x = \alpha_1(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\sin x - \alpha_3(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\sin x^3 + \alpha_5(1-\sin x^2)^{\frac{\alpha-5}{2}}\sin x^5 - \ldots\ldots$$

Entwickelt man nun in der ersten dieser beiden Reihen wieder alle Potenzen von $1-\sin x^2$ nach dem binomischen Lehrsatze, und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; so findet man als $(p+1)$ Glied derselben

$$\alpha_1\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)_p + \alpha_3\left(\frac{\alpha-4}{2}\right)_{p-1} + \alpha_5\left(\frac{\alpha-6}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-1}\left(\frac{\alpha-2p}{2}\right)_1 + \alpha_{2p+1},$$

wenn man diese Größe noch mit $(-1)^p.\cos x\sin x^{2p+1}$ multiplicirt, und schließt hieraus ferner auf ganz ähnliche Art wie in (34. I.), daß für jedes reelle α und jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x immer

434. $$\sin\alpha x = \cos x\left\{\alpha\sin x - \frac{\alpha(\alpha^2-4)}{2.3}\sin x^3 + \frac{\alpha(\alpha^2-4)(\alpha^2-16)}{2.3.4.5}\sin x^5 - \frac{\alpha(\alpha^2-4)(\alpha^2-16)(\alpha^2-36}{2.3.4.5.6.7}\sin x^7 + \ldots\right\}$$

ist.

Entwickelt man eben so in der zweiten der beiden obigen für $\sin \alpha x$ angegebenen Reihen alle Potenzen von $1 - \sin x^2$ nach dem binomischen Lehrsatze, und ordnet die Reihe nach Potenzen von $\sin x$; so erhält man als $(p+1)$tes Glied derselben

$$\alpha_1 \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)_p + \alpha_3 \left(\frac{\alpha-3}{2}\right)_{p-1} + \alpha_5 \left(\frac{\alpha-5}{2}\right)_{p-2} + \ldots + \alpha_{2p-1} \left(\frac{\alpha-2p+1}{2}\right)_1 + \alpha_{2p+1},$$

wenn man diese Größe noch mit $(-1)^p . \sin x^{2p+1}$ multiplicirt, und findet dann hieraus ferner auf ganz ähnliche Art wie in (34. II.), daß für jedes reelle α und jedes zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ enthaltene x immer

$$435. \quad \sin \alpha x = \alpha \sin x - \frac{\alpha(\alpha^2-1)}{2.3} \sin x^3 + \frac{\alpha(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)}{2.3.4.5} \sin x^5 - \frac{\alpha(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)(\alpha^2-25)}{2.3.4.5.6.7} \sin x^7 + \ldots .$$

ist.

IV. Potenzen der Sinus und Cosinus.

50. Wir nehmen jetzt wieder an, daß n eine positive ganze Zahl sey und stellen uns die Aufgabe, die Potenzen $\cos x^n$ und $\sin x^n$ durch die Cosinus und Sinus der Vielfachen des Winkels oder Bogens x auszudrücken. Zu dem Ende setze man

$$u = \cos x + i \sin x,$$
$$v = \cos x - i \sin x;$$

so ist, wie man durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen leicht findet,

$$2 \cos x = u + v, \quad 2i \sin x = u - v.$$

Also ist nach dem Binomial-Theorem für positive ganze Exponenten

$$2^n \cos x^n = (u+v)^n$$
$$= u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots + n_{n-1} u v^{n-1} + n_n v^n,$$

und, wenn man, welches offenbar verstattet ist, u und v gegen einander vertauscht,

$$2^n \cos x^n = (v+u)^n$$
$$= v^n + n_1 v^{n-1} u + n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots + n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n.$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke von $2^n \cos x^n$ zu einander; so erhält man

$$2^{n+1} \cos x^n = u^n + v^n + n_1 (u^{n-1} v + v^{n-1} u) + n_2 (u^{n-2} v^2 + v^{n-2} u^2) + \ldots + n_{n-1} (u v^{n-1} + v u^{n-1}) + n_n (v^n + u^n).$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist

$$n_k (u^{n-k} v^k + v^{n-k} u^k),$$

wo k nicht größer als n ist. Dieses allgemeine Glied kann man auch auf den Ausdruck

$$n_k\,(uv)^k\,(u^{n-2k} + v^{n-2k}),$$

oder, weil

$$uv = \cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

ist, auf den noch einfachern Ausdruck

$$n_k\,(u^{n-2k} + v^{n-2k})$$

bringen.

Weil nun

$$n_{n-k} = \frac{n(n-1)..(k+1)}{1...(n-k)},\quad n_k = \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{1...k}$$

ist; so ist

$$\frac{n_k}{n_{n-k}} = \frac{1.2.3...n}{1.2.3...n} = 1,$$

folglich $n_k = n_{n-k}$.

Ferner ist, wenn m eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$u^{-m} + v^{-m} = \frac{1}{u^m} + \frac{1}{v^m} = \frac{u^m + v^m}{(uv)^m} = u^m + v^m.$$

Nach (314.) ist aber

$$u^m = (\cos x + i\sin x)^m = \cos mx + i\sin mx,$$
$$v^m = (\cos x - i\sin x)^m = \cos mx - i\sin mx;$$

also

$$u^m + v^m = 2\cos mx.$$

I. Ist nun n zuerst eine gerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned} 2^{n+1}\cos x^n = {} & u^n + v^n + n_n\,(u^{-n} + v^{-n}) \\ & + n_1\,(u^{n-2} + v^{n-2}) + n_{n-1}\,(u^{-(n-2)} + v^{-(n-2)}) \\ & + n_2\,(u^{n-4} + v^{n-4}) + n_{n-2}\,(u^{-(n-4)} + v^{-(n-4)}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + n_{\frac{1}{2}n-1}\,(u^2 + v^2) + n_{\frac{1}{2}n+1}\,(u^{-2} + v^{-2}) \\ & + n_{\frac{1}{2}n}\,(u^0 + v^0) \\ = {} & 2\,(u^n + v^n) + 2n_1\,(u^{n-2} + v^{n-2}) + 2n_2\,(u^{n-4} + v^{n-4}) + \cdots\cdots \\ & \cdots + 2n_{\frac{1}{2}n-1}\,(u^2 + v^2) + 2n_{\frac{1}{2}n}; \end{aligned}$$

also

436. $$2^{n-1}\cos x^n = \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x + \cdots\cdots + n_{\frac{1}{2}n-1}\cos 2x + \tfrac{1}{2}.n_{\frac{1}{2}n}.$$

II. Ist ferner n eine ungerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned} 2^{n+1}\cos x^n = {} & u^n + v^n + n_n\,(u^{-n} + v^{-n}) \\ & + n_1\,(u^{n-2} + v^{n-2}) + n_{n-1}\,(u^{-(n-2)} + v^{-(n-2)}) \\ & + n_2\,(u^{n-4} + v^{n-4}) + n_{n-2}\,(u^{-(n-4)} + v^{-(n-4)}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$+ n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v) + n_{\frac{1}{2}(n+1)}(u^{-1}+v^{-1})$$

$$= 2(u^n + v^n) + 2n_1(u^{n-2} + v^{n-2}) + 2n_2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + 2n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v);$$

also

437. $$2^{n-1}\cos x^n = \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x + \ldots.$$

$$\ldots. + n_{\frac{1}{2}(n-1)}\cos x.$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$2^n i^n \sin x^n = (u-v)^n$$

$$= u^n - n_1 u^{n-1}v + n_2 u^{n-2}v^2 - n_3 u^{n-3}v^3 + \ldots. + (-1)^n n_n v^n.$$

I. Ist nun wieder zuerst n eine gerade Zahl; so ist, weil nach (311.) $i^n = (-1)^{\frac{n}{2}}$ ist,

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^n \sin x^n = (u-v)^n$$

$$= u^n - n_1 u^{n-1}v + n_2 u^{n-2}v^2 - \ldots - n_{n-1}uv^{n-1} + n_n v^n.$$

Weil aber in diesem Falle $(u-v)^n = (v-u)^n$ ist; so kann man u und v gegen einander vertauschen, wodurch man

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^n \sin x^n = (v-u)^n$$

$$= v^n - n_1 v^{n-1}u + n_2 v^{n-2}u^2 - \ldots - n_{n-1}vu^{n-1} + n_n u^n$$

erhält. Addirt man nun die beiden für $(-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin x^n$ gefundenen Ausdrücke zu einander; so ergiebt sich

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n+1} \sin x^n = u^n + v^n - n_1(u^{n-1}v + v^{n-1}u)$$
$$+ n_2(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2)$$
$$- n_3(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$- n_{n-1}(uv^{n-1} + vu^{n-1})$$
$$+ n_n(v^n + u^n)$$

$$= u^n + v^n + n_n(u^{-n} + v^{-n})$$
$$- n_1(u^{n-2} + v^{n-2}) - n_{n-1}(u^{-(n-2)} + v^{-(n-2)})$$
$$+ n_2(u^{n-4} + v^{n-4}) + n_{n-2}(u^{-(n-4)} + v^{-(n-4)})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2 + v^2) + (-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n+1}(u^{-2} + v^{-2})$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} n_{\frac{1}{2}n}(u^0 + v^0)$$

$$= 2(u^n + v^n) - 2n_1(u^{n-2} + v^{n-2}) + 2n_2(u^{n-4} + v^{n-4}) - \ldots$$
$$\ldots + 2(-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2 + v^2) + 2(-1)^{\frac{n}{2}} n_{\frac{1}{2}n};$$

also

$$438.\quad (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{n-1} \sin x^n = \cos nx - n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2x + \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} n_{\frac{1}{2}n} .$$

II. Wenn n eine ungerade Zahl ist; so ist, weil $i^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} i$ ist,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^n \sin x^n = (u-v)^n$$
$$= u^n - n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 - \ldots + n_{n-1} u v^{n-1} - n_n v^n .$$

Weil nun in diesem Falle

$$(u-v)^n = -(v-u)^n$$

ist; so ist auch

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^n \sin x^n = -(v-u)^n$$
$$= -v^n + n_1 v^{n-1} u - n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots - n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n ,$$

und folglich, wenn man die beiden Ausdrücke von $(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^n \sin x^n$ zu einander addirt,

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^{n+1} \sin x^n = u^n - v^n &- n_1 (u^{n-1} v - v^{n-1} u) \\ &+ n_2 (u^{n-2} v^2 - v^{n-2} u^2) \\ &- n_3 (u^{n-3} v^3 - v^{n-3} u^3) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &+ n_{n-1} (u v^{n-1} - v u^{n-1}) \\ &- n_n (v^n - u^n) .\end{aligned}$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen, ist

$$n_k (u^{n-k} v^k - v^{n-k} u^k) ,$$

wo k nicht größer als n ist, und es erhellet nun wieder leicht, daß man dieses allgemeine Glied auch auf den Ausdruck

$$n_k (uv)^k (u^{n-2k} - v^{n-2k}) ,$$

oder, weil

$$uv = \cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

ist, auf den noch einfachern Ausdruck

$$n_k (u^{n-2k} - v^{n-2k})$$

bringen kann. Also ist

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^{n+1} \sin x^n = \; & u^n - v^n \qquad - n_n (u^{-n} - v^{-n}) \\ & - n_1 (u^{n-2} - v^{n-2}) + n_{n-1} (u^{-(n-2)} - v^{-(n-2)}) \\ & + n_2 (u^{n-4} - v^{n-4}) - n_{n-2} (u^{-(n-4)} - v^{-(n-4)}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{1}{2}(n-1)} (u-v) - (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{1}{2}(n+1)} (u^{-1} - v^{-1}) .\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$u^{-m} - v^{-m} = \frac{1}{u^m} - \frac{1}{v^m} = -\frac{u^m - v^m}{(uv)^m} = -(u^m - v^m).$$

Also ist

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \cdot 2^{n+1} \sin x^n = 2(u^n - v^n) - 2n_1(u^{n-2} - v^{n-2})$$
$$+ 2n_2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u - v).$$

Weil nun ferner nach (314.)

$$u^m = (\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx,$$
$$v^m = (\cos x - i \sin x)^m = \cos mx - i \sin mx$$

ist; so ist

$$u^m - v^m = 2i \sin mx,$$

und folglich, wenn man zugleich auf beiden Seiten mit $4i$ dividirt:

439. $$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1} \sin x^n = \sin nx - n_1 \sin(n-2)x + n_2 \sin(n-4)x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n_{\frac{1}{2}(n-1)} \sin x.$$

Mittelst der vier merkwürdigen Formeln (436.), (437.), (438.) und (439.), die wir nachher noch auf eine andere Art ohne Beihülfe der imaginären Größen beweisen werden, kann man also immer, wenn n eine positive ganze Zahl ist, die Potenzen $\cos x^n$ und $\sin x^n$ durch die Cosinus und Sinus der Vielfachen des Bogens oder Winkels x ausdrücken, welches die vorgelegte Aufgabe war. Man erhält mittelst dieser Formeln leicht:

$$\cos x = \cos x$$
$$2\cos x^2 = \cos 2x + 1$$
$$4\cos x^3 = \cos 3x + 3\cos x$$
$$8\cos x^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$$
$$16\cos x^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$$
$$32\cos x^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$$
$$64\cos x^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x$$
u. s. w. u. s. w.

und

$$\sin x = \sin x$$
$$2\sin x^2 = -\cos 2x + 1$$
$$4\sin x^3 = -\sin 3x + 3\sin x$$
$$8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$$
$$16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$$
$$32\sin x^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10$$
$$64\sin x^7 = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x$$
u. s. w. u. s. w.

51. Wir wollen nun überhaupt die beiden Reihen

$\cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \alpha_3 \cos(\alpha-6)x + \ldots$,

$\sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \alpha_3 \sin(\alpha-6)x + \ldots$,

wo α eine beliebige positive oder negative Zahl bezeichnet, für die Werthe von α, für welche dieselben convergiren, zu summiren suchen. Nach dem Artikel Binomischer Lehrsatz (42.) i. d. Z. ist die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots (-1)^n.\alpha^n, \ldots$$

für jedes positive α convergent. Da nun, wie leicht erhellet,

$$\alpha_{n+1} = -\alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1},$$

$$\alpha_{n+2} = \alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} \cdot \frac{n+1-\alpha}{n+2},$$

$$\alpha_{n+3} = -\alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} \cdot \frac{n+1-\alpha}{n+2} \cdot \frac{n+2-\alpha}{n+3},$$

$$\alpha_{n+4} = \alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} \cdot \frac{n+1-\alpha}{n+2} \cdot \frac{n+2-\alpha}{n+3} \cdot \frac{n+3-\alpha}{n+4},$$

u. s. w. u. s. w.

ist; so ist

$$(-1)^{n+1}.\alpha_{n+1} = (-1)^n.\alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1},$$

$$(-1)^{n+2}.\alpha_{n+2} = (-1)^n.\alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} \cdot \frac{n+1-\alpha}{n+2},$$

$$(-1)^{n+3}.\alpha_{n+3} = (-1)^n.\alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} \cdot \frac{n+1-\alpha}{n+2} \cdot \frac{n+2-\alpha}{n+3},$$

$$(-1)^{n+4}.\alpha_{n+4} = (-1)^n.\alpha_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} \cdot \frac{n+1-\alpha}{n+2} \cdot \frac{n+2-\alpha}{n+3} \cdot \frac{n+3-\alpha}{n+4},$$

u. s. w. u. s. w.

und die Glieder

$$(-1^n.\alpha_n, (-1)^{n+1}.\alpha_{n+1}, (-1)^{n+2}.\alpha_{n+2}, (-1)^{n+3}.\alpha_{n+3}, \ldots\ldots$$

unserer obigen Reihe haben also, wenn, wie wir von jetzt an immer annehmen wollen, $n > \alpha$ ist, sämmtlich einerlei Vorzeichen. Da nun die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots (-1)^n.\alpha_n, \ldots\ldots$$

für jedes positive α convergirt; so convergirt natürlich auch die Reihe

$$(-1)^n.\alpha_n, (-1)^{n+1}.\alpha_{n+1}, (-1)^{n+2}.\alpha_{n+2}, (-1)^{n+3}.\alpha_{n+3}, \ldots\ldots$$

für jedes positive α, indem die letztere Reihe offenbar eine endliche bestimmte Summe hat, die man erhält, wenn man von der Summe der erstern Reihe, welche nach dem Artikel Binomischer Lehrsatz i. d. Z. $= 0$ ist, die endliche bestimmte Größe

$$1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots + (-1)^{n-1}.\alpha_{n-1}$$

abzieht. Die Glieder der convergirenden Reihe

$(-1)^n . \alpha_n, (-1)^{n+1} . \alpha_{n+1}, (-1)^{n+2} . \alpha_{n+2}, (-1)^{n+3} . \alpha_{n+3}, \ldots\ldots$

haben, wie vorher gezeigt worden ist, sämmtlich einerlei Vorzeichen, und ihre absoluten Werthe, die mit den absoluten Werthen der Coefficienten $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \ldots\ldots$, welche wir durch

$$(\alpha_n), (\alpha_{n+1}), (\alpha_{n+2}), (\alpha_{n+3}), \ldots$$

bezeichnen wollen, offenbar einerlei sind, bilden also natürlich eine convergente Reihe, wenn α positiv ist. Bezeichnen wir nun die absoluten Werthe der Glieder der beiden folgenden Reihen:

$$\cos(\alpha-2n)x, \cos(\alpha-2(n+1))x, \cos(\alpha-2(n+2))x, \ldots\ldots;$$
$$\sin(\alpha-2n)x, \sin(\alpha-2(n+1))x, \sin(\alpha-2(n+2))x, \ldots\ldots$$

durch

$$C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3}, \ldots\ldots;$$
$$S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3}, \ldots\ldots;$$

so sind nach dem im Artikel Convergenz der Reihen (5.) i. d. Z. bewiesenen Satze auch die Reihen

$$(\alpha_n) C_n, (\alpha_{n+1}) C_{n+1}, (\alpha_{n+2}) C_{n+2}, (\alpha_{n+3}) C_{n+3}, \ldots\ldots;$$
$$(\alpha_n) S_n, (\alpha_{n+1}) S_{n+1}, (\alpha_{n+2}) S_{n+2}, (\alpha_{n+3}) S_{n+3}, \ldots\ldots$$

für jedes positive α convergent. Also convergiren nach dem in demselben Artikel (13.) bewiesenen Satze auch die Reihen

$$\alpha_n \cos(\alpha-2n)x, \alpha_{n+1}\cos(\alpha-2(n+1))x, \alpha_{n+2}\cos(\alpha-2(n+2))x, \ldots,$$
$$\alpha_n \sin(\alpha-2n)x, \alpha_{n+1}\sin(\alpha-2(n+1))x, \alpha_{n+2}\sin(\alpha-2(n+2))x, \ldots$$

für jedes positive α, und bleiben, wie sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt, auch convergent, wenn man für jedes Glied seinen absoluten Werth setzt, oder, wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, jedes Glied auf seinen absoluten Werth reducirt. Hieraus folgt nun auf der Stelle, daß auch die beiden gegebenen Reihen

$$\cos\alpha x, \alpha_1\cos(\alpha-2)x, \alpha_2\cos(\alpha-4)x, \alpha_3\cos(\alpha-6)x, \ldots\ldots;$$
$$\sin\alpha x, \alpha_1\sin(\alpha-2)x, \alpha_2\sin(\alpha-4)x, \alpha_3\sin(\alpha-6)x, \ldots\ldots$$

für jedes positive α convergent sind und convergent bleiben, wenn man jedes Glied auf seinen absoluten Werth reducirt. Wenn α negativ ist, so läßt sich nicht im Allgemeinen behaupten, daß die beiden gegebenen Reihen convergent sind und convergent bleiben, wenn man jedes Glied auf seinen absoluten Werth reducirt, weshalb wir also im Folgenden immer α als positiv annehmen wollen. Bezeichnen wir nun für ein positives α die Summen der beiden gegebenen Reihen durch $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$; so ist

$$f(\alpha) = \cos\alpha x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x + \alpha_3\cos(\alpha-6)x + \ldots,$$
$$\varphi(\alpha) = \sin\alpha x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x + \alpha_3\sin(\alpha-6)x + \ldots,$$

und eben so, wenn auch γ positiv ist,

$$f(\gamma) = \cos\gamma x + \gamma_1\cos(\gamma-2)x + \gamma_2\cos(\gamma-4)x + \gamma_3\cos(\gamma-6)x + \ldots,$$
$$\varphi(\gamma) = \sin\gamma x + \gamma_1\sin(\gamma-2)x + \gamma_2\sin(\gamma-4)x + \gamma_3\sin(\gamma-6)x + \ldots.$$

Da alle diese Reihen für jedes positive α und γ convergent sind,

und convergent bleiben, wenn man jedes ihrer Glieder auf seinen absoluten Werth reducirt; so kann man auf dieselben die im Artikel Convergenz der Reihen (19.) und (20.) i. d. Z. bewiesenen Sätze anwenden, und erhält mittelst derselben leicht:

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \cos\alpha x\cos\gamma x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x\cos\gamma x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x\cos\gamma x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_1\cos\alpha x\cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\cos(\alpha-2)x\cos(\gamma-2)x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_2\cos\alpha x\cos(\gamma-4)x + \ldots\ldots$$
$$- \sin\alpha x\sin\gamma x - \alpha_1\sin(\alpha-2)x\sin\gamma x - \alpha_2\sin(\alpha-4)x\sin\gamma x - \ldots\ldots$$
$$- \gamma_1\sin\alpha x\sin(\gamma-2)x - \alpha_1\gamma_1\sin(\alpha-2)x\sin(\gamma-2)x - \ldots\ldots$$
$$- \gamma_2\sin\alpha x\sin(\gamma-4)x - \ldots\ldots$$

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \sin\alpha x\cos\gamma x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x\cos\gamma x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x\cos\gamma x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_1\sin\alpha x\cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\sin(\alpha-2)x\cos(\gamma-2)x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_2\sin\alpha x\cos(\gamma-4)x + \ldots\ldots$$
$$+ \cos\alpha x\sin\gamma x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x\sin\gamma x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x\sin\gamma x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_1\cos\alpha x\sin(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\cos(\alpha-2)x\sin(\gamma-2)x + \ldots\ldots$$
$$+ \gamma_2\cos\alpha x\sin(\gamma-4)x + \ldots\ldots$$

und folglich nach (41.) und (42.)

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \cos(\alpha+\gamma)x + (\alpha_1+\gamma_1)\cos(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha_2+\alpha_1\gamma_1+\gamma_2)\cos(\alpha+\gamma-4)x + (\alpha_3+\alpha_2\gamma_1+\alpha_1\gamma_2+\gamma_3)\cos(\alpha+\gamma-6)x + \ldots\ldots$$

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \sin(\alpha+\gamma)x + (\alpha_1+\gamma_1)\sin(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha_2+\alpha_1\gamma_1+\gamma_2)\sin(\alpha+\gamma-4)x + (\alpha_3+\alpha_2\gamma_1+\alpha_1\gamma_2+\gamma_3)\sin(\alpha+\gamma-6)x + \ldots\ldots;$$

also nach dem im Artikel Binomischer Lehrsatz (10.) i. d. Z. bewiesenen Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma) = \cos(\alpha+\gamma)x + (\alpha+\gamma)_1\cos(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2\cos(\alpha+\gamma-4)x + \ldots,$$
$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma) = \sin(\alpha+\gamma) + (\alpha+\gamma)_1\sin(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2\sin(\alpha+\gamma-4)x + \ldots;$$

folglich für jedes positive α und γ:

440. $f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma) = f(\alpha+\gamma)$,

441. $\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha+\gamma)$.

Setzt man $\alpha = \gamma$; so erhält man für jedes positive α:

442. $f(2\alpha) = \{f(\alpha)\}^2 - \{\varphi(\alpha)\}^2$,

443. $\varphi(2\alpha) = 2\,f(\alpha).\varphi(\alpha)$,

oder auch für jedes positive α:

444. $f(\alpha) = \{f(\frac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\frac{1}{2}\alpha)\}^2$;

445. $\varphi(\alpha) = 2\,f(\frac{1}{2}\alpha).\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$.

Auch ist, wie auf der Stelle erhellet,

446. $f(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$.

Ferner ist

$$f(1) = \cos x + \cos(-x) = \cos x + \cos x = 2\cos x ,$$
$$\varphi(1) = \sin x + \sin(-x) = \sin x - \sin x = 0 .$$

Setzen wir nun in den Gleichungen (440.) und (441.) $\alpha = 1$, $\gamma = 1$; so erhalten wir

$$f(2) = 2\cos x . 2\cos x = (2\cos x)^2,\ \varphi(2) = 0 .$$

Setzen wir ferner in denselben Gleichungen $\alpha = 1$, $\gamma = 2$; so ergiebt sich

$$f(3) = 2\cos x . (2\cos x)^2 = (2\cos x)^3,\ \varphi(3) = 0 .$$

Setzen wir eben so in denselben Gleichungen $\alpha = 1$, $\gamma = 3$; so ergiebt sich

$$f(4) = 2\cos x . (2\cos x)^3 = (2\cos x)^4,\ \varphi(4) = 0 .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und wir schließen also hieraus, daß für jedes positive ganze α

$$f(\alpha) = (2\cos x)^\alpha,\ \varphi(\alpha) = 0 ,$$

d. i. für jedes positive ganze α

447. $(2\cos x)^\alpha = \cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots .$,

448. $0 = \sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots .$

ist. Daß sich aus der Gleichung (447.) leicht die Gleichungen (436.) und (437.) ableiten lassen würden, wird ohne weitere Erläuterung auf der Stelle erhellen, so daß wir also hier zu den beiden in Rede stehenden Gleichungen noch auf eine ganz andere Art wie oben, und zwar ohne Beihülfe der imaginären Quantitäten, gelangt sind. Die Gleichung (448.) haben wir oben noch nicht gefunden, und diese Gleichung ist daher als ein neues Resultat zu betrachten.

Wir wissen also, daß für jedes positive ganze α

$$f(\alpha) = (2\cos x)^\alpha,\ \varphi(\alpha) = 0$$

ist. Nach (445.) ist aber

$$\varphi(\alpha) = 2\,f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) .$$

Also ist

$$2\,f(\tfrac{1}{2}\alpha).\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 0 ,$$

und es ist folglich entweder $f(\frac{1}{2}\alpha) = 0$, oder $\varphi(\frac{1}{2}\alpha) = 0$,

oder $f(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\alpha)$ sind beide $= 0$. Wäre aber $f(\frac{1}{2}\alpha) = 0$; so wäre, weil nach (444.)

$$f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2$$

ist,

$$f(\alpha) = -\{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2,$$

und $f(\alpha)$ wäre folglich entweder $= 0$ oder eine negative Größe. Ist aber x zwischen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, enthalten, d. i. $x > (2k - \frac{1}{2})\pi$, $x < (2k + \frac{1}{2})\pi$; so ist $\cos x$ positiv und nicht $= 0$; also ist für solche Werthe von x auch $f(\alpha) = (2\cos x)^\alpha$ weder null, noch negativ, und es kann folglich für solche Werthe von x die Größe $f(\frac{1}{2}\alpha)$ nicht $= 0$ seyn, woraus nach dem Obigen unmittelbar

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 0$$

folgt, immer unter der Voraussetzung, daß x zwischen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$ enthalten ist. Da nun, wie wir wissen,

$$f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2$$

und $\varphi(\frac{1}{2}\alpha) = 0$ ist; so ist

$$f(\alpha) = \{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^2,$$

woraus auf der Stelle

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \pm\{f(\alpha)\}^{\frac{1}{2}} = \pm(2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

folgt, vorausgesetzt, daß x zwischen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$ enthalten ist. Hier entsteht nun die Frage, ob man in vorstehender Gleichung das obere oder das untere Zeichen zu nehmen hat. Um diese Frage zu beantworten, betrachte man $f(\frac{1}{2}\alpha)$ als Function von x und setze in dieser Beziehung auch $f(\frac{1}{2}\alpha) = F(x)$. Nun lasse man sich x von $(2k - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2k + \frac{1}{2})\pi$ stetig verändern, denke sich auf ähnliche Art wie in (47.) zwei einander unendlich nahe liegende Werthe $\xi - i$ und $\xi + i$ von x in dem angegebenen Intervall, und nehme an, daß mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$F(\xi - i) = \pm\{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{2}},\ F(\xi + i) = \mp\{2\cos(\xi + i)^{\frac{\alpha}{2}}\}$$

seyn könnte, wobei man nicht zu übersehen hat, daß nach dem Obigen in dem in Rede stehenden Intervall immer

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = F(x) = \pm(2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

ist, und daß $\cos(\xi - i)$ und $\cos(\xi + i)$ beide positiv sind. Also hätten $F(\xi - i)$ und $F(\xi + i)$ entgegengesetzte Vorzeichen, und es müßte folglich, wegen der Stetigkeit der Function $F(x)$ in dem angegebenen Intervall $F(\xi) = 0$ seyn. Nun ist aber nach dem Obigen

$$F(\xi) = \pm(2\cos\xi)^{\frac{\alpha}{2}};$$

also müßte nothwendig auch $\cos\xi = 0$ seyn, welches ungereimt ist, da ξ zwischen $(2k - \frac{1}{2})\pi$ und $(2k + \frac{1}{2})\pi$ liegt. Also kann mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander nie

$$F(\xi - i) = \pm \{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad F(\xi + i) = \mp \{2\cos(\xi + i)\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

seyn, sondern es muß immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$F(\xi - i) = \pm \{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{2}}, \quad F(\xi + i) = \pm \{2\cos(\xi + i)\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

seyn. Hieraus sieht man, daß $\mathbf{F}(x)$, wenn man sich x von $(2k - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2k + \frac{1}{2})\pi$ stetig verändern läßt, mit $(2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$, diese Größe immer positiv genommen, entweder immer einerlei, oder immer entgegengesetztes Vorzeichen hat. Ist nun $k = 0$, d. h. x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten; so liegt in diesem Intervall der Werth 0 von x. Für $x = 0$ ist aber

$$F(0) = 1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_3 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)_4 + \ldots,$$

d. i., weil $\frac{\alpha}{2}$ positiv ist, nach dem Artikel Binomischer Lehrsatz (42.) i. d. Z.

$$F(0) = 2^{\frac{\alpha}{2}},$$

woraus sich ergiebt, daß für $x = 0$ nicht

$$F(x) = -(2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}},$$

sondern

$$F(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

ist. Daher ist nach dem Vorhergehenden für jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$F(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Ist also α eine positive ganze Zahl, so ist für jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 0.$$

Nach (445.) ist aber

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = 2f(\tfrac{1}{4}\alpha) \cdot \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha).$$

Also ist

$$2f(\tfrac{1}{4}\alpha) \cdot \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = 0,$$

und es ist folglich entweder $f(\frac{1}{4}\alpha) = 0$, oder $\varphi(\frac{1}{4}\alpha) = 0$,

oder $f(\frac{1}{4}\alpha)$ und $\varphi(\frac{1}{4}\alpha)$ sind beide $= 0$. Wäre aber $f(\frac{1}{4}\alpha)$ $= 0$; so wäre, weil nach (444.)

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2$$

ist,

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = -\{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2,$$

und $f(\frac{1}{2}\alpha)$ wäre folglich entweder $= 0$ oder eine negative Größe. Da aber

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

und x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist; so ist keins von beiden der Fall, und es kann folglich $f(\frac{1}{4}\alpha)$ nicht $= 0$ seyn, woraus sich nach dem Obigen unmittelbar

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = 0$$

ergiebt. Da nun, wie wir wissen,

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2 - \{\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2$$

und $\varphi(\frac{1}{4}\alpha) = 0$ ist; so ist

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \{f(\tfrac{1}{4}\alpha)\}^2,$$

woraus auf der Stelle

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = \pm\{f(\tfrac{1}{2}\alpha)\}^{\frac{1}{2}} = \pm(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$$

folgt, und nun wieder die Frage entsteht, welches Zeichen man in dieser Gleichung zu nehmen hat. Um diese Frage zu beantworten, betrachte man $f(\frac{1}{4}\alpha)$ als Function von x und setze in dieser Beziehung $f(\frac{1}{4}\alpha) = F_1(x)$. Nun lasse man x sich von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ stetig verändern, denke sich wieder zwei unendlich nahe bei einander liegende Werthe $\xi - i$ und $\xi + i$ von x in dem angegebenen Intervall, und nehme an, daß mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$F_1(\xi - i) = \pm\{2\cos(\xi - i)\}^{\frac{\alpha}{4}},\quad F_1(\xi + i) = \mp\{2\cos(\xi + i)\}^{\frac{\alpha}{4}}$$

seyn könnte, wobei man nicht zu übersehen hat, daß nach dem Obigen in dem in Rede stehenden Intervall immer

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = F_1(x) = \pm(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$$

ist, und daß $\cos(\xi - i)$ und $\cos(\xi + i)$ beide positiv sind. Also hätten $F_1(\xi - i)$ und $F_1(\xi + i)$ entgegengesetzte Vorzeichen, und es müßte folglich $F_1(\xi) = 0$ seyn. Nun ist aber nach dem Obigen

$$F_1(\xi) = \pm(2\cos\xi)^{\frac{\alpha}{4}};$$

also müßte nothwendig auch $\cos\xi = 0$ seyn, welches ungereimt ist, da ξ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Folglich kann mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander nie

$$F_1(\xi - i) = \pm\, |2\cos(\xi - i)|^{\frac{\alpha}{4}},\quad F_1(\xi + i) = \mp\, |2\cos(\xi + i)|^{\frac{\alpha}{4}}$$

seyn, sondern es muß mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer

$$F_1(\xi - i) = \pm\, |2\cos(\xi - i)|^{\frac{\alpha}{4}},\quad F_1(\xi + i) = \pm\, |2\cos(\xi + i)|^{\frac{\alpha}{4}}$$

seyn. Hieraus sieht man, daß $F_1(x)$, wenn man sich x von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ stetig verändern läßt, mit $(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$, diese Größe immer positiv genommen, entweder immer einerlei oder immer entgegengesetztes Vorzeichen hat. Für $x = 0$ ist nun

$$F_1(0) \overset{!}{=} 1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_2 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_3 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)_4 + \ldots\ldots,$$

d. i., weil $\frac{\alpha}{4}$ positiv ist, nach dem Artikel Binomischer Lehrsatz (42.) i. d. Z.

$$F_1(0) = 2^{\frac{\alpha}{4}},$$

woraus sich ergiebt, daß für $x = 0$ nicht

$$F_1(x) = -(2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}},$$

sondern

$$F_1(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}$$

ist. Daher ist nach dem Vorhergehenden für jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$F_1(x) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}}.$$

Ist also α eine positive ganze Zahl, so ist für jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{4}},\ \varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = 0\ .$$

Wie man auf die obige Weise immer weiter gehen kann, bedarf keiner Erläuterung mehr, und man schließt also aus dem Vorhergehenden sehr leicht, daß für jedes positive ganze α und n, und für jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x immer

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = (2\cos x)^{\frac{\alpha}{2^n}},\ \varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 0$$

ist, woraus sich dann ferner durch eine der in (47.) gebrauchten ganz ähnliche Schlußweise sehr leicht ergiebt, daß für jedes beliebige positive α und jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene x

449. $f(\alpha) = (2\cos x)^\alpha$, $\varphi(\alpha) = 0$,

oder

450. $(2\cos x)^\alpha = \cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots.$,

451. $0 = \sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots.$

ist, welches unstreitig ein sehr merkwürdiges und wichtiges analytisches Resultat ist.

52. Wir wollen nun, indem Θ einen beliebigen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen, n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, überhaupt

$$x = \Theta \pm n\pi$$

setzen; so ist

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots. \\
=\ &\cos\alpha(\Theta \pm n\pi) + \alpha_1 \cos(\alpha-2)(\Theta \pm n\pi) + \ldots. \\
=\ &\cos\alpha\Theta\cos\alpha n\pi + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta\cos(\alpha-2)n\pi + \ldots. \\
&\mp \sin\alpha\Theta\sin\alpha n\pi \mp \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta\sin(\alpha-2)n\pi \mp \ldots. \\
=\ &\cos\alpha\Theta\cos\alpha n\pi + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta\cos\alpha n\pi\cos 2n\pi + \ldots. \\
&\quad + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta\sin\alpha n\pi\sin 2n\pi + \ldots. \\
&\mp \sin\alpha\Theta\sin\alpha n\pi \mp \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta\sin\alpha n\pi\cos 2n\pi \mp \ldots. \\
&\quad \pm \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta\cos\alpha n\pi\sin 2n\pi \pm \ldots.
\end{aligned}$$

Weil nun nach (43.) und (44.)

$$\cos 2n\pi = \cos 4n\pi = \cos 6n\pi = \ldots = 1,$$
$$\sin 2n\pi = \sin 4n\pi = \sin 6n\pi = \ldots = 0$$

ist; so ist

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots. \\
=\ &\{\cos\alpha\Theta + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \cos(\alpha-4)\Theta + \ldots.\}\cos\alpha n\pi \\
&\mp\{\sin\alpha\Theta + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \sin(\alpha-4)\Theta + \ldots.\}\sin\alpha n\pi\,.
\end{aligned}$$

Nach (450.) und (451.) ist aber, da Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, und α, wie sich von selbst versteht, positiv ist:

$$\begin{aligned}
(2\cos\Theta)^\alpha &= \cos\alpha\Theta + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \cos(\alpha-4)\Theta + \ldots., \\
0 &= \sin\alpha\Theta + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \sin(\alpha-4)\Theta + \ldots.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
&(2\cos\Theta)^\alpha \cos\alpha n\pi \\
=\ &\cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots.
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Art ist

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots. \\
=\ &\sin\alpha(\Theta \pm n\pi) + \alpha_1 \sin(\alpha-2)(\Theta \pm n\pi) + \ldots. \\
=\ &\sin\alpha\Theta\cos\alpha n\pi + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta\cos(\alpha-2)n\pi + \ldots. \\
&\pm \cos\alpha\Theta\sin\alpha n\pi \pm \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta\sin(\alpha-2)n\pi \pm \ldots. \\
=\ &\sin\alpha\Theta\cos\alpha n\pi + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta\cos\alpha n\pi\cos 2n\pi + \ldots. \\
&\quad + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta\sin\alpha n\pi\sin 2n\pi + \ldots. \\
&\pm \cos\alpha\Theta\sin\alpha n\pi \pm \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta\sin\alpha n\pi\cos 2n\pi \pm \ldots. \\
&\quad \mp \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta\cos\alpha n\pi\sin 2n\pi \mp \ldots. \\
=\ &\{\sin\alpha\Theta + \alpha_1 \sin(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \sin(\alpha-4)\Theta + \ldots.\}\cos\alpha n\pi \\
&\pm\{\cos\alpha\Theta + \alpha_1 \cos(\alpha-2)\Theta + \alpha_2 \cos(\alpha-4)\Theta + \ldots.\}\sin\alpha n\pi\,;
\end{aligned}$$

also nach (450.) und (451.)

$$\pm (2\cos\Theta)^{\alpha} \sin \alpha n\pi$$
$$= \sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots$$

Ist also Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten, α positiv, n eine beliebige ganze Zahl; so ist für

$$x = \Theta \pm n\pi$$

jederzeit

$$452.\quad (2\cos\Theta)^{\alpha}\cos\alpha n\pi$$
$$= \cos\alpha x + \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x + \ldots\ldots,$$
$$453.\quad \pm (2\cos\Theta)^{\alpha}\sin\alpha n\pi$$
$$= \sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots$$

Obgleich aus allen vorhergehenden Betrachtungen schon von selbst unmittelbar hervorgeht, daß in (51.) unter $(2\cos x)^{\alpha}$, und eben so im Obigen unter $(2\cos\Theta)^{\alpha}$, immer die reellen positiven Werthe dieser Potenzen zu verstehen sind; so bemerken wir dies doch des Folgenden wegen hier noch besonders.

53. Jetzt soll m immer eine positive oder negative, n eine positive ganze Zahl bezeichnen, und zugleich wollen wir annehmen, daß m und n keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so daß $\frac{m}{n}$ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch ist.

I. Nach der Gleichung (314.) ist, wenn k eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\left(\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}\right)^{n} = \cos 2km\pi \pm i\sin 2km\pi\ ;$$

folglich nach (43.) und (44.)

$$\left(\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}\right)^{n} = (-1)^{2km} = (+1)^{m},$$

und man sieht also, daß die Größe

$$\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}$$

für jedes ganze k ein Werth der Potenz $(+1)^{\frac{m}{n}}$ ist.

Sind nun k′ und k″ zwei ungleiche positive ganze Zahlen, deren jede kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist; so sind die beiden Cosinus

$$\cos\frac{2k'm\pi}{n} \text{ und } \cos\frac{2k''m\pi}{n}$$

nie einander gleich. Wäre nämlich

$$\cos\frac{2k'm\pi}{n} = \cos\frac{2k''m\pi}{n}\ ;$$

so wäre, wenn λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach (32. II.)

$$\frac{2k''m\pi}{n} = 2\lambda\pi \pm \frac{2k'm\pi}{n},$$

und folglich

$$\frac{(k'' \mp k')m}{n} = \lambda,$$

also der Bruch auf der linken Seite des Gleichheitszeichens eine ganze Zahl, welches ungereimt ist, da nach der Voraussetzung m und n relative Primzahlen und k', k'' zwei ungleiche positive ganze Zahlen sind, deren jede kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist. Folglich sind die beiden Cosinus

$$\cos\frac{2k'm\pi}{n} \text{ und } \cos\frac{2k''m\pi}{n}$$

nicht einander gleich, wie behauptet wurde.

Ferner läßt sich behaupten, daß $\sin\frac{2k'm\pi}{n}$ bloß dann verschwindet, wenn $k' = 0$ ist. Für

$$\sin\frac{2k'm\pi}{n} = 0$$

wäre nämlich

$$\frac{2k'm\pi}{n} = \lambda\pi, \quad \frac{2k'm}{n} = \lambda,$$

also $\frac{2k'm}{n}$ eine ganze Zahl, welches wegen der gemachten Voraussetzungen bloß dann möglich ist, wenn $k' = 0$ ist.

Setzt man nun in der Formel

$$\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}$$

für k alle positive ganze Zahlen, welche kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind; so sind, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen erhellet, alle Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf diese Weise erhält, mit Ausnahme der beiden ersten dem Werthe $k = 0$ entsprechenden, unter einander ungleich. Ist n eine ungerade Zahl, so ist die Anzahl dieser sämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$2.\frac{n-1}{2} + 1 = n,$$

welches gerade die Anzahl der verschiedenen Werthe ist, welche die Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$ nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen überhaupt bloß haben kann. Ist n eine gerade Zahl, so ist die Anzahl der in Rede stehenden sämmtlich unter einander verschiedenen Werthe

$$2.\frac{n-2}{2} + 1 = n - 1.$$

Setzt man nun aber noch $k = \frac{1}{2}n$, so erhält man den Doppelwerth

$$\cos m\pi \pm i \sin m\pi ,$$

welcher sich jedoch, weil $\sin m\pi = 0$ ist, auf den einen Werth

$$\cos m\pi = (-1)^m = -1$$

reducirt, wobei man zu bemerken hat, daß m in diesem Falle, weil m und n relative Primzahlen sind, nothwendig eine ungerade Zahl seyn muß. Nimmt man also diesen Werth, welcher unter den vorhergehenden offenbar noch nicht vorgekommen ist, zu letztern hinzu; so hat man wieder n verschiedene Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$, und mehr von einander verschiedene Werthe kann diese Größe nach der Theorie der Gleichungen nicht haben.

Fassen wir also alles Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich, daß man aus der Formel

$$\cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n}$$

alle n Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$ erhält, wenn man für k alle positive ganze Zahlen setzt, die nicht größer als $\frac{1}{2}n$ sind, wobei denn auch zugleich erhellet, daß diese n Werthe sämmtlich unter einander verschieden sind.

Den Inbegriff aller verschiedenen Werthe, welche die αte Potenz der beliebigen Größe a überhaupt bloß haben kann, wollen wir im Folgenden durch $((a))^\alpha$, einen bestimmten Werth dieser Potenz dagegen, der übrigens an sich völlig willkührlich ist, nur immer im ganzen Laufe der Rechnung als unverändert bleibend gedacht wird, auf die gewöhnliche Weise durch a^α oder $(a)^\alpha$ bezeichnen. Mit Anwendung dieser Bezeichnung erhalten wir also aus dem Vorhergehenden

$$((+1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2km\pi}{n} \pm i\sin\frac{2km\pi}{n} ,$$

indem man für k alle positive ganze Zahlen setzt, die nicht größer als $\frac{1}{2}n$ sind, wobei zugleich zu bemerken ist, daß die n Werthe der Größe $(+1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf diese Weise erhält, sämmtlich unter einander verschieden sind.

II. Nach der Gleichung (314.) ist wieder, wenn k eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\left(\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}\right)^n = \cos(2k+1)m\pi \pm i\sin(2k+1)m\pi ;$$

folglich nach (43.) und (44.)

$$\left(\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}\right)^n = (-1)^{(2k+1)m} = (-1)^m .$$

Also liefert die Größe

$$\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i \sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}$$

für jedes ganze k einen Werth der Potenz $(-1)^{\frac{m}{n}}$.

Sind nun wieder k' und k'' zwei ungleiche positive ganze Zahlen, deren jede kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist; so können die beiden Cosinus

$$\cos\frac{(2k'+1)m\pi}{n} \text{ und } \cos\frac{(2k''+1)m\pi}{n}$$

nie einander gleich seyn. Wäre nämlich

$$\cos\frac{(2k'+1)m\pi}{n} = \cos\frac{(2k''+1)m\pi}{n};$$

so wäre, wenn λ wieder eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, nach (32. II.)

$$\frac{(2k''+1)m\pi}{n} = 2\lambda\pi \pm \frac{(2k'+1)m\pi}{n},$$

und folglich entweder

$$\frac{(k''-k')m}{n} = \lambda,$$

oder

$$\frac{(k''+k'+1)m}{n} = \lambda,$$

so daß also entweder

$$\frac{(k''-k')m}{n} \text{ oder } \frac{(k''+k'+1)m}{n}$$

eine ganze Zahl wäre, welches beides nicht möglich ist, da nach der Voraussetzung m und n relative Primzahlen, und die positiven ganzen Zahlen k', k'' beide kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind, weshalb also sowohl der absolute Werth von $k''-k'$, als auch $k''+k'+1$, immer kleiner als n ist. Auch ist $k''-k'$ nicht $=0$, da k' und k'' ungleich sind.

Ferner läßt sich behaupten, daß $\sin\frac{(2k'+1)m\pi}{n}$ bloß dann verschwindet, wenn $2k'+1=n$ ist, welches bloß dann der Fall seyn kann, wenn n eine ungerade Zahl ist. Aus

$$\sin\frac{(2k'+1)m\pi}{n} = 0$$

folgt nämlich

$$\frac{(2k'+1)m\pi}{n} = \lambda\pi, \quad \frac{(2k'+1)m}{n} = \lambda,$$

so daß also $\frac{(2k'+1)m}{n}$ eine ganze Zahl ist, welches wegen der gemachten Voraussetzungen bloß dann möglich ist, wenn n eine ungerade Zahl und $2k'+1=n$ ist.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich nun, daß alle Werthe von $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man erhält, wenn man in der Formel

$$\cos\frac{(2k+1)\,m\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)\,m\pi}{n}$$

für k alle positive ganze Zahlen setzt, die kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind, mit Ausnahme der beiden letzten dem Werthe $k = \frac{n-1}{2}$ in dem Falle eines ungeraden n entsprechenden Werthe, unter einander ungleich sind. Ist n eine ungerade Zahl, so ist die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe der Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf diese Weise erhält, offenbar

$$2.\frac{n-1}{2} + 2 - 1 = 2.\frac{n-1}{2} + 1 = n,$$

und dies ist gerade die Anzahl der verschiedenen Werthe, welche nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen die Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$ überhaupt haben kann. Ist n eine gerade Zahl, so ist die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe der Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf die obige Weise erhält,

$$2.\frac{n-2}{2} + 2 = n,$$

und dies ist wieder die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe, welche nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen die Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$ überhaupt haben kann. In der oben eingeführten Bezeichnung ist also

$$((-1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{(2k+1)\,m\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)\,m\pi}{n},$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, welche kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind, wobei zugleich erhellet, daß alle n Werthe der Größe $(-1)^{\frac{m}{n}}$, welche man auf diese Weise erhält, unter einander ungleich sind.

III. Bezeichnet nun α einen beliebigen positiven oder negativen in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruch; so ist nach **I.**

454. $$((+1))^{\alpha} = \cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, welche nicht größer als der halbe Nenner von α sind; und nach **II.** ist

455. $$((-1))^{\alpha} = \cos(2k+1)\,\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\,\alpha\pi,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, welche kleiner als der halbe Nenner von α sind.

Die Anzahl der Werthe, welche die Potenzen $(+1)^{\alpha}$ und $(-1)^{\alpha}$, überhaupt haben können, wird nach der allgemeinen Theorie

der Gleichungen durch den Nenner von α bestimmt, und aus dem Vorhergehenden erhellet, daß jede dieser Potenzen in der That auch eben so viele sämmtlich von einander verschiedene Werthe hat, wie der Nenner des Exponenten α Einheiten enthält.

IV. Ist nun $\pm a$ eine beliebige positive oder negative Größe und α ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter positiver oder negativer Bruch; so ist

$$((\pm a))^{\alpha} = ((\pm 1))^{\alpha} . a^{\alpha} ,$$

d. h. man erhält jederzeit alle in $((\pm a))^{\alpha}$ enthaltene Werthe, wenn man alle in $((\pm 1))^{\alpha}$ enthaltene Werthe mit ein und demselben bestimmten, übrigens an sich beliebigen, Werthe der αten Potenz von a multiplicirt.

Um dies zu beweisen, wollen wir zuerst zeigen, daß jeder in $((\pm 1))^{\alpha} . a^{\alpha}$ enthaltene Werth ein Werth der αten Potenz von $\pm a$ ist. Zu dem Ende setze man $\alpha = \frac{m}{n}$ und bezeichne einen beliebigen der in $((\pm 1))^{\alpha}$ enthaltenen Werthe durch p, einen beliebigen der in $((\pm 1))^{\alpha} . a^{\alpha}$ enthaltenen Werthe folglich durch pa^{α}. Weil p einer der in $((\pm 1))^{\alpha}$ enthaltenen Werthe ist; so ist $p^n = (\pm 1)^m$, und eben so ist $(a^{\alpha})^n = a^m$. Also ist

$$p^n . (a^{\alpha})^n = (\pm 1)^m . a^m ,$$

d. i. $(pa^{\alpha})^n = (\pm a)^m$, so daß also pa^{α} wirklich ein Werth der $\frac{m}{n}$ten oder αten Potenz von $\pm a$ ist, wie behauptet wurde. Nach **III.** hat $((\pm 1))^{\alpha}$ n sämmtlich unter einander verschiedene Werthe; also hat auch $((\pm 1))^{\alpha} . a^{\alpha}$ n sämmtlich unter einander verschiedene Werthe; nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen kann $((\pm a))^{\alpha}$ nicht mehr als n unter einander verschiedene Werthe haben; nach dem Vorhergehenden ist jeder in $((\pm 1))^{\alpha} . a^{\alpha}$ enthaltene Werth ein Werth von $((\pm a))^{\alpha}$; also ist offenbar

$$((\pm a))^{\alpha} = ((\pm 1))^{\alpha} . a^{\alpha} ,$$

wie bewiesen werden sollte. Folglich hat man nach **III.**

$$456. \quad ((+ a))^{\alpha} = \{\cos 2k\alpha\pi \pm i \sin 2k\alpha\pi\} . a^{\alpha} ,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, die nicht größer als der halbe Nenner des in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Exponenten α sind; und

$$457. \quad ((- a))^{\alpha} = \{\cos (2k+1)\alpha\pi \pm i \sin (2k+1)\alpha\pi\} . a^{\alpha} ,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, die kleiner als der halbe Nenner des in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Exponenten α sind.

54. Diese Principien wollen wir jetzt zur vollständigen Entwickelung der Potenzen der Cosinus und Sinus durch die Cosinus und Sinus der vielfachen Bogen anwenden, wobei wir ein für alle Mal bemerken, daß im Folgenden α immer ein positiver in

den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch seyn soll. Wären Potenzen mit negativen Exponenten zu entwickeln; so würde man

$$(2\cos x)^{-\alpha} = \frac{1}{(2\cos x)^{\alpha}}, \quad (2\sin x)^{-\alpha} = \frac{1}{(2\sin x)^{\alpha}}$$

zu setzen, und auf die Nenner dieser Brüche die Formeln, welche wir sogleich kennen lernen werden, anzuwenden haben.

I. Wenn $\cos x$ positiv und nicht $= 0$ ist; so kann man

$$x = \Theta \pm 2n\pi$$

setzen, wo Θ ein zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltener Bogen und n eine ganze Zahl ist. Also ist nach (50.)

$$\cos x = \cos\Theta = (+1).\cos\Theta,$$

und folglich nach (53. IV.)

$$((2\cos x))^{\alpha} = ((+1))^{\alpha}.(2\cos\Theta)^{\alpha},$$

wo $(2\cos\Theta)^{\alpha}$ der reelle positive Werth der αten Potenz von $2\cos\Theta$ seyn soll. Also ist nach (452.) und (453.)

458. $$((2\cos x))^{\alpha} = \frac{((+1))^{\alpha}}{\cos 2n\alpha\pi}\{\cos\alpha x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x + \ldots\},$$

459. $$((2\cos x))^{\alpha} = \pm\frac{((+1))^{\alpha}}{\sin 2n\alpha\pi}\{\sin\alpha x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x + \ldots\},$$

oder auch nach (454.), wenn wir die beiden eingeklammerten Reihen der Kürze wegen durch S_α und Σ_α bezeichnen:

460. $$((2\cos x))^{\alpha} = \frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\cos 2n\alpha\pi} S_\alpha,$$

461. $$((2\cos x))^{\alpha} = \pm\frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\sin 2n\alpha\pi}\Sigma_\alpha,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, die nicht größer als der halbe Nenner des Exponenten α sind, wobei man nur noch zu bemerken hat, daß das doppelte Zeichen vor dem Bruche in der Gleichung (461.) bloß mit dem doppelten Zeichen in der Gleichung $x = \Theta \pm 2n\pi$ correspondirt, welches in ähnlichen Fällen auch im Folgenden gilt, und daher ein für alle Mal bemerkt seyn mag.

II. Wenn $\cos x$ negativ ist, so kann man

$$x = \Theta \pm (2n+1)\pi$$

setzen, wo wieder Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten und n eine ganze Zahl ist. Also ist nach (50.)

$$\cos x = -\cos\Theta = (-1).\cos\Theta,$$

und folglich nach (53. IV.)

$$((2\cos x))^{\alpha} = ((-1))^{\alpha}.(2\cos\Theta)^{\alpha},$$

wo nun wieder $(2\cos\Theta)$ der reelle positive Werth der αten Potenz von $2\cos\Theta$ seyn soll. Also ist nach (452.) und (453.)

462. $((2\cos x))^\alpha =$

$$\frac{((-1))^\alpha}{\cos(2n+1)\alpha\pi}\{\cos\alpha x + \alpha_1\cos(\alpha-2)x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x + \ldots\},$$

463. $((2\cos x))^\alpha =$

$$\pm\frac{((-1))^\alpha}{\sin(2n+1)\alpha\pi}\{\sin\alpha x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x + \ldots\},$$

oder nach (455.)

464. $$((2\cos x))^\alpha = \frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\cos(2n+1)\alpha\pi} S_\alpha,$$

465. $$((2\cos x))^\alpha = \pm\frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\sin(2n+1)\alpha\pi}\Sigma_\alpha,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, die kleiner als der halbe Nenner des Exponenten α sind.

III. Der Kürze wegen bezeichne man die beiden Reihen

$$\cos\alpha(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_1\cos(\alpha-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_2\cos(\alpha-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \ldots,$$
$$\sin\alpha(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_1\sin(\alpha-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \alpha_2\sin(\alpha-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \ldots.$$

respective durch S'_α und Σ_α. Ist nun zuerst $\sin x$ positiv und nicht $= 0$; so ist auch $\cos(\frac{1}{2}\pi - x)$ positiv und nicht $= 0$, und man kann also

$$\tfrac{1}{2}\pi - x = \Theta \pm 2n\pi$$

setzen, wo Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten und n eine ganze Zahl ist. Da nun bekanntlich $\sin x = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$ ist; so erhält man aus (460.) und (461.) auf der Stelle

466. $$((2\sin x))^\alpha = \frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\cos 2n\alpha\pi} S'_\alpha,$$

467. $$((2\sin x))^\alpha = \pm\frac{\cos 2k\alpha\pi \pm i\sin 2k\alpha\pi}{\sin 2n\alpha\pi}\Sigma_\alpha,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, die nicht größer als der halbe Nenner des Exponenten α sind.

IV. Ist $\sin x$ negativ, so kann man

$$\tfrac{1}{2}\pi - x = \Theta \pm (2n+1)\pi$$

setzen, wo Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten und n eine ganze Zahl ist. Da nun bekanntlich $\sin x = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$ ist; so erhält man aus (464.) und (465.)

468. $$((2\sin x))^\alpha = \frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\cos(2n+1)\alpha\pi} S'_\alpha,$$

469. $$((2\sin x))^\alpha = \pm\frac{\cos(2k+1)\alpha\pi \pm i\sin(2k+1)\alpha\pi}{\sin(2n+1)\alpha\pi}\Sigma_\alpha,$$

wenn man für k alle positiven ganzen Zahlen setzt, die kleiner als der halbe Nenner des Exponenten α sind.

55. Diese allgemeinen Formeln wollen wir nun zunächst auf ein Paar Beispiele anwenden, und wollen zuerst einmal

$x = \pi$, $\alpha = \frac{1}{3}$ setzen. Um nun $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln, überlege man zuerst, daß

$$x = \pi = 0 + 1.\pi$$

und folglich in (54. II.) $\Theta = 0$, $2n + 1 = 1$ oder $n = 0$ ist. Für k hat man in der Formel (464.) bloß die Werthe 0 und 1 zu setzen. Ferner erhält man leicht

$$S_a = \cos\tfrac{1}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_1 . \cos\tfrac{5}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_2 . \cos\tfrac{11}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_5 \cos\tfrac{17}{3}\pi + \ldots.$$
$$= \cos\tfrac{1}{3}\pi . \left|1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + (\tfrac{1}{3})_3 + \ldots\right| ,$$

d. i. nach dem Artikel Binomischer Lehrsatz (42.) i. d. Z.

$$S_a = \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2} .$$

Die verschiedenen Werthe von $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}}$ sind also nach (464.)

$$\frac{\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi}{\cos\frac{1}{3}\pi} . \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2} ,$$

$$\frac{\cos\pi + i\sin\pi}{\cos\frac{1}{3}\pi} . \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2} ,$$

d. i.

$$(\cos\tfrac{1}{3}\pi \pm i\sin\tfrac{1}{3}\pi) . \sqrt[3]{2} \text{ und } -\sqrt[3]{2} .$$

Aus (229.) und (230.) ergiebt sich aber auf der Stelle:

$$\cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} .$$

Also sind

$$(1 \pm i\sqrt{3}) . \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} \text{ und } -\sqrt[3]{2}$$

die drei Werthe von $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}} = ((-2))^{\frac{1}{3}}$. Man überzeugt sich aber durch leichte Rechnung, daß in der That die dritten Potenzen von

$$(1 + i\sqrt{3}) . \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}, \quad (1 - i\sqrt{3}) . \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}, \quad -\sqrt[3]{2}$$

sämmtlich $= -2$ sind, und die Resultate, welche die allgemeine Formel (464.) liefert, also ganz richtig sind.

Bedienen wir uns der allgemeinen Formel (465.); so erhalten wir zuvörderst

$$\Sigma_a = \sin\tfrac{1}{3}\pi - (\tfrac{1}{3})_1 . \sin\tfrac{5}{3}\pi - (\tfrac{1}{3})_1 . \sin\tfrac{11}{3}\pi - (\tfrac{1}{3})_3 . \sin\tfrac{17}{3}\pi - \ldots.$$
$$= \sin\tfrac{1}{3}\pi . \left|1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + (\tfrac{1}{3})_3 + \ldots\right| ,$$

d. i. wieder nach dem Binomischen Lehrsatze

$$\Sigma_a = \sin\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2} .$$

Die verschiedenen Werthe von $((2\cos\pi))^{\frac{1}{3}}$ sind nun nach (465.), da man im vorliegenden Falle, weil $x = 0 + 1.\pi$ ist, das obere Zeichen nehmen muß:

$$\frac{\cos\frac{1}{3}\pi \pm i\sin\frac{1}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} . \sin\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2} ,$$

$$\frac{\cos\pi \pm i\sin\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} . \sin\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2} ;$$

d. i.

$$(\cos\tfrac{1}{3}\pi \pm i\sin\tfrac{1}{3}\pi).\sqrt[3]{2} \text{ und } -\sqrt[3]{2},$$

also ganz dieselben wie vorher.

Wir wollen ferner $x = 2\pi$, $\alpha = \frac{1}{4}$ setzen. In diesem Falle, wo $\cos x$ positiv und $x = 0 + 2\pi$ ist, hat man in (54. I.) $\Theta = 0$, $n = 1$, und es ist folglich $\cos 2n\alpha\pi = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$, so daß also jetzt die Formel (458.) oder (460.) nicht brauchbar ist, sondern die Formel (459.) oder (461.) angewandt werden muß, welches eine in allen ähnlichen Fällen, auch bei den Formeln (464.) und (465.), (466.) und (467.), (468.) und (469.), wohl zu beachtende Bemerkung ist. Man übersieht auch auf der Stelle, daß in dem vorliegenden Falle $S_\alpha = 0$ wird, und die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung (458.) oder (460.) also den völlig unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ erhält. Gebrauchen wir nun die Formel (461.), indem wir jetzt in derselben das obere Zeichen vor dem Bruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nehmen müssen; so ist, weil $\sin 2n\alpha\pi = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$ ist:

$$((2\cos 2\pi))^{\frac{1}{4}} = (\cos\tfrac{1}{2}k\pi \pm i\sin\tfrac{1}{2}k\pi)\Sigma_\alpha,$$

wo man $k = 0, 1, 2$ zu setzen hat. Da nun

$$\Sigma_\alpha = \sin\tfrac{1}{2}\pi + (\tfrac{1}{4})_1.\sin(-\tfrac{3}{4}\pi) + (\tfrac{1}{4})_2.\sin(-\tfrac{15}{4}\pi) + \ldots$$
$$= 1 + (\tfrac{1}{4})_1 + (\tfrac{1}{4})_2 + (\tfrac{1}{4})_3 + (\tfrac{1}{4})_4 + \ldots,$$

d. i. nach dem binomischen Lehrsatze

$$\Sigma_\alpha = (1+1)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

ist; so erhält man für

$$((2\cos 2\pi))^{\frac{1}{4}} = ((2))^{\frac{1}{4}}$$

die folgenden vier Werthe:

$$\sqrt[4]{2},\ \pm i\sqrt[4]{2},\ -\sqrt[4]{2},$$

und durch eine leichte Rechnung überzeugt man sich auch auf der Stelle, daß alle diese vier Größen, auf die vierte Potenz erhoben, in der That 2 geben, unsere obigen Formeln also wieder völlig richtige Resultate liefern.

Es wird nicht nöthig seyn, diese Anwendungen zu vervielfältigen, indem schon die beiden obigen Beispiele deutlich genug zeigen, wie man sich in allen Fällen zu verhalten hat.

56. Die Mathematiker haben sich in neuester Zeit sehr viel mit der Analysis der goniometrischen Functionen, namentlich mit der Entwickelung der Potenzen der Sinus und Cosinus eines Bogens durch die Sinus und Cosinus der Vielfachen dieses Bogens, und umgekehrt mit der Entwickelung der Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen durch die Potenzen der Sinus und Cosinus des einfachen Bogens, beschäftigt. Den ersten Anstoß zu

diesen Beschäftigungen, welche der Analysis schon manche schöne Frucht getragen haben, gab ein Aufsatz, welchen der scharfsinnige Poisson im Jahre 1811 in der Correspondance sur l' école polytechnique T. II. p. 212. bekannt machte. Euler hatte nämlich schon im Jahre 1755 in den Nov. Comment. Petrop. T. V. p. 164. nach einer der oben in (50.) in dem Falle eines positiven ganzen Exponenten angewandten ganz ähnlichen Methode die Gleichung

$$2^n \cos x^n = \cos nx + n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots\ldots$$

entwickelt, und dieselbe als ganz allgemein für jedes positive oder negative ganze oder gebrochene n und jedes beliebige x gültig ausgegeben. Lagrange wiederholte noch im Jahre 1806, wo derselbe in den Leçons sur le calcul des fonctions. Leçon X. XI. eine neue Zusammenstellung und Begründung der wichtigsten goniometrischen Reihen zu geben versuchte, dieselbe Behauptung, und selbst noch im Jahre 1810 schrieb Lacroix in der neuen Ausgabe seines Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. T. I. p. 88.: „la valeur que nous venons de trouver pour $\cos x^n$ n'est pas restreinte au seul cas ou n'est un nombre entier; elle conviendrait également à ceux ou n serait fractionnaire ou negatif.“ Und in der That scheint auch die von Euler angewandte Methode auf alle Arten des Exponenten und jeden beliebigen Bogen anwendbar, und somit auch die von derselben gelieferten Resultate ganz allgemein gültig zu seyn, wenn man nämlich, was man hier wohl zu beachten hat, das Binomialtheorem als ganz allgemein gültig betrachtet und sich überhaupt um die Convergenz und Divergenz der in Betrachtung kommenden Reihen nicht bekümmert. Sobald man aber dem Binomialtheorem, wie wir in dem Artikel Binomischer Lehrsatz in diesen Supplementen zu thun gezwungen gewesen sind, seine allgemeine Gültigkeit abspricht, und die wohl nicht mehr zurückzuweisende Berücksichtigung der Convergenz und Divergenz der in Betrachtung kommenden Reihen hinzu tritt, muß natürlich auch die so oft und so hoch gepriesene völlig allgemeine Gültigkeit der oben für $(2\cos x)^n$ angegebenen Reihe, deren Entwickelung namentlich das als völlig allgemein betrachtete Binomialtheorem zum Grunde liegt, in Zweifel gezogen werden. Poisson war es nun, welcher zuerst in dem oben erwähnten Aufsatze zeigte, daß die in Rede stehende Reihe wirklich in gewissen Fällen en défaut ist. Er zeigte dies an dem Falle, wo $x = \pi$, $n = \frac{1}{2}$ ist, den wir daher absichtlich auch schon in (55.) mittelst der oben von uns entwickelten Formeln in Untersuchung genommen haben. Setzt man in der als allgemein gültig angenommenen Reihe

$$2^n \cos x^n = \cos nx + n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots$$

$x = \pi$ und $n = \frac{1}{2}$, und wendet dann den Binomischen Lehrsatz an; so erhält man

$$2^{\frac{1}{3}}\cos\pi^{\frac{1}{3}} = \cos\tfrac{1}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_1 . \cos\tfrac{5}{3}\pi + (\tfrac{1}{3})_2 . \cos\tfrac{11}{3}\pi + \ldots\ldots$$
$$= \cos\tfrac{1}{3}\pi . \{1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + (\tfrac{1}{3})_3 + \ldots\ldots\}$$
$$= \cos\tfrac{1}{3}\pi . (1+1)^{\frac{1}{3}} = \cos\tfrac{1}{3}\pi . \sqrt[3]{2} ,$$

oder, weil

$$\cos\pi = -1, \quad \cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}$$

ist,

$$2^{\frac{1}{3}} . (-1)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2} . \sqrt[3]{2} ,$$

welches offenbar ungereimt ist. Man hat sich, und namentlich zuerst Poisson selbst, viele Mühe gegeben, die Gründe aufzufinden, aus denen die in Rede stehende Reihe in gewissen Fällen falsche Resultate liefert oder en défaut ist, Bemühungen, denen wir wenigstens, so sehr wir auch den auf diese Untersuchungen von einigen französischen Geometern verwandten Scharfsinn ehren und anerkennen, unsern Beifall nicht ganz schenken können, weil diese Gründe, unserer Meinung nach, im Ganzen sehr nahe liegend, und bei Weitem hauptsächlich in der unerlaubten Anwendung des Binomialtheorems über seine Gränzen hinaus und der völlig unterlassenen Berücksichtigung der Convergenz und Divergenz der zur Betrachtung kommenden Reihen zu suchen sind; und daß aus unsichern Gründen auch unsichere Resultate hervorgehen müssen, unterliegt wohl keinem Zweifel. Am besten wird man sich indeß über Poissons Ansichten aus Münchows in so vieler Beziehung trefflichen Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Bonn 1826, S. 231., so wie auch aus dem dritten Theile von Lacroixs oben angeführten Werke (p. 605.), wo der Verfasser ebenfalls schon auf die Falschheit der obigen Reihe für $2^n \cos x^n$ aufmerksam macht, belehren können. In neuester Zeit hat sich auf jeden Fall Crelle in zwei Abhandlungen (Annales de Mathematiques, T. XIII. No. VII. und vorzüglich Journal für reine und angewandte Mathematik, V. 5. 197.) das meiste Verdienst um diesen Gegenstand erworben, und auch Poinsots besondere unter dem Titel: Recherches sur l' Analyse des sections angulaires. Paris. 1825. 4. erschienene Schrift ist in vielen Beziehungen sehr lehrreich, da sich dieselbe überhaupt sehr ausführlich über den in Rede stehenden wichtigen Gegenstand verbreitet, und namentlich auch eine Beurtheilung aller ältern von Euler und Lagrange angewandten Methoden enthält. Ueber einige neue Erörterungen, welche diese Schrift von Seiten Poissons veranlaßte, s. m. Bulletin des sciences mathématiques. Septbr. 1825. p. 140, Décembre 1825. p. 344. Ueber die Bemühungen von Deflers s. m. Lacroix a. a. O. T. III. p. 620. Außerdem haben sich mit diesem Gegenstande noch beschäftigt: Plana (Annales des Mathématiques. T. XI. p. 84.), L. Olivier (Crelles Journal. I. 5. 16.), Abel (das. S. 338.), Cauchy (Exercices de Mathématiques. Livr. 1. p. 1.). Ich

habe in diesem Artikel (43.) — (44.) und (51.) — (55.) den in Rede stehenden Gegenstand nach einer von den bisher angewandten ganz verschiedenen Methode behandelt, und möchte daher diese Partie dieses Wörterbuchs der Berücksichtigung und Beurtheilung gründlicher Kenner vorzüglich empfehlen. Namentlich sind auch die Formeln (458.) — (469.) noch nicht unter der hier ihnen von mir gegebenen Form, die mir wegen ihrer Bequemlichkeit empfehlenswerth scheint, dargestellt worden.

57. Es sind nun noch einige Formeln zurück, die wir, um den Gang der vorhergehenden Untersuchung nicht zu unterbrechen, bis hierher verspart haben. Ist nämlich α positiv und x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten; so ist nach (451.)

$$\sin\alpha x + \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0 .$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man sehr leicht:

$$470.\quad \operatorname{tang}\alpha x = \frac{\alpha_1 \sin 2x + \alpha_2 \sin 4x + \alpha_3 \sin 6x + \ldots\ldots}{1 + \alpha_1 \cos 2x + \alpha_2 \cos 4x + \alpha_3 \cos 6x + \ldots\ldots}$$

für jedes positive α und jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene x.

Differentiirt man die obige Gleichung nach x; so erhält man:

$$\alpha\cos\alpha x + \alpha_1(\alpha-2)\cos(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)\cos(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0 ,$$
$$\alpha^2\sin\alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^2\sin(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^2\sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0 ,$$
$$\alpha^3\cos\alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^3\cos(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^3\cos(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0 ,$$
$$\alpha^4\sin\alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^4\sin(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^4\sin(\alpha-4)x + \ldots\ldots = 0 ,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

Also ist für jedes positive α und jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x:

$$471.\quad 0 = \alpha^{2k}\sin\alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^{2k}\sin(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k}\sin(\alpha-4)x + \ldots,$$
$$472.\quad 0 = \alpha^{2k+1}\cos\alpha x + \alpha_1(\alpha-2)^{2k+1}\cos(\alpha-2)x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1}\cos(\alpha-4)x + \ldots,$$

und aus diesen Gleichungen folgt leicht:

$$473.\quad \operatorname{tang}\alpha x = \frac{\alpha_1(\alpha-2)^{2k}\sin 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k}\sin 4x + \alpha_3(\alpha-6)^{2k}\sin 6x + \ldots\ldots}{\alpha^{2k} + \alpha_1(\alpha-2)^{2k}\cos 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k}\cos 4x + \ldots\ldots},$$

$$474.\quad \operatorname{tang}\alpha x = -\frac{\alpha^{2k+1} + \alpha_1(\alpha-2)^{2k+1}\cos 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1}\cos 4x + \ldots\ldots}{\alpha_1(\alpha-2)^{2k+1}\sin 2x + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1}\sin 4x + \ldots\ldots},$$

immer unter der Voraussetzung, daß α positiv und x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist.

Setzt man in der Gleichung (472.) $x = 0$; so erhält man

$$475.\quad 0 = \alpha^{2k+1} + \alpha_1(\alpha-2)^{2k+1} + \alpha_2(\alpha-4)^{2k+1} + \ldots\ldots ,$$

für jedes positive α.

58. Endlich haben wir nun noch, um das in (50.) gegebene Versprechen vollständig zu erfüllen, zu zeigen, wie auch die Formeln (438.) und (439.) ohne Hülfe der imaginären Quantitäten

erhalten werden können. Betrachten wir also jetzt, unter der Voraussetzung, daß α eine positive ganze Zahl ist, die beiden Reihen

$$\cos\alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \alpha_3 \cos(\alpha-6)x + \ldots,$$
$$\sin\alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \alpha_3 \sin(\alpha-6)x + \ldots,$$

welche unter der gemachten Voraussetzung jederzeit abbrechen oder endlich sind, und daher für jedes x als convergent und als convergent bleibend zu betrachten sind, wenn man jedes Glied auf seinen absoluten Werth reducirt, eine Bemerkung, die wir hier deshalb machen, weil wir der Leichtigkeit der folgenden Entwicklung wegen auf die Glieder, mit denen die beiden Reihen abbrechen, nicht besonders Rücksicht nehmen, sondern die Reihen als in's Unendliche fortlaufend betrachten wollen. Setzen wir nun

$$f(\alpha) = \cos\alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \ldots,$$
$$\varphi(\alpha) = \sin\alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \ldots,$$

und eben so für ein beliebiges positives γ

$$f(\gamma) = \cos\gamma x - \gamma_1 \cos(\gamma-2)x + \gamma_2 \cos(\gamma-4)x - \ldots,$$
$$\varphi(\gamma) = \sin\gamma x - \gamma_1 \sin(\gamma-2)x + \gamma_2 \sin(\gamma-4)x - \ldots;$$

so erhalten wir nach bekannten, oben schon mehrmals angewandten, Sätzen aus dem Artikel Convergenz der Reihen:

$$f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \cos\alpha x\cos\gamma x - \alpha_1\cos(\alpha-2)x\cos\gamma x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x\cos\gamma x - \ldots.$$
$$- \gamma_1\cos\alpha x\cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\cos(\alpha-2)x\cos(\gamma-2)x - \ldots$$
$$+ \gamma_2\cos\alpha x\cos(\gamma-4)x - \ldots.$$
$$- \sin\alpha x\sin\gamma x + \alpha_1\sin(\alpha-2)x\sin\gamma x - \alpha_2\sin(\alpha-4)x\sin\gamma x + \ldots.$$
$$+ \gamma_1\sin\alpha x\sin(\gamma-2)x - \alpha_1\gamma_1\sin(\alpha-2)x\sin(\gamma-2)x + \ldots.$$
$$- \gamma_2\sin\alpha x\sin(\gamma-4)x + \ldots.$$
$$= \cos(\alpha+\gamma)x$$
$$- (\alpha_1+\gamma_1)\cos(\alpha+\gamma-2)x$$
$$+ (\alpha_2+\alpha_1\gamma_1+\gamma_2)\cos(\alpha+\gamma-4)x$$
$$- (\alpha_3+\alpha_2\gamma_1+\alpha_1\gamma_2+\gamma_3)\cos(\alpha+\gamma-6)x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \cos(\alpha+\gamma)x - (\alpha+\gamma)_1.\cos(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2.\cos(\alpha+\gamma-4)x$$
$$- (\alpha+\gamma)_3.\cos(\alpha+\gamma-6)x + \ldots.,$$

nach dem bekannten, oben ebenfalls schon angewandten, Satze von den Binomial-Coefficienten.

Ferner ist auf ähnliche Art

$$\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma)$$
$$= \sin\alpha x\cos\gamma x - \alpha_1\sin(\alpha-2)x\cos\gamma x + \alpha_2\sin(\alpha-4)x\cos\gamma x - \ldots.$$
$$- \gamma_1\sin\alpha x\cos(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\sin(\alpha-2)x\cos(\gamma-2)x - \ldots.$$
$$+ \gamma_2\sin\alpha x\cos(\gamma-4)x - \ldots.$$
$$+ \cos\alpha x\sin\gamma x - \alpha_1\cos(\alpha-2)x\sin\gamma x + \alpha_2\cos(\alpha-4)x\sin\gamma x - \ldots.$$
$$- \gamma_1\cos\alpha x\sin(\gamma-2)x + \alpha_1\gamma_1\cos(\alpha-2)x\sin(\gamma-2)x - \ldots.$$
$$+ \gamma_2\cos\alpha x\sin(\gamma-4)x - \ldots.$$

$$= \sin(\alpha+\gamma)x$$
$$- (\alpha_1+\gamma_1)\sin(\alpha+\gamma-2)x$$
$$+ (\alpha_2+\alpha_1\gamma_1+\gamma_2)\sin(\alpha+\gamma-4)x$$
$$- (\alpha_3+\alpha_2\gamma_1+\alpha_1\gamma_2+\gamma_3)\sin(\alpha+\gamma-6)x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \sin(\alpha+\gamma)x - (\alpha+\gamma)_1 \cdot \sin(\alpha+\gamma-2)x + (\alpha+\gamma)_2 \cdot \sin(\alpha+\gamma-4)x$$
$$- (\alpha+\gamma)_3 \cdot \sin(\alpha+\gamma)_3 \cdot \sin(\alpha+\gamma-6)x + \ldots.$$

Also ist für jedes positive ganze α und γ:

476. $f(\alpha).f(\gamma) - \varphi(\alpha).\varphi(\gamma) = f(\alpha+\gamma)$,

477. $\varphi(\alpha).f(\gamma) + f(\alpha).\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha+\gamma)$.

Auf der Stelle erhellet nun, daß

$$f(0) = 1,\ \varphi(0) = 0$$

ist. Ferner ist

$$f(1) = \cos x - \cos(-x) = \cos x - \cos x = 0,$$
$$\varphi(1) = \sin x - \sin(-x) = \sin x + \sin x = 2\sin x.$$

Setzt man nun in (476.) und (477.) $\alpha = 1,\ \gamma = 1$; so erhält man sehr leicht:

$$f(2) = -2^2 \sin x^2,\ \varphi(2) = 0.$$

Setzt man in (476.) und (477.) $\alpha = 1,\ \gamma = 2$; so ergiebt sich:

$$f(3) = 0,\ \varphi(3) = -2^3 \sin x^3.$$

Setzt man in denselben Formeln $\alpha = 1, \gamma = 3$; so erhält man:

$$f(4) = 2^4 \sin x^4,\ \varphi(4) = 0.$$

Für $\alpha = 1,\ \gamma = 4$ ergiebt sich:

$$f(5) = 0,\ \varphi(5) = 2^5 \sin x^5.$$

Für $\alpha = 1,\ \gamma = 5$ erhält man.

$$f(6) = -2^6 \sin x^6,\ \varphi(6) = 0.$$

Für $\alpha = 1,\ \gamma = 6$ ergiebt sich:

$$f(7) = 0,\ \varphi(7) = -2^7 \sin x^7.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man erhält nun hieraus leicht die folgenden allgemeinen Formeln:

Wenn die positive ganze Zahl α gerade ist; so ist

478. $f(\alpha) = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2^\alpha \sin x^\alpha,\ \varphi(\alpha) = 0.$

Wenn die positive ganze Zahl α ungerade ist; so ist

479. $f(\alpha) = 0,\ \varphi(\alpha) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot 2^\alpha \sin x^\alpha;$

oder:

Wenn die positive ganze Zahl α gerade ist; so ist

480. $(-1)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2^\alpha \sin x^\alpha$
$$= \cos\alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \ldots\ldots,$$

481. $0 = \sin\alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \ldots.$

Wenn aber die positive ganze Zahl α ungerade ist; so ist

482. $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot 2^{\alpha} \sin x^{\alpha}$

$= \sin \alpha x - \alpha_1 \sin(\alpha-2)x + \alpha_2 \sin(\alpha-4)x - \ldots,$

483. $0 = \cos \alpha x - \alpha_1 \cos(\alpha-2)x + \alpha_2 \cos(\alpha-4)x - \ldots.$

Daß die Formeln (480.) und (482.) mit den Formeln (438.) und (439.) identisch sind, oder daß sich wenigstens letztere sehr leicht aus erstern ableiten lassen würden, bedarf hier keiner weitern Erläuterung. Wir sind also hier, unserm in (50.) gegebenen Versprechen gemäß, zu den Formeln (438.) und (439.) ganz ohne Hülfe der imaginären Quantitäten gelangt, und überdies hat uns unsere Analysis noch zu den beiden neuen Resultaten (481.) und (483.) geführt.

Indem wir diesen Artikel hiermit schließen, bemerken wir nur noch, daß wir bei Bearbeitung desselben unsere Bemühung vorzüglich auch dahin gerichtet haben, die Formeln (41.) und (42.), welche als das Fundament der ganzen Goniometrie zu betrachten sind, in völliger Allgemeinheit und Strenge zu beweisen, weil unsers Erachtens ohne einen solchen völlig allgemeinen Beweis die Goniometrie einer sichern Grundlage ermangelt. Diesen Beweis haben wir in I. gegeben, und bemerken, daß auch Sarrus in den Annales de Mathématiques. T. XI. p. 323. einen völlig allgemeinen Beweis der in Rede stehenden Formeln zu geben versucht hat, mit dem aber der unsrige nicht die entfernteste Aehnlichkeit hat. Der unsrige ist möglichst rein analytisch gefaßt. Der von Sarrus, den man auch in Münchows schon erwähnter Trigonometrie (S. 85—89) findet, möchte sich mehr für einen elementaren Vortrag eignen. Einige Bemerkungen s. m. auch in Cauchy cours d' Analyse de l'école royale polytechnique. Paris. 1821. p. 433.; der in diesem Werke angedeutete elementare Beweis scheint eine weitere Entwickelung zu verdienen, aber auch zu bedürfen.

Gränzcurven, s. einhüllende Curven und Flächen (1.) i. d. Z.

Gränzflächen, s. einhüllende Curven und Flächen (11.) i. d. Z.

Größtes und Kleinstes. Wir betrachten in diesem Artikel bloß die analytischen Methoden zur Bestimmung der Maxima und Minima, welche die Differentialrechnung darbietet, indem die mehr elementaren Verfahrungsarten schon in dem entsprechenden Artikel im zweiten Theile dieses Wörterbuchs ausführlich genug betrachtet worden sind, die Darstellung der in Rede stehenden so überaus wichtigen analytischen Methoden in diesem Artikel uns aber Manches zu wünschen übrig zu lassen scheint.

I. Functionen mit einer unabhängigen veränderlichen Größe.

1. Der Kürze wegen bemerken wir hier zuvörderst ein für alle Mal, daß alle Größen, welche wir im Folgenden betrachten werden, wofern nicht ausdrücklich eine andere Bestimmung gegeben wird, reelle Größen seyn sollen. Ist nun $y = f(x)$ eine beliebige Function einer unabhängigen veränderlichen Größe, und lassen wir jetzt x selbst einen gewissen bestimmten Werth dieser veränderlichen Größe bedeuten; so sagt man, daß der entsprechende Werth $f(x)$ der Function ein Maximum oder ein Minimum sey, wenn derselbe respective größer oder kleiner als alle ihm benachbarte Werthe der Function ist. Um also zu beurtheilen, ob $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum ist, lasse man x um eine unendlich kleine positive Größe i zu- und abnehmen, wodurch $f(x)$ in $f(x+i)$ und $f(x-i)$ übergeht. Ist nun, immer für unendlich kleine Werthe von i,

$$f(x) > f(x+i),\quad f(x) > f(x-i);$$

so ist $f(x)$ ein Maximum oder ein größter Werth der gegebenen Function. Ist dagegen für unendlich kleine i

$$f(x) < f(x+i),\quad f(x) < f(x-i);$$

so ist $f(x)$ ein Minimum oder ein kleinster Werth der in Rede stehenden Function. Ist aber, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander, für unendlich kleine i

$$f(x) \gtrless f(x+i),\quad f(x) \lessgtr f(x-i);$$

so ist $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Unmittelbar geht aus dem Obigen auch hervor, daß eine Function mehrere Maxima und Minima, auch Maxima und Minima zugleich, haben kann, weil es sich immer bloß um das Verhalten der Werthe der Function zu den ihnen benachbarten Werthen derselben handelt.

2. Wenn die Function $f(x)$ für den bestimmten Werth x ihrer veränderlichen Größe nicht $= 0$, und in dem Intervall $x-i$, $x+i$, wo i eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, stetig ist; so behält dieselbe in dem in Rede stehenden unendlich kleinen Intervall stets dasselbe Vorzeichen. Dies erhellet auf der Stelle, wenn man bedenkt, daß die Function, welche in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig ist, ihr Zeichen nur ändern kann, wenn sie durch Null hindurch geht.

3. Sind $f(x)$ und $f'(x)$ zwei in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$, d. h. in der Nachbarschaft des bestimmten Werthes x der unabhängigen veränderlichen Größe, stetige Functionen; so ist nach dem Artikel Taylors Lehrsatz (8.) i. d. Z.

$$f(x-i) = f(x) - if'(x-\varrho i),$$
$$f(x+i) = f(x) + if'(x+\varrho' i),$$

wo ϱ, ϱ' zwei positive Größen bezeichnen, die beide kleiner als die Einheit sind. Ist nun $f'(x)$ nicht $= 0$, so haben nach (2.)

$$f'(x-\varrho i) \text{ und } f'(x+\varrho' i)$$

gleiche Vorzeichen, und es ist folglich offenbar, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$f(x-i) \lessgtr f(x),\ f(x+i) \gtrless f(x)\ ,$$

oder

$$f(x) \gtrless f(x-i),\ f(x) \lessgtr f(x+i)\ ;$$

also $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Soll demnach $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum seyn, so muß

$$f'(x) = 0$$

seyn. Dies vorausgesetzt, ist nach dem Artikel Taylors Lehrsatz (8.) i. d. Z., wenn auch $f''(x)$ eine in dem unendlich kleinen Intervall $x - i,\ x + i$ stetige Function ist,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x-\varrho i)\ ,$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x+\varrho' i)\ ,$$

wo ϱ, ϱ' wieder zwei positive Größen bezeichnen, welche beide kleiner als die Einheit sind. Ist nun $f''(x)$ nicht $= 0$, so haben nach (2.)

$$f''(x-\varrho i) \text{ und } f''(x+\varrho' i)$$

mit einander und mit $f''(x)$ einerlei Vorzeichen. Ist also $f''(x)$ positiv, so ist

$$f(x-i) > f(x),\ f(x+i) > f(x)\ ,$$

d. i.

$$f(x) < f(x-i),\ f(x) < f(x+i)\ ,$$

und folglich $f(x)$ ein Minimum. Ist aber $f''(x)$ negativ, so ist

$$f(x-i) < f(x),\ f(x+i) < f(x)\ ,$$

d. i.

$$f(x) > f(x-i),\ f(x) > f(x+i)\ ,$$

und folglich $f(x)$ ein Maximum. Wenn aber $f''(x) = 0$ und auch $f'''(x)$ eine in dem unendlich kleinen Intervall $x-i,\ x+i$ stetige Function ist; so ist nach dem Artikel Taylors Lehrsatz (8.) i. d. Z.

$$f(x-i) = f(x) - \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x-\varrho i)\ ,$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x+\varrho' i)\ ,$$

wo ϱ, ϱ' dieselbe Bedeutung haben, wie oben. Ist nun $f'''(x)$ nicht $= 0$, so haben nach (2.)

$$f'''(x-\varrho i) \text{ und } f'''(x+\varrho' i)$$

gleiche Vorzeichen. Also ist

$$f(x-i) \lessgtr f(x),\ f(x+i) \gtrless f(x)$$

oder

$$f(x) \gtrless f(x-i),\ f(x) \lessgtr f(x+i),$$

und folglich $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Soll also $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum seyn, so muß

$$f'''(x) = 0$$

seyn. Ist dann auch $f^{IV}(x)$ zwischen den Gränzen $x-i$, $x+i$ stetig, so ist nach dem mehrmals angeführten Artikel

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^4}{1\ldots4} f^{IV}(x-\varrho i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^4}{1\ldots4} f^{IV}(x+\varrho' i).$$

Ist nun $f^{IV}(x)$ nicht $= 0$, so haben nach (2.)

$f^{IV}(x-\varrho i)$ und $f^{IV}(x+\varrho' i)$

sowohl mit einander, als auch mit $f^{IV}(x)$, einerlei Vorzeichen. Ist also $f^{IV}(x)$ positiv, so ist

$$f(x-i) > f(x),\ f(x+i) > f(x)$$

oder

$$f(x) < f(x-i),\ f(x) < f(x+i),$$

d. i. $f(x)$ ein Minimum. Ist $f^{IV}(x)$ negativ, so ist

$$f(x-i) < f(x),\ f(x+i) < f(x)$$

oder

$$f(x) > f(x-i),\ f(x) > f(x+i),$$

d. i. $f(x)$ ein Maximum. Ist aber $f^{IV}(x) = 0$ und zugleich $f^{V}(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig; so ist, nach dem Artikel Taylors Lehrsatz (8.) i. d. Z.

$$f(x-i) = f(x) - \frac{i^5}{1\ldots5} f^{V}(x-\varrho i),$$

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^5}{1\ldots5} f^{V}(x+\varrho' i),$$

woraus wieder auf ganz ähnliche Art wie oben folgt, daß, wenn $f^{V}(x)$ nicht $= 0$ ist, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum seyn kann. Ist aber $f^{V}(x) = 0$, so ist, wenn zugleich $f^{VI}(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig ist nach dem angeführten Artikel,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^6}{1\ldots6} f^{VI}(x-\varrho i)$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^6}{1\ldots6} f^{VI}(x+\varrho' i).$$

Ist nun $f^{VI}(x)$ nicht $= 0$, so haben nach (2.)

$f^{vi}(x-\varrho i)$ und $f^{vi}(x+\varrho' i)$

sowohl mit einander, als auch mit $f^{vi}(x)$ einerlei Vorzeichen. Ist nun $f^{vi}(x)$ positiv, so ist

$$f(x-i) > f(x),\ f(x+i) > f(x);$$
$$f(x) < f(x-i),\ f(x) < f(x+i),$$

d. i. $f(x)$ ein Minimum. Ist aber $f^{vi}(x)$ negativ, so ist

$$f(x-i) < f(x),\ f(x+i) < f(x);$$
$$f(x) > f(x-i),\ f(x) > f(x+i),$$

d. i. $f(x)$ ein Maximum. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, erhellet aus dem Vorhergehenden mit vollkommener Deutlichkeit.

Faßt man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich der folgende allgemeine Lehrsatz:

Wenn für den bestimmten Werth x der unabhängigen veränderlichen Größe die Functionen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

sämmtlich verschwinden, und, so wie $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$, in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig sind, aber $f^{(n)}(x)$ nicht $=0$ ist; so ist

I. wenn n eine ungerade Zahl ist, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Ist aber

II. n eine gerade Zahl, so ist $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem $f^{(n)}(x)$ eine negative oder eine positive Größe ist.

Ist z. B.

$$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$

so ist

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x},$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x},$$
$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x},$$
$$f^{iv}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}.$$

Für $x=0$ verschwinden

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$$

sämmtlich; dagegen ist

$$f^{iv}(0) = 1 + 2 + 1 = 4,$$

d. i. eine positive Größe. Folglich ist

$$f(0) = 1 + 2 + 1 = 4$$

ein Minimum der gegebenen Function, da im vorliegenden Falle an der Stetigkeit der Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{iv}(x)$$

in dem unendlich kleinen Intervall $-i$, $+i$ nicht zu zweifeln ist.

4. Im Allgemeinen bedient man sich des vorhergehenden allgemeinen Lehrsatzes zur Auffindung größter und kleinster Werthe

einer gegebenen Function auf folgende Art. Ist $f(x)$ wieder die gegebene Function, so entwickelt man den ersten Differentialquotienten $f'(x)$, setzt

$$f'(x) = 0,$$

und sucht die reellen Wurzeln dieser Gleichung, sofern es deren giebt. Ist nun ξ eine reelle Wurzel dieser Gleichung, so setzt man dieselbe für x auch in die folgenden Differentialquotienten

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ \ldots,$$

wodurch man

$$f''(\xi),\ f'''(\xi),\ f^{IV}(\xi),\ f^{V}(\xi),\ \ldots..$$

erhält. In dieser Reihe bleibt man jederzeit bei dem ersten nicht verschwindenden Gliede, wofern es ein solches Glied giebt, stehen. Ist nun $f^{(n)}(\xi)$ dieses erste nicht verschwindende Glied; so ist

I. wenn n eine ungerade Zahl ist, $f(\xi)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Ist aber

II. n eine gerade Zahl, so ist $f(\xi)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem $f^{(n)}(\xi)$ eine negative oder eine positive Größe ist.

Alles dieses gilt aber bloß unter der Voraussetzung, daß die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots.\ f^{(n)}(x)$$

in dem unendlich kleinen Intervall $\xi - i$, $\xi + i$ sämmtlich stetig sind, wovon man sich also in jedem einzelnen Falle besonders versichern muß. Häufig leuchtet indeß die Stetigkeit der obigen Functionen in dem angegebenen unendlich kleinen Intervall auf der Stelle von selbst ein, wo man dann der Kürze wegen eine besondere Untersuchung in dieser Beziehung nicht weiter anstellt.

5. Soll man z. B. unter allen in eine Kugel mit dem gegebenen Halbmesser r beschriebenen geraden Cylindern denjenigen finden, welcher entweder die größte Seitenfläche oder den größten körperlichen Inhalt hat; so setze man in beiden Fällen die Höhe des gesuchten Cylinders $= 2x$, die Seitenfläche $= s$, den körperlichen Inhalt $= v$. Dann ist, wie leicht erhellet, der Halbmesser der Grundfläche $= \sqrt{r^2 - x^2}$, und folglich

$$s = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2},\quad v = 2\pi x(r^2 - x^2).$$

Entwickelt man die ersten Differentialquotienten, so erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 4\pi\,\frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\pi(r^2 - 3x^2).$$

Setzt man nun zuerst

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

so wird

$$r^2 - 2x^2 = 0,\quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man dagegen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 ,$$

so wird

$$r^2 - 3x^2 = 0, \quad x = \frac{r}{\sqrt{3}} .$$

Entwickelt man nun noch die zweiten Differentialquotienten, so wird

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 4\pi x \frac{2x^2 - 3r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -12\pi x .$$

Für $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ wird

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -16\pi .$$

Für $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ wird

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{12\pi r}{\sqrt{3}} .$$

Da nun keiner dieser beiden Werthe verschwindet, und beide negativ sind, so hat für $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ der eingeschriebene gerade Cylinder die größte Seitenfläche, für $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ dagegen den größten körperlichen Inhalt. Der Inhalt der Seitenfläche des eingeschriebenen Cylinders, welcher die größte Seitenfläche hat, findet sich nach dem Vorhergehenden leicht $= 2r^2\pi$, d. h. doppelt so groß als der Inhalt eines größten Kreises der Kugel. Der körperliche Inhalt des eingeschriebenen Cylinders, welcher den größten körperlichen Inhalt hat, ist $= 4\pi \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3$, d. h. drei Mal so groß, wie der Inhalt einer Kugel, welche die Höhe dieses Cylinders zum Durchmesser hat.

6. Um zu finden, ob es für die Function

$$f(x) = x^a e^{-x} ,$$

wo a eine positive Größe seyn soll, ein Maximum oder ein Minimum giebt, entwickele man den ersten Differentialquotienten

$$f'(x) = x^a e^{-x} \left(\frac{a}{x} - 1\right) .$$

Dieser Differentialquotient verschwindet, wie man sogleich übersieht, für $x = a$. Nun entwickele man den zweiten Differentialquotienten, welchen man am leichtesten findet, wenn man

$$f'(x) = \left(\frac{a}{x} - 1\right) f(x)$$

setzt. Es ergiebt sich nämlich

$$f''(x) = \left(\frac{a}{x} - 1\right) f'(x) - \frac{a}{x^2} f(x)$$
$$= \left(\frac{a}{x} - 1\right)^2 f(x) - \frac{a}{x^2} f(x) .$$

Also ist für $x = a$

$$f''(a) = -\frac{1}{a} f(a) = -a^{a-1} e^{-a} ,$$

und unsere Function wird also, da diese Größe negativ ist, weil wir a als positiv angenommen haben, für $x = a$ ein Maximum.

7. Sey ferner

$$f(x) = \frac{A^x}{x} ,$$

wo A größer als die Einheit seyn soll; so ist, wenn wir die Logarithmen in einem Systeme, dessen Basis A ist, durch log bezeichnen:

$$f'(x) = \frac{A^x}{x}\left\{\frac{1}{\log e} - \frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{1}{\log e} - \frac{1}{x}\right\} f(x) .$$

Für $x = \log e$ verschwindet also $f'(x)$ offenbar. Für den zweiten Differentialquotienten erhalten wir

$$f''(x) = \left\{\frac{1}{\log e} - \frac{1}{x}\right\} f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x)$$
$$= \left\{\frac{1}{\log e} - \frac{1}{x}\right\}^2 f(x) + \frac{1}{x^2} f(x) .$$

Für $x = \log e$ ist also

$$f''(\log e) = \frac{1}{(\log e)^2} \cdot \frac{A^{\log e}}{\log e} = \frac{e}{(\log e)^3} ,$$

d. i. eine positive Größe, so daß also für $x = \log e$ unsere Function ein Minimum wird.

Um noch ein zusammengesetzteres Beispiel anzuführen, so sey

$$f(x) = 6x^7 - 70x^6 + 336x^5 - 861x^4 + 1274x^3 - 1092x^2 + 504x - 27$$

die gegebene Function. Durch Differentiation erhält man:

$$f'(x) = 42(x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 82x^3 + 91x^2 - 52x + 12)$$
$$= 42(x-1)^3(x-2)^2(x-3) ,$$
$$f''(x) = 84(3x^5 - 25x^4 + 80x^3 - 123x^2 + 91x - 26)$$
$$= 84(x-1)^2(x-2)(3x^2 - 13x + 13) ,$$
$$f'''(x) = 84(15x^4 - 100x^3 + 240x^2 - 246x + 91)$$
$$= 84(x-1)(15x^3 - 85x^2 + 155x - 91) ,$$
$$f^{IV}(x) = 168(30x^3 - 150x^2 + 240x - 123) .$$

Weiter bedarf man in diesem Falle der Differentialquotienten nicht, wie wir gleich nachher sehen werden. Der erste Differentialquotient verschwindet für

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3 .$$

Der erste Differentialquotient, welcher für $x = 1$ nicht verschwindet, ist der vierte, und es ist für $x = 1$

$$f^{IV}(1) = -504,$$

d. i. negativ. Daher ist nach (3.)

$$f(1) = 70$$

ein Maximum.

Der erste Differentialquotient, welcher für $x = 2$ nicht verschwindet, ist der dritte. Daher ist nach (3.) $f(2)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum.

Der erste Differentialquotient, welcher für $x = 3$ nicht verschwindet, ist der zweite, und es ist

$$f''(3) = 326,$$

d. i. positiv. Daher ist nach (3.)

$$f(3) = 54$$

ein Minimum.

Wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat, geht hieraus mit hinlänglicher Deutlichkeit hervor.

8. Bei gebrochenen Functionen kann man sich die Untersuchung über die Maxima und Minima auf folgende Art erleichtern, wobei wir hier jedoch bloß den Fall betrachten wollen, wenn der zweite Differentialquotient der erste Differentialquotient ist, welcher für die Werthe von x, für welche der erste Differentialquotient null wird, nicht verschwindet. Die gegebene Function sey überhaupt

$$y = \frac{p}{q},$$

wo p und q beide Functionen von x sind. Bekanntlich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und es ist folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

wenn

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

ist, weshalb man die der letzten Gleichung genügenden Werthe von x bestimmen wird. Entwickeln wir nun ferner den zweiten Differentialquotienten, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q^2\left\{q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right\} - 2q\left\{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}\right\}\frac{\partial q}{\partial x}}{q^4}.$$

Da nun für die vorher gefundenen Werthe von x

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

ist; so ist für diese Werthe von x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}{q^2}.$$

Nach dem Obigen kommt es bloß darauf an, ob der zweite Differentialquotient für die in Rede stehenden Werthe von x positiv oder negativ ist. Daher braucht man, weil q^2 immer positiv ist, diese Werthe von x bloß in die Größe

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

zu setzen, und die Vorzeichen der entsprechenden Werthe derselben zu untersuchen.

Für die Function

$$y = \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 10x + 9}$$

ist z. B.

$$p = x^2 - 10x + 9,\quad q = x^2 + 10x + 9;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2x - 10,\quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2x + 10;$$

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} = 20(x^2 - 9).$$

Setzt man nun

$$x^2 - 9 = 0,$$

so erhält man $x = \pm 3$. Ferner ist

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2;$$

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2(x^2 + 10x + 9) - 2(x^2 - 10x + 9) = 40x.$$

Für $x = \pm 3$ ist also

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \pm 120,$$

und folglich unsere Function für $x = +3$ ein Minimum, für $x = -3$ dagegen ein Maximum. Für $x = +3$ wird $y = -\frac{1}{7}$, für $x = -3$ ist dagegen $y = -4$.

9. Die Werthe von x, für welche eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = f(x)$ Statt findet, muß man besonders aufsuchen, und in jedem einzelnen Falle bestimmen, ob einem solchen Werthe von x, wie es sich oft trifft, vielleicht ein Maximum oder ein Minimum der Function entspricht. Ist z. B.

$$y = \Gamma x;$$

so findet, wenn man sich vorstellt, daß die unabhängige veränderliche Größe x von $+\infty$ bis $-\infty$ stetig abnimmt, bei dem Uebergange derselben vom Positiven durch Null zum Negativen offenbar eine Unterbrechung der Stetigkeit der gegebenen Function

Statt, weil dieselbe dann vom Reellen zum Imaginären übergeht. Für $x = 0$ ist $y = 0$. Für ein jedes positive x, welches nicht $= 0$ ist, ist $y > 0$, und man sieht leicht, daß überhaupt, wenn x von Null an stetig wächst, auch y von Null an fortwährend stetig wachsen wird. Daher kann der dem Werthe $x = 0$ der unabhängigen veränderlichen Größe entsprechende Werth $y = 0$ der Function offenbar als ein Minimum derselben betrachtet werden.

Auch für die Function

$$y = \frac{1}{lx}$$

findet, wenn $x = 0$ wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt. Sind nun x, x′ beide positiv, aber beide kleiner als die Einheit, und $x' > x$; so ist, weil

$$x = e^{lx},\ x' = e^{lx'}$$

ist, auch

$$e^{lx'} > e^{lx}.$$

lx und lx′ sind nach der Voraussetzung beide negativ, $-lx$ und $-lx'$ also beide positiv. Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{1}{e^{lx'}} < \frac{1}{e^{lx}},\ \text{d. i. } e^{-lx'} < e^{-lx},$$

und folglich, weil $-lx$ und $-lx'$ beide positiv sind,

$$-lx' < -lx;$$

folglich

$$-\frac{1}{lx'} > -\frac{1}{lx};$$

also, da diese Größen beide positiv, folglich

$$\frac{1}{lx'} \text{ und } \frac{1}{lx}$$

beide negativ sind,

$$\frac{1}{lx'} < \frac{1}{lx}.$$

Hieraus erhellet, daß man den dem Werthe $x = 0$ entsprechenden Werth der gegebenen Function als ein Maximum derselben zu betrachten hat.

Auch für $x = 1$ findet eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function

$$y = \frac{1}{lx}$$

Statt, und man sieht leicht, daß man auch den Werth dieser Function, welcher dem in Rede stehenden Werthe von x entspricht, und, wie sogleich in die Augen fällt, $= \infty$ ist, als ein Maximum der Function zu betrachten hat.

Für $x = \infty$ wird dagegen die Function

$$y = \frac{1}{lx}$$

offenbar ein Minimum.

10. Es möge jetzt wieder x irgend einen beliebigen, aber bestimmten, Werth der unabhängigen veränderlichen Größe, und f(x), wie gewöhnlich, der entsprechende Werth der gegebenen Function seyn. Will man nun beurtheilen, ob f(x) vielleicht ein Maximum oder Minimum der in Rede stehenden Function ist; so kann man auf folgende Art verfahren. Man lasse x sich um die der Null unendlich nahe kommende Größe Δx verändern; so ist, wenn $\Delta f(x)$, wie gewöhnlich, die entsprechende Aenderung der Function bezeichnet,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Delta x .$$

Ist nun, immer für der Null unendlich nahe kommende Δx,

I. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ positiv oder negativ, jenachdem respective Δx negativ oder positiv ist; so ist offenbar f(x) ein Maximum. Ist aber

II. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ positiv oder negativ, jenachdem respective Δx positiv oder negativ ist; so ist f(x) ein Minimum.

Dies kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Größen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets ungleiche Zeichen haben; so ist f(x) ein Maximum.

II. Wenn aber für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Größen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets gleiche Vorzeichen haben; so ist f(x) ein Minimum.

Nach dem Begriffe des Differentialquotienten nähern die Größen

$$f'(x + \Delta x) \text{ und } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

sich einander desto mehr, je mehr Δx sich der Null nähert, und können einander beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt. Daher werden für der Null unendlich nahe kommende Δx diese Größen offenbar gleiche Vorzeichen haben, so daß man also die beiden obigen Sätze auch auf folgende Art ausdrücken kann:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Größen Δx und $f'(x + \Delta x)$ stets ungleiche Vorzeichen haben; so ist f(x) ein Maximum.

II. Wenn aber für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Größen Δx und $f'(x+\Delta x)$ stets gleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Lassen wir, wie schon früher öfters, i wieder eine unendlich kleine positive Größe bezeichnen; so können diese beiden Sätze auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

I. Wenn für unendlich kleine positive i die Größe $f'(x-i)$ positiv, die Größe $f'(x+i)$ dagegen negativ ist; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn aber für unendlich kleine positive i die Größe $f'(x-i)$ negativ, die Größe $f'(x+i)$ dagegen positiv ist; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Auf diese Art kann man also immer beurtheilen, ob der dem gegebenen Werthe x der unabhängigen veränderlichen Größe entsprechende Werth $f(x)$ der Function ein Maximum oder ein Minimum, oder keines von beiden ist. Hätten nämlich für unendlich kleine positive i die Größen $f'(x-i)$ und $f'(x+i)$ gleiche Vorzeichen; so würde $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum seyn.

Da das Vorhergehende, wie leicht erhellet, auch gültig bleibt, wenn für den Werth x der unabhängigen veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit der ersten derivirten Function der gegebenen Function Statt findet; so bedient man sich der vorhergehenden Methode vorzüglich auch, um zu beurtheilen, ob den Werthen der unabhängigen veränderlichen Größe, für welche die Stetigkeit der ersten derivirten Function der gegebenen Function unterbrochen wird, Maxima oder Minima der gegebenen Function entsprechen. Die Werthe von x, für welche eine Unterbrechung der Stetigkeit der ersten derivirten Function Statt findet, namentlich die Werthe von x, für welche

$$f'(x) = \pm\infty \text{ oder } \frac{1}{f'(x)} = 0$$

ist, werden daher auch immer besonders aufgesucht, und die Beurtheilung, ob Maxima oder Minima der gegebenen Function Statt finden, auf die obige Weise angestellt, wie wir jetzt durch ein Paar Beispiele erläutern wollen.

Ist z. B. die Function

$$y = f(x) = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

gegeben; so ist

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}c(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Für $x = a$ wird dieser Ausdruck unendlich. Da nun

$$f'(a-i) = \tfrac{2}{3}c(-i)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2c}{3\sqrt[3]{i}},$$

$$f'(a+i) = \tfrac{2}{3}c(+i)^{-\frac{1}{3}} = +\frac{2c}{3\sqrt[3]{i}}$$

ist; so ist

I. wenn c negativ ist, $f'(a-i)$ positiv, $f'(a+i)$ dagegen negativ, folglich $f(a)$ ein Maximum. Ist aber

II. c positiv, so ist $f'(a-i)$ negativ, $f'(a+i)$ dagegen positiv, also $f(a)$ ein Minimum.

Ist die gegebene Function

$$y = f(x) = b + (x-a)^{\frac{5}{3}};$$

so ist

$$f'(x) = \tfrac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man diese derivirte Function $= 0$ und bestimmt demgemäß x, so erhält man $x = a$. Entwickelt man nun noch die zweite derivirte Function oder den zweiten Differentialquotienten; so erhält man

$$f''(x) = \tfrac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Für $x = a$ wird dieser zweite Differentialquotient unendlich, und es läßt sich also wegen Unterbrechung der Stetigkeit nicht mittelst desselben entscheiden, ob $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum ist. Wir müssen folglich in diesem Falle unsere obige Regel anwenden. Nach dem Vorhergehenden ist nun

$$f'(a-i) = \tfrac{5}{3}(-i)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{i^2},$$

$$f'(a+i) = \tfrac{5}{3}(+i)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{i^2}.$$

so daß also diese beiden Größen einerlei Vorzeichen haben, und nach dem Obigen folglich weder ein Maximum, noch ein Minimum, Statt findet.

Ist dagegen

$$y = f(x) = b + (x-a)^{\frac{4}{3}}$$

die gegebene Function, so ist

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}(x-a)^{\frac{1}{3}},$$

Diese Größe verschwindet für $x = a$. Der zweite Differentialquotient ist

$$f''(x) = \tfrac{4}{9}(x-a)^{-\frac{2}{3}},$$

und wird also für $x = a$ unendlich. Da nun

$$f'(a-i) = \tfrac{4}{3}(-i)^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$

$$f'(a+i) = \tfrac{4}{3}(+i)^{\frac{1}{3}} = +\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$

die erste dieser beiden Größen also negativ, die zweite positiv ist, so ist nach dem Obigen $f(a)$ ein Minimum.

Für

$$y = f(x) = b - (x - a)^{\frac{4}{3}}$$

ist

$$f'(x) = -\tfrac{4}{3}(x - a)^{\frac{1}{3}}.$$

Also ist

$$f'(a - i) = -\tfrac{4}{3}(-i)^{\frac{1}{3}} = +\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$

$$f'(a + i) = -\tfrac{4}{3}(+i)^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{i},$$

und folglich f(a) ein Maximum.

II. Functionen mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Größen.

11. Wenn ein gewisser bestimmter Werth der Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$

der von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z, v, ... so beschaffen ist, daß derselbe entweder größer oder kleiner als alle ihm benachbarte Werthe dieser Function, d. h. größer oder kleiner wie alle diejenigen Werthe ist, welche dieselbe erhält, wenn man alle von einander unabhängige veränderliche Größen sich um der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Größen verändern läßt; so heißt der in Rede stehende Werth der gegebenen Function im ersten Falle ein Maximum, im zweiten ein Minimum.

Die Lehre von den Maximis und Minimis der Functionen mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Größen läßt sich durch die folgende einfache Betrachtung auf die Lehre von den Maximis und Minimis der Functionen mit einer veränderlichen Größe zurückführen. Man kann sich nämlich vorstellen, daß alle veränderliche Größen x, y, z, v, ... der Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$

von einer beliebigen ganz unbestimmt bleibenden veränderlichen Größe, die wir im Folgenden immer durch s bezeichnen wollen, abhängen, und daß alle Veränderungen der Größen x, y, z, v, ... durch eine Veränderung der Größe s herbeigeführt werden. Scheint es nun auch, als wenn auf diese Weise die Größen x, y, z, v, ... selbst in eine gegenseitige Abhängigkeit von einander gesetzt würden; so ist dies doch, wie leicht erhellet, durchaus nicht der Fall, wenn man nur die Art der Abhängigkeit einer jeden der Größen x, y, z, v, ... von der Größe s ganz unbestimmt läßt, oder, was dasselbe ist, die Größen x, y, z, v, ... als ganz unbestimmte Functionen von s betrachtet. Der Kürze wegen wollen wir in der Folge die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \ldots,$$

welche nach dem eben Gesagten ganz unbestimmte Größen sind,

bloß durch δx, δy, δz, δv, ... bezeichnen. Alle Differentialquotienten, die von u in Bezug auf x, y, z, v, ... genommen sind, sind partielle Differentialquotienten. Auch wollen wir immer annehmen, daß alle vorkommenden Größen reelle endliche völlig bestimmte Werthe haben, oder daß nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt findet.

12. Zuerst betrachten wir bloß die Function

$$u = f(x, y)$$

mit den zwei von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y. Soll u für einen gewissen bestimmten Werth der Größe s, den wir der Kürze wegen durch s selbst bezeichnen wollen, ein Maximum oder ein Minimum seyn; so muß bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

seyn. Ist dies nicht der Fall, so kann auch weder ein Maximum, noch ein Minimum, Statt finden. Nun ist aber nach dem Artikel Differentialrechnung (47.) i. d. Z. bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y ,$$

und es muß also, wenn überhaupt ein Maximum oder ein Minimum Statt finden soll,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y = 0$$

seyn. Da aber die Art der Abhängigkeit der Größen x, y von s ganz unbestimmt bleiben soll, also δx und δy ganz unbestimmte Größen sind, und die obige Gleichung folglich für jedes ganz beliebige δx und δy gelten muß; so muß, wenn überhaupt ein Maximum oder ein Minimum soll Statt finden können, abgesondert

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

seyn. Sind diese beiden Gleichungen nicht zugleich erfüllt, so findet weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt. Wirklich wird aber, wenn diese Gleichungen zugleich erfüllt sind, ein Maximum oder ein Minimum dann Statt finden, wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ nicht $= 0$ und respective negativ oder positiv ist. Mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

erhält man aber

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\delta x \delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta y^2 .$$

Diese Größe wird wegen der völligen Unbestimmtheit von δx, δy, δz bloß dann $= 0$, wenn zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Soll also die in Rede stehende Größe nicht $= 0$ seyn, so darf nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

seyn. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird ferner ein Maximum oder ein Minimum nur dann Statt finden, wenn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \delta x \delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta y^2$$

für alle δx, δy respective negativ oder positiv ist, für alle δx, δy also auch einerlei Vorzeichen behält. Letzteres wird der Fall seyn, wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\delta x}{\delta y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

imaginär sind, wie aus bekannten einfachen Sätzen von den Gleichungen erhellet. Aus vorstehender Gleichung erhält man aber

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}},$$

und die in Rede stehende Größe wird daher für alle δx, δy einerlei Vorzeichen behalten, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist. Ist dies aber der Fall, so haben offenbar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

einerlei Vorzeichen. Auch ist, wenn die obige Bedingung erfüllt ist, zugleich auch die Bedingung erfüllt, daß nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist.

Da nun, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist, die Größe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \delta x \delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta y^2$$

für alle δx und δy einerlei Vorzeichen hat; so sieht man, wenn man $\delta x = 0$ setzt, daß diese Größe immer mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta y^2,$$

d. i. mit $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, also mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

einerlei Vorzeichen hat, folglich positiv oder negativ ist, jenachdem die beiden letztern Differentialquotienten respective positiv oder negativ sind.

Nimmt man nun alles Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich folgender Satz:

Wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist; so ist die Function

$$u = f(x, y)$$

ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide negativ oder beide positiv sind.

Ist z. B.

$$u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F;$$

so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2C, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2B.$$

Aus den Gleichungen

$$Ax + By + D = 0, \quad Bx + Cy + E = 0$$

erhält man:

$$x = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \quad y = \frac{BD - AE}{AC - B^2}.$$

Für diese Werthe von x und y ist nun u ein Maximum, wenn

$$A < 0, \quad B^2 - AC < 0,$$

ein Minimum dagegen, wenn

$$A > 0, \quad B^2 - AC < 0$$

ist.

Soll man die gegebene Zahl a auf eine solche Art in drei Theile theilen, daß deren Product ein Maximum wird; so bezeichne man zwei dieser Theile durch x, y, den dritten also durch $a - x - y$. Es soll nun

$$u = xy(a - x - y)$$

ein Maximum werden. Für die Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a-x-y) - xy = ay - 2xy - y^2 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a-x-y) - xy = ax - 2xy - x^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2y - 2x .$$

Zur Bestimmung der x und y, für welche ein Maximum oder Minimum von u Statt finden kann, hat man:

$$ay - 2xy - y^2 = 0 ,$$

$$ax - 2xy - x^2 = 0 ,$$

d. i.

$$a - 2x - y = 0, \quad a - 2y - x = 0 .$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen x und y; so ergiebt sich

$$x = y = \tfrac{1}{3}a .$$

Für diesen gemeinschaftlichen Werth von x und y ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\tfrac{2}{3}a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\tfrac{1}{3}a .$$

Also sind die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide negativ. Auch ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0 ,$$

für $x = y = \frac{1}{3}a$. Folglich ist u für $x = y = \frac{1}{3}a$ ein Maximum. Der dritte Theil ist $a - x - y = \frac{1}{3}a$, so daß also, wenn das Product der drei Theile ein Maximum seyn soll, diese drei Theile einander gleich seyn müssen.

Bemerkt kann hierbei noch werden, daß die beiden Gleichungen

$$ay - 2xy - y^2 = 0,$$

$$ax - 2xy - x^2 = 0$$

auch erfüllt werden, wenn man $x = y = 0$ setzt. Dann wird das Product $u = 0$, also offenbar ein Minimum.

Auf diese Aufgabe läßt sich die folgende zurückführen: Unter allen Dreiecken, deren Umfang eine gegebene Größe ist, dasjenige zu finden, welches den größten Flächeninhalt hat. Setzen wir den gegebenen Umfang $= s$, den Flächeninhalt, welcher ein Maximum werden soll, $= u$, und bezeichnen die drei Seiten durch x, y, z; so ist bekanntlich

$$u^2 = \tfrac{1}{2}s(\tfrac{1}{2}s - x)(\tfrac{1}{2}s - y)(\tfrac{1}{2}s - z) .$$

Da nun s eine gegebene constante Größe ist, so müssen x, y, z so bestimmt werden, daß das Product

$$(\tfrac{1}{2}s - x)(\tfrac{1}{2}s - y)(\tfrac{1}{2}s - z)$$

ein Maximum wird. Die Summe der drei Factoren dieses Products ist

$$\tfrac{3}{2}s - (x + y + z) = \tfrac{3}{2}s - s = \tfrac{1}{2}s,$$

d. i. eine gegebene Größe. Man muß also die gegebene Größe $\frac{1}{2}s$ in drei Theile theilen, deren Product ein Maximum ist, und hat folglich nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{2}s - x = \tfrac{1}{6}s,$$
$$\tfrac{1}{2}s - y = \tfrac{1}{6}s,$$
$$\tfrac{1}{2}s - z = \tfrac{1}{6}s.$$

woraus

$$x = y = z = \tfrac{1}{3}s$$

folgt. Die drei Seiten des gesuchten Dreiecks müssen folglich einander gleich, oder dieses Dreieck ein gleichseitiges seyn. Dies giebt den folgenden Satz:

Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt,

ein Satz, der bekanntlich auch ohne große Schwierigkeit auf elementarem Wege bewiesen werden kann.

Wenn nun aber die Größen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

zugleich verschwinden; so erhält man leicht

$$\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\delta x^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\delta x^2 \delta y + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\delta x \delta y^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\delta y^3.$$

Bekanntlich kann bloß dann ein Maximum oder ein Minimum Statt finden, wenn diese Größe für jedes δx und δy null, d. h. wenn zugleich

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$$

ist. Ist dies der Fall, so erhält man

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} =$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\delta x^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}\delta x^3 \delta y + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\delta x^2 \delta y^2 + 4\frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3}\delta x \delta y^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta y^4$$

und es wird nun ein Maximum oder ein Minimum Statt finden, wenn diese Größe nicht $= 0$, und für jedes δx und δy respective negativ oder positiv ist, also auch für jedes δx und δy einerlei Vorzeichen behält. Letzteres wird dann Statt finden, wenn alle Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^3 + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}\cdot\frac{\delta x}{\delta y} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

imaginär sind, eine Bedingung, die sich auf keinen einfachen analytischen Ausdruck bringen läßt. Es genügt uns, hier den Weg angedeutet zu haben, auf welchem man auf die obige Art weiter fortschreiten kann.

13. Bei Functionen mit drei von einander unabhängigen veränderlichen Größen kann man auf eine ganz ähnliche Art wie vorher verfahren. Ist nämlich

$$u = f(x, y, z)$$

eine beliebige Function der drei von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z; so muß, wenn überhaupt ein Maximum oder ein Minimum Statt finden soll, für jedes δx, δy, δz

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z = 0,$$

d. h. zugleich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

seyn. Wirklich wird aber, wenn diese drei Gleichungen erfüllt sind, ein Maximum oder Minimum jederzeit dann Statt finden, wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ nicht $= 0$ und respective negativ oder positiv ist. Mit Berücksichtigung der drei obigen Gleichungen ist aber

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\delta x \delta y$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\delta x \delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\delta y \delta z,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen immer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = c;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \beta, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \gamma$$

setzen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = a\delta x^2 + b\delta y^2 + c\delta z^2 + 2\alpha\delta x \delta y + 2\beta\delta x \delta z + 2\gamma\delta y \delta z,$$

eine Größe, welche wegen der Unbestimmtheit von δx, δy, δz nur dann nicht $= 0$ wird, wenn nicht zugleich

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \delta = 0$$

ist. Behält obige Größe für jedes δx, δy, δz einerlei Vorzeichen; so findet ein Maximum oder ein Minimum Statt, jenachdem dieselbe immer negativ oder immer positiv ist. Die in Rede stehende Größe behält aber, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{\delta x}{\delta z} = p, \quad \frac{\delta y}{\delta z} = q$$

setzen, für jedes δx, δy, δz einerlei Vorzeichen, wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$ap^2 + 2(\alpha q + \beta)p + bq^2 + 2\gamma q + c = 0,$$

indem man dieselbe nach p auflöst, für jedes q imaginär sind, d. h., wie man leicht findet, wenn für jedes q

$$(\alpha^2 - ab)q^2 + 2(\alpha\beta - a\gamma)q + \beta^2 - ac < 0$$

ist. Ist nun aber

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0,$$

so hat die obige Größe nach (12.) mit den beiden Größen

$$\alpha^2 - ab, \quad \beta^2 - ac,$$

welche unter der obigen Voraussetzung offenbar entweder beide positiv oder beide negativ sind, einerlei Vorzeichen. Ist also

$$\alpha^2 - ab < 0$$

und

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0;$$

so ist für jedes q

$$(\alpha^2 - ab)q^2 + 2(\alpha\beta - a\gamma)q + \beta^2 - ac < 0,$$

und die Größe

$$a\delta x^2 + b\delta y^2 + c\delta z^2 + 2\alpha\delta x\delta y + 2\beta\delta x\delta z + 2\gamma\delta y\delta z$$

hat für alle δx, δy, δz einerlei Vorzeichen.

Aus den beiden Bedingungen

$$\alpha^2 - ab < 0,$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

folgt, daß auch

$$\beta^2 - ac < 0$$

ist, und aus

$$\alpha^2 - ab < 0, \ \beta^2 - ac < 0$$

ergiebt sich, daß sowohl a und b, als auch a und c, daß also die drei Größen a, b, c einerlei Vorzeichen haben. Aus der Bedingung

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

folgt ferner

$$-2a\alpha\beta\gamma + a^2\gamma^2 + ab\beta^2 + ac\alpha^2 - a^2bc < 0,$$

oder

$$a(-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc) < 0.$$

Weil nun a und b einerlei Vorzeichen haben, so ist auch

$$b(-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc) < 0$$

oder

$$\alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\gamma b\beta + b^2\beta^2 - (\alpha^2 - ab)\gamma^2 + (\alpha^2 - ab)bc < 0,$$

d. i.

$$(a\gamma - b\beta)^2 - (a^2 - ab)(\gamma^2 - bc) < 0\,,$$

so daß also

$$a^2 - ab \text{ und } \gamma^2 - bc$$

gleiche Vorzeichen haben, d. i. auch

$$\gamma^2 - bc < 0$$

ist.

Weil a und c gleiche Vorzeichen haben, so ist nach dem Vorhergehenden auch

$$c(-2a\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + ca^2 - abc) < 0$$

oder

$$\beta^2\gamma^2 - 2\beta\gamma ca + c^2a^2 - (\beta^2 - ac)\gamma^2 + (\beta^2 - ac)bc < 0\,,$$

d. i.

$$(\beta\gamma - ca)^2 - (\beta^2 - ac)(\gamma^2 - bc) < 0\,.$$

Hieraus sieht man, daß, wenn

$$a^2 - ab < 0\,,$$

$$(a\beta - a\gamma)^2 - (a^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

ist, immer auch

$$\beta^2 - ac < 0,\ \gamma^2 - bc < 0\,;$$

$$(a\gamma - b\beta)^2 - (a^2 - ab)(\gamma^2 - bc) < 0\,,$$

$$(\beta\gamma - ca)^2 - (\beta^2 - ac)(\gamma^2 - bc) < 0$$

ist, und a, b, c gleiche Vorzeichen haben.

Da nun, wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, die Größe

$$a\delta x^2 + b\delta y^2 + c\delta z^2 + 2a\delta x\delta y + 2\beta\delta x\delta z + 2\gamma\delta y\delta z$$

für alle δx, δy, δz einerlei Vorzeichen hat; so überzeugt man sich, wenn man nur $\delta x = \delta y = 0$ setzt, auf der Stelle, daß diese Größe immer mit $c\delta z^2$, d. i. mit c, also, weil a, b, c gleiche Vorzeichen haben, für jedes δx, δy, δz mit a, b, c einerlei Vorzeichen hat, folglich positiv oder negativ ist, jenachdem respective a, b, c positiv oder negativ sind.

Nimmt man nun alles Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich, indem a, b, c, α, β, γ immer ihre obige Bedeutung behalten, folgender Satz:

Wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

und

$$a^2 - ab < 0\,,$$

$$(a\beta - a\gamma)^2 - (a^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

ist, so haben a, b, c einerlei Vorzeichen, und die Function

$$u = f(x, y, z)$$

ist ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die

drei Größen a, b, c respective negativ oder positiv sind.

Uebrigens erhellet aus dem Vorhergehenden auch, daß, wenn die beiden Bedingungen

$$a^2 - ab < 0,$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

erfüllt sind, jederzeit die sechs Bedingungen

$$\alpha^2 - ab < 0,\ \beta^2 - ca < 0,\ \gamma^2 - bc < 0;$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ca) < 0,$$
$$(\gamma\alpha - b\beta)^2 - (\gamma^2 - bc)(\alpha^2 - ab) < 0,$$
$$(\beta\gamma - c\alpha)^2 - (\beta^2 - ca)(\gamma^2 - bc) < 0$$

zugleich erfüllt sind.

Obigen Satz kann man auch noch auf einen andern Ausdruck bringen. Wenn nämlich $\alpha^2 - ab < 0$ ist, so kann offenbar a nicht $= 0$ seyn. Wenn dann auch die Größe

$$-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc$$

oder

$$a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma$$

nicht $= 0$ ist, und a mit dieser Größe entgegengesetztes Vorzeichen hat; so ist jederzeit

$$a(-2\alpha\beta\gamma + a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc) < 0,$$

oder, wie aus dem Obigen erhellet,

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0,$$

und die beiden Bedingungen

$$\alpha^2 - ab < 0,$$
$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) < 0$$

sind folglich erfüllt.

Wenn also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

und $\alpha^2 - ab < 0$ ist, die Größe a aber mit der nicht verschwindenden Größe

$$a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma$$

entgegengesetztes Vorzeichen hat; so haben a, b, c jederzeit einerlei Vorzeichen, und die Function

$$u = f(x, y, z)$$

ist ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem a, b, c negativ oder positiv sind.

13*. Um einen Fall zu betrachten, welcher sich nach den vorhergehenden Regeln nicht unmittelbar beurtheilen läßt, wollen wir die Bedingungen aufsuchen, unter denen die Function

$$u = (Cy - Bz + L)^2 + (Az - Cx + M)^2 + (Bx - Ay + N)^2,$$

wo A, B, C, L, M, N constante Größen und A, B, C nicht = 0 seyn sollen, ein Maximum oder ein Minimum wird.

Setzt man die partiellen ersten Differentialquotienten der gegebenen Function in Bezug auf x, y, z gleich 0, so erhält man die drei Gleichungen

$$\frac{Bx - Ay + N}{C} = \frac{Az - Cx + M}{B},$$

$$\frac{Cy - Bz + L}{A} = \frac{Bx - Ay + N}{C},$$

$$\frac{Az - Cx + M}{B} = \frac{Cy - Bz + L}{A},$$

wo nun aber sogleich in die Augen fällt, daß dies nur zwei von einander unabhängige Gleichungen zwischen den drei unbekannten Größen x, y, z sind, da jede derselben eine unmittelbare Folge aus den beiden andern ist, so daß es also unendlich viele Werthe von x, y, z giebt, welche diesen drei, oder eigentlich bloß zwei Gleichungen, die man kürzer unter der Form

$$\frac{Cy - Bz + L}{A} = \frac{Az - Cx + M}{B} = \frac{Bx - Ay + N}{C}$$

schreibt, genügen.

Um nun zu untersuchen, ob den diesen Gleichungen genügenden Werthen von x, y, z Maxima oder Minima der Function u entsprechen, muß man die zweiten partiellen Differentialquotienten entwickeln, und erhält, wenn wir die oben eingeführte Bezeichnung beibehalten, leicht:

$$a = 2(B^2 + C^2),\ b = 2(A^2 + C^2),\ c = 2(A^2 + B^2);$$
$$\alpha = -2AB,\ \beta = -2AC,\ \gamma = -2BC;$$

folglich

$$\alpha^2 - ab = -4(A^2 + B^2 + C^2)C^2,\ \text{d. i. } \alpha^2 - ab < 0,$$

und, wie man leicht findet,

$$a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma = 0;$$

also auch

$$(\alpha\beta - a\gamma)^2 - (\alpha^2 - ab)(\beta^2 - ac) = 0.$$

Hieraus sieht man, daß sich in diesem Falle nach den obigen Regeln nicht beurtheilen läßt, ob den, den beiden obigen Gleichungen genügenden Werthen von x, y, z ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function entspricht.

Entwickelt man aber aus dem ersten Differential von u, welches für die in Rede stehenden Werthe von x, y, z verschwindet, das zweite vollständige Differential von u; so erhält man

$$\partial^2 u = 2\{(A\partial z - C\partial x)^2 + (B\partial x - A\partial y)^2 + (C\partial y - B\partial z)^2\}$$

und sieht also, daß dieses Differential für alle x, y, z und alle ∂x, ∂y, ∂z positiv ist. Hieraus schließt man mittelst der Lehre von den Maximis und Minimis der Functionen mit einer veränderlichen Größe, indem man nur immer die Vorstellung festhält, daß die Veränderungen von u durch die Veränderungen einer veränderlichen Größe, von der man sich x, y, z abhängend denkt, herbeigeführt werde, auf der Stelle, daß für alle den beiden obigen Gleichungen genügende Werthe von x, y, z die Function u ein Minimum wird. Zugleich findet man durch leichte Rechnung, daß für alle solche Werthe von x, y, z die Function u den constanten Werth

$$\frac{(AL + BM + CN)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

hat, welcher also jederzeit ein Minimum dieser Function ist. Wir haben also hier zugleich einen Fall, in dem es unendlich viele Minima einer Function giebt.

III. Functionen, deren veränderliche Größen nicht ganz unabhängig von einander sind.

14. Wir wollen zuerst bloß die Function

$$u = f(x, y)$$

der beiden veränderlichen Größen x, y betrachten, nehmen aber an, daß diese beiden veränderlichen Größen nicht unabhängig von einander sind, sondern daß zwischen denselben eine Gleichung, welche wir im Allgemeinen durch

$$\varphi(x, y) = V = 0$$

bezeichnen wollen, gegeben ist. Es kommt nun darauf an, die Werthe von x und y zu finden, welche der Gleichung $V = 0$ genügen und die Function u zu einem Maximo oder Minimo machen. Der Weg, welcher sich zur Auflösung dieses Problems zuerst darbietet, ist folgender. Mittelst der Gleichung $V = 0$ bestimmt man die eine der beiden Größen x, y durch die andere, etwa y durch x, setzt den gefundenen Ausdruck für y in die gegebene Function $u = f(x, y)$, und hat nun eine bloß von der veränderlichen Größe x abhängende Function, so daß also jetzt die Aufgabe auf den in I. ausführlich betrachteten Fall zurückgeführt ist. Setzen wir nämlich $u = F(x)$; so bestimmt man nun nach I. den Werth von x, für welchen u ein Maximum oder ein Minimum wird, führt den gefundenen Werth von x in den vorher für y gefundenen Ausdruck ein, und erhält so auch den entsprechenden Werth von y, wodurch also die Aufgabe vollständig aufgelöst ist. Man sieht aber, daß diese Auflösung unserer Aufgabe auf der Auflösung der Gleichung $V = 0$ beruhet,

und daher die allgemeine Auflösung der Gleichungen als gegeben voraussetzt, welches bekanntlich nicht verstattet ist. Dadurch wird die Nothwendigkeit einer andern die allgemeine Auflösung der Gleichungen wenigstens in so fern nicht in Anspruch nehmenden Auflösung fühlbar, daß man in jedem Falle zwei völlig entwickelte Gleichungen finden kann, welche bloß die gesuchten Werthe von x und y, für welche die Function u ein Maximum oder ein Minimum wird, als unbekannte Größen enthalten. Durch eine solche Auflösung, die wir nun zu geben versuchen wollen, ist die Aufgabe dann auf ein bloßes Problem der Algebra zurückgeführt.

15. Betrachten wir wie vorher y und folglich auch u als eine Function von x, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums. Schließen wir aber jetzt größerer Deutlichkeit wegen, wie dies auch sonst gewöhnlich ist, die partiellen Differentialquotienten in Parenthesen ein; so ist bekanntlich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums. Ferner ist nach der Voraussetzung $V = 0$. Folglich ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

so daß wir also jetzt die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$$

haben, aus denen durch Division

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)}$$

oder

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0$$

folgt. Aus dieser Gleichung, verbunden mit der Gleichung $V = 0$ lassen sich x und y bestimmen. Hat man so x und y gefunden, so lassen sich auch mittelst der Gleichungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

die entsprechenden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ bestimmen. Mittelst dieser Werthe ergiebt sich dann auch nach der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

der den oben gefundenen Werthen von x und y entsprechende Werth von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Ist dieser Werth nun nicht $= 0$, so ist der den gefundenen Werthen von x und y entsprechende Werth von u ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem der in Rede stehende Werth von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ negativ oder positiv ist.

Seyen z. B. x, y so zu bestimmen, daß die Function

$$u = ax + by$$

ein Maximum oder ein Minimum wird, und zugleich

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ist. In diesem Falle ist

$$V = x^2 + y^2 - r^2 = 0 .$$

Da nun

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = b, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2x, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 2y$$

ist; so hat man zur Bestimmung von x und y die Gleichungen

$$ay - bx = 0, \; x^2 + y^2 - r^2 = 0 .$$

Setzt man nun den Werth

$$y = \frac{b}{a}x$$

aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung; so erhält man mit Uebereinstimmung der obern und untern Zeichen:

$$x = \pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

Der entsprechende Werth von u ist

$$u = \pm r\sqrt{a^2 + b^2} .$$

Ferner hat man nun im vorliegenden Falle

$$x + y\frac{\partial y}{\partial x} = 0 ,$$

$$1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 ,$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{r^2}{y^3}.$$

Für die obigen Werthe von x und y ist folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp \frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{rb^3}.$$

Also ist nach dem Obigen für die in Rede stehenden Werthe von x und y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mp \frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{rb^2}.$$

Für

$$x = \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ist also, wenn r positiv ist,

$$u = r\sqrt{a^2+b^2}$$

ein Maximum; für

$$x = -\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = -\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ist dagegen, wenn r positiv ist,

$$u = -r\sqrt{a^2+b^2}$$

ein Minimum. Ist r negativ, so findet das Umgekehrte Statt.

Man kann diese Aufgabe auch leicht auf die in (14.) angedeutete Art auflösen. Aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

folgt nämlich

$$y = \pm\sqrt{r^2-x^2}.$$

Also ist

$$u = ax + by = ax \pm b\sqrt{r^2-x^2}$$

und folglich, wenn man differentiirt,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\sqrt{r^2-x^2} \mp bx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Zur Bestimmung von x hat man also die Gleichung

$$a\sqrt{r^2-x^2} \mp bx = 0 \text{ oder } a\sqrt{r^2-x^2} = \pm bx,$$

woraus sich

$$x^2 = \frac{a^2r^2}{a^2+b^2}$$

ergiebt. Setzt man nun

$$x = \pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

so muß man, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$y = \pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

setzen, wie leicht auf folgende Art erhellet. Nach dem Obigen ist nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},\quad a\sqrt{r^2 - x^2} \mp bx = 0,$$

d. i.

$$\pm ay \mp bx = 0 \text{ oder } ay - bx = 0,$$

und diese Gleichung würde nicht erfüllt werden, wenn man

$$x = \pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y = \mp\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

setzen wollte.

Für

$$x = \pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y = \pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ist $u = \pm r\sqrt{a^2+b^2}$, und durch Entwickelung des zweiten Differentialquotienten von u erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mp\frac{br^2}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}};$$

also für den obigen Werth von x, wenn man, wie es nach dem Obigen erforderlich ist,

$$\sqrt{r^2-x^2} = +y = \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

setzt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mp\frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{rb^2},$$

woraus sich nun, wie sogleich erhellet, ganz mit den vorher gefundenen übereinstimmende Resultate ergeben.

Wir wollen jetzt ferner zwei Zahlen x, y, zwischen denen die Gleichung

$$ax + by = k$$

gegeben ist, so zu bestimmen suchen, daß die Summe der Quadrate dieser beiden Zahlen ein Minimum wird. In diesem Falle ist also

$$V = ax + by - k,\quad u = x^2 + y^2;$$

folglich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = b.$$

Also haben wir zur Bestimmung von x und y die Gleichungen

$$bx - ay = 0,\quad ax + by - k = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{bk}{a^2 + b^2}.$$

Der entsprechende Werth von u ist

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2}.$$

Es ist nun in diesem Falle

$$a + b\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Also ist, weil

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \frac{2a^2}{b^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{b^2},$$

d. i. positiv. Folglich ist

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2}$$

ein Minimum.

Soll man eine Zahl k so in zwei Theile theilen, daß die Summe der Quadrate derselben ein Minimum wird; so hat man in der vorigen Aufgabe $a = b = 1$ zu setzen. Dies giebt

$$x = y = \tfrac{1}{2}k,$$

so daß also die beiden Theile einander gleich seyn müssen, wenn die Summe ihrer Quadrate ein Minimum seyn soll.

Auch diese Aufgabe läßt sich noch ganz leicht nach der in (14.) angegebenen Methode auflösen. Aus der Gleichung

$$ax + by = k$$

folgt nämlich

$$y = \frac{k - ax}{b}.$$

Folglich ist

$$u = x^2 + y^2 = \frac{(a^2 + b^2)x^2 - 2akx + k^2}{b}.$$

Also ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(a^2 + b^2)x - 2ak}{b^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{b^2}.$$

Zur Bestimmung von x hat man

$$(a^2 + b^2)x - ak = 0;$$

folglich

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2}.$$

Weil der zweite Differentialquotient positiv ist, so findet ein Minimum Statt, Alles ganz übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

Wir wollen jetzt x und y so bestimmen, daß

$$ax + by = k \text{ und } u = x^p y^q = \text{Max}.$$

ist. Da $V = ax + by - k$ ist, so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = px^{p-1}y^q, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = qx^p y^{q-1}, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = b.$$

Also haben wir zur Bestimmung von x und y nach dem Obigen die Gleichungen

$$ax + by - k = 0, \; bpx^{p-1}y^q - aqx^p y^{q-1} = 0$$

oder

$$ax + by - k = 0, \; bpy - aqx = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$x = \frac{kp}{a(p+q)}, \quad y = \frac{kq}{b(p+q)}.$$

Es ist nun

$$a + b\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Auch ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = p(p-1)x^{p-2}y^q, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = q(q-1)x^p y^{q-2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = pqx^{p-1}y^{q-1}.$$

Es ist nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$p(p-1)x^{p-2}y^q - \frac{2a}{b} \cdot pqx^{p-1}y^{q-1} + \frac{a^2}{b^2} \cdot q(q-1)x^p y^{q-2}.$$

und folglich, wenn man die obigen Werthe von x und y einführt, nach gehöriger Reduction:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{k^{p+q-2}p^{p-1}q^{q-1}}{a^{p-2}b^q(q+q)^{p+q-3}}.$$

Also ist dieser zweite Differentialquotient, wenn nur, wie wir voraussetzen wollen, die Größen k, a, b, p, q sämmtlich positiv sind, negativ und folglich

$$u = \frac{k^{p+q}p^p q^q}{a^p b^q (p+q)^{p+q}}$$

ein Maximum.

16. Wir wollen jetzt annehmen, daß

$$u = f(x, y, z)$$

und zwischen den drei veränderlichen Größen x, y, z die Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = V = 0$$

gegeben sey. In diesem Falle könnte man aus letzterer Gleichung, indem man x und y als bekannt betrachtet, z entwickeln, und den gefundenen Ausdruck von x für z in die gegebene Function

$$u = f(x, y, z)$$

setzen, wo dann u eine Function der beiden von einander ganz unabhängigen veränderlichen Größen, und die Aufgabe folglich auf den in (12.) ausführlich betrachteten Fall zurückgeführt seyn würde. Man sieht aber leicht, daß diese Methode ganz den mit der Auflösung der Gleichung $V = 0$ verbundenen Schwierigkeiten unterliegt, und daher das Bedürfniß einer von der Auflösung dieser Gleichung unabhängigen Methode fühlbar wird. Um eine solche Methode zu finden, denken wir uns x, y, z wieder von der einen veränderlichen Größe s abhängig und bezeichnen die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$$

der Kürze wegen durch δx, δy, δz, wie wir schon früher gethan haben; so ist

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z$$

und

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta z = 0 .$$

Als gemeinschaftliche Bedingungen des Maximums und Minimums haben wir also in diesem Falle:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z = 0 ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z = 0 .$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen δz; so erhalten wir

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right\}\delta x + \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right\}\delta y = 0 .$$

Die Natur der Aufgabe erfordert, daß diese Gleichung für jedes δx und δy Statt finden muß, da natürlich δx und δy in diesem Falle ganz unabhängig von einander sind. Dies giebt die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)},$$

welche, verbunden mit der Gleichung

$$V = \varphi(x, y, z) = 0$$

zur Bestimmung der Größen x, y, z hinreichend sind. Ob nun wirklich für die gefundenen Werthe von x, y, z ein Maximum oder ein Minimum Statt findet, muß auf folgende Art entschieden werden. Aus den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\end{aligned}\right\} = 0$$

entwickele man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)$$

und substituire in die erhaltenen Ausdrücke die oben gefundenen Werthe von x, y, z. Bezeichnen wir nun die partiellen zweiten Differentialquotienten von u, welche man erhalten würde, wenn man den Ausdruck von z durch x, y in u für z substituirte, und dann u zwei Mal nach x, zwei Mal nach y, und ein Mal nach x und ein Mal nach y differentirte, d. h. die zweiten Differentialquotienten von u, indem man u bloß als Function von x und y betrachtet, durch X, Y, Z; so ist

$$X = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),$$

$$Y = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

$$Z = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Mittelst dieser Formeln kann man also auch die den oben gefundenen Werthen von x, y, z entsprechenden Werthe von X, Y, Z finden, welche wir der Kürze wegen durch dieselben Buchstaben bezeichnen wollen. Wenn nun

$$Z^2 - XY < 0$$

ist; so ist die Function u für die gefundenen Werthe von x, y, z nach (12.) ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem X, Y beide negativ oder beide positiv sind. Dies wollen wir nun durch einige Beispiele erläutern.

Seyen z. B. x, y, z so zu bestimmen, daß

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und

$$ax + by + cz = u$$

ein Maximum oder ein Minimum ist.

In diesem Falle ist

$$V = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

folglich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2x, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 2y, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 2z.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = b, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = c,$$

und man hat also zur Bestimmung von x, y, z die folgenden Gleichungen:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z},$$

oder

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \frac{c}{a}x.$$

Weil nun

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ist; so erhält man

$$x = \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$y = \pm \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$z = \pm \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Der entsprechende Werth von u ist

$$u = \pm r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2x,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 2y,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 2z\,;$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 2,\quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 2,\quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 2\,;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = 0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} = 0$$

ist; so hat man nach dem Obigen die Gleichungen:

$$x + z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\quad y + z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0\,;$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,\quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0\,;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0\,.$$

Folglich ist

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{x}{z},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{y}{z};\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = -\frac{x^2+z^2}{z^3},\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -\frac{y^2+z^2}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{xy}{z^3}\,.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = b,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = c\,;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0,\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 0\,.$$

Also

$$X = -c\frac{x^2+z^2}{z^3},\quad Y = -c\frac{y^2+z^2}{z^3},\quad Z = -c\frac{xy}{z^3}\,.$$

Folglich für die obigen Werthe von x, y, z:

$$X = \mp\frac{a^3+c^2}{c^2 r}\sqrt{a^2+b^2+c^2},\quad Y = \mp\frac{b^2+c^2}{c^2 r}\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

$$Z = \mp\frac{ab}{c^2 r}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.$$

Weil nun

$$a^2 b^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + c^2) < 0$$

ist; so ist, wenn man die obern Zeichen nimmt, u ein Maximum, ein Minimum dagegen, wenn man die untern Zeichen nimmt.

Seyen ferner x, y, z so zu bestimmen, daß

$$ax + by + cz = k$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = u$$

ein Minimum ist.

Es ist in diesem Falle

$$V = ax + by + cz - k .$$

Also ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = b, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = c .$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z .$$

Also hat man zur Bestimmung von x, y, z die Gleichungen:

$$\frac{2x}{a} = \frac{2y}{b} = \frac{2z}{c}$$

oder

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} .$$

Setzt man nun

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \frac{c}{a}x$$

in die Gleichung

$$ax + by + cz = k ;$$

so erhält man

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2 + c^2} ,$$

$$y = \frac{bk}{a^2 + b^2 + c^2} ,$$

$$z = \frac{ck}{a^2 + b^2 + c^2} .$$

Der entsprechende Werth von u ist

$$u = \frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2} ,$$

wo nun noch besonders beurtheilt werden muß, ob dieser Werth von u wirklich ein Minimum ist. Die partiellen zweiten Differentialquotienten von V verschwinden sämmtlich, und man hat also nach dem Obigen

$$a + c\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad b + c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 ;$$

$$c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0, \quad c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0, \quad c\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 ;$$

also

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{a}{c}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{b}{c};$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 2, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Also ist

$$X = \frac{2(a^2+c^2)}{c^2}, \quad Y = \frac{2(b^2+c^2)}{c^2}, \quad Z = \frac{2ab}{c^2}.$$

Weil nun offenbar

$$a^2 b^2 - (a^2+c^2)(b^2+c^2) < 0$$

ist, so ist auch

$$Z^2 - XY < 0,$$

und es findet folglich, weil auch X und Y positiv sind, in der That ein Minimum Statt.

Man kann diese Aufgabe auch auf folgende Art auflösen. Aus der Gleichung

$$ax + by + cz = k$$

folgt

$$z = \frac{k - ax - by}{c}.$$

Also ist

$$u = x^2 + y^2 + \frac{(k-ax-by)^2}{c^2}$$

$$= \frac{(a^2+c^2)x^2 + (b^2+c^2)y^2 + 2abxy - 2akx - 2bky + k^2}{c^2}.$$

Folglich ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{2(a^2+c^2)x + 2aby - 2ak}{c^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{2(b^2+c^2)y + 2abx - 2bk}{c^2}.$$

Für das Maximum oder Minimum muß

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

seyn. Dies giebt die Gleichungen

$$(a^2 + c^2)x + aby - ak = 0,$$
$$(b^2 + c^2)y + abx - bk = 0.$$

Dies giebt

$$x = \frac{ak}{a^2+b^2+c^2}, \quad y = \frac{bk}{a^2+b^2+c^2}.$$

Der entsprechende Werth von u ist

$$u = \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{2(a^2+c^2)}{c^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{2(b^2+c^2)}{c^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2ab}{c^2},$$

woraus man ganz wie bei der vorigen Auflösung schließt, daß der obige Werth von u in der That ein Minimum ist.

Soll man unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden, welche ein und dieselbe gegebene Oberfläche $2s$ haben, dasjenige finden, welches den größten körperlichen Inhalt hat; so hat man, wenn man die drei auf einander senkrechten Kanten durch x, y, z bezeichnet, folgende Gleichungen

$$xy + xz + yz = s$$

und $xyz = \mathrm{Max.}$ Statt dieser beiden Gleichungen kann man die folgenden setzen:

$$xy + xz + yz = s,$$
$$lx + ly + lz = u = \mathrm{Max}.$$

Weil

$$V = xy + xz + yz - s = 0$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = y + z, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = x + z, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = x + y.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{z},$$

und man hat also zur Bestimmung von x, y, z die Gleichungen

$$x(y+z) = y(x+z) = z(x+y),$$

welche, wie bekannt, mit der Gleichung

$$xy + xz + yz = s$$

verbunden werden müssen. Man findet leicht

$$x = y = z = \sqrt{\frac{s}{3}}.$$

Der entsprechende Werth von xyz ist

$$xyz = \frac{s}{3}\sqrt{\frac{s}{3}}.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 1, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 1$$

ist; so ist

$$y + z + (x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$x + z + (x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{y+z}{x+y}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{x+z}{x+y}.$$

Ferner ist

$$-2\frac{y+z}{x+y} + (x+y)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

$$-2\frac{x+z}{x+y} + (x+y)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 2\frac{y+z}{(x+y)^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 2\frac{x+z}{(x+y)^2}.$$

Endlich ist

$$1 - \frac{y+z}{x+y} - \frac{x+z}{x+y} + (x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2z}{(x+y)^2}.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -\frac{1}{z^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

ist; so ist

$$X = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\cdot\frac{(y+z)^2}{(x+y)^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{2(y+z)}{(x+y)^2},$$

$$Y = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}\cdot\frac{(x+z)^2}{(x+y)^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{2(x+z)}{(x+y)^2},$$

$$Z = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{x+z}{x+y}\cdot\frac{y+z}{x+y} + \frac{1}{z}\cdot\frac{2z}{(x+y)^2},$$

oder, weil nach dem Obigen $x = y = z$ ist:

$$X = -\frac{1}{x^2}, \quad Y = -\frac{1}{x^2}, \quad Z = -\frac{1}{2x^2}.$$

Also sind X und Y beide negativ. Ferner ist

$$Z^2 - XY = \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{4x^4},$$

d. i. $Z^2 - XY < 0$, so daß also in der That ein Maximum

Statt findet. Unter allen Parallelepipeden, welche eine gegebene Oberfläche haben, hat also der Würfel den größten körperlichen Inhalt.

17. Wir wollen nun auch noch den Fall betrachten, wenn

$$u = f(x, y, z)$$

ein Maximum oder ein Minimum werden soll, und zwischen den veränderlichen Größen x, y, z die beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y, z) = V = 0, \quad \varphi'(x, y, z) = V' = 0$$

gegeben sind. Die sich zuerst darbietende Methode der Auflösung ist folgende. Aus den beiden Gleichungen $V = 0$ und $V' = 0$ bestimme man die beiden veränderlichen Größen y und z durch x, führe die erhaltenen Ausdrücke für y und z in die Function u ein, und bestimme nun das Maximum oder Minimum wie bei Functionen mit einer veränderlichen Größe. So einfach diese Auflösung auch in der Theorie ist, so sieht man doch sogleich, daß dieselbe allen mit der Auflösung der Gleichungen nothwendig verbundenen Schwierigkeiten unterliegt, und daher eine andere Auflösung, welche in dem Sinne von (14.) die allgemeine Auflösung der Gleichungen nicht als bekannt voraussetzt, sehr wünschenswerth ist. Zu einer der in Rede stehenden Schwierigkeiten nicht unterliegenden Auflösung gelangt man auf eine ganz ähnliche Art wie in (15.). Betrachten wir u, y, z als Functionen von x; so ist nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Also hat man die drei folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Größen

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x};$$

so erhält man:

$$\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0\,.$$

Diese Gleichung, verbunden mit den Gleichungen $V=0$ und $V'=0$, reicht zur Bestimmung der Größen x, y, z hin. Hat man auf diese Art x, y, z bestimmt, so findet man die entsprechenden Werthe von

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x}$$

mittelst der Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,$$
$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0\,.$$

Die entsprechenden Werthe von

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

findet man dann ferner mittelst der beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$$
$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,,$$
$$\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2 V'}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V'}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$$
$$+2\frac{\partial^2 V'}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,.$$

Hat man so

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

gefunden; so ergiebt sich $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mittelst der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

Ist dann, immer für die nach dem Obigen gefundenen Werthe von x, y, z, der zweite Differentialquotient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ nicht $=0$; so findet für die in Rede stehenden Werthe von x, y, z ein Maximum oder ein Minimum der Function u Statt, jenachdem dieser Differentialquotient negativ oder positiv ist.

Das Vorhergehende wird hinreichend seyn, deutlich zu zeigen, wie man sich auch in complicirteren Fällen bei der Bestim-

mung der Maxima und Minima der Functionen, deren veränderliche Größen nicht ganz unabhängig von einander sind, zu verhalten hat.

IV. Unentwickelte Functionen.

18. Wir wollen jetzt annehmen, daß zwischen den Größen x und y die Gleichung

$$u = f(x, y) = 0$$

gegeben sey, und wollen nun x so zu bestimmen suchen, daß der entsprechende Werth von y ein Maximum oder ein Minimum wird. Bekanntlich ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Die allgemeine Bedingung des Maximums und Minimums ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Diese Bedingung wird, wie sich aus der vorhergehenden Gleichung auf der Stelle ergiebt, erfüllt seyn, wenn

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

ist. Man hat also jetzt die beiden Gleichungen

$$u = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

aus denen sich x und y bestimmen lassen.

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Aber für die gefundenen Werthe von x und y

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Also für die in Rede stehenden Werthe von x und y

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Ist nun dieser Differentialquotient für die gefundenen Werthe von x und y nicht $= 0$; so findet ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function Statt, jenachdem derselbe negativ oder positiv ist. Wäre dieser Differentialquotient aber $= 0$, so müßte man den dritten Differentialquotienten von y entwickeln, welcher sich, immer bloß in Bezug auf den Werth dieses Differentialquotienten für die oben gefundenen Werthe von x und y, aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

ergiebt. Soll dann für die gefundenen Werthe von x und y überhaupt ein Maximum oder ein Minimum Statt finden, so muß für diese Werthe von x und y der dritte Differentialquotient von y auch $= 0$ seyn. Den vierten Differentialquotienten findet man aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 .$$

Ist dann der vierte Differentialquotient für die gefundenen Werthe von x und y nicht $= 0$; so findet ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function Statt, jenachdem dieser Differentialquotient negativ oder positiv ist. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, wird nun keiner weitern Erläuterung bedürfen.

Die gegebene Gleichung sey z. B.

$$y^2 - 2axy + x^2 - c^2 = 0 ,$$

wo nun x so bestimmt werden soll, daß y ein Maximum oder ein Minimum wird. Da in diesem Falle

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -2ay + 2x$$

ist; so hat man zur Bestimmung von x und y die beiden Gleichungen

$$x - ay = 0 ,$$
$$y^2 - 2axy + x^2 - c^2 = 0 .$$

Aus der ersten ergiebt sich

$$x = ay$$

Setzt man dies in die zweite, so erhält man

$$y^2 - 2a^2 y^2 + a^2 y^2 - c^2 = 0 ,$$
$$y^2(1 - a^2) = c^2 .$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$x = \pm \frac{ac}{\sqrt{1-a^2}}, \; y = \pm \frac{c}{\sqrt{1-a^2}} .$$

Zugleich ergiebt sich hieraus, daß, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, $a^2 < 1$ seyn muß.

Ferner ist nun

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2, \; \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y - 2ax .$$

Also ist für die gefundenen Werthe von x und y:

$$1 \pm \left\{\frac{c}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{a^2 c}{\sqrt{1-a^2}}\right\} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 ,$$

$$1 \pm c\sqrt{1-a^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 ,$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp \frac{1}{c\sqrt{1-a^2}} .$$

Ist nun c positiv, so findet für

$$x = \frac{ac}{\sqrt{1-a^2}},\ y = \frac{c}{\sqrt{1-a^2}}$$

ein Maximum, für

$$x = -\frac{ac}{\sqrt{1-a^2}},\ y = -\frac{c}{\sqrt{1-a^2}}$$

dagegen ein Minimum der Function y Statt. Ist aber c negativ, so findet für die beiden ersten Werthe von x und y ein Minimum, für die beiden letzten dagegen ein Maximum Statt.

Die gegebene Gleichung sey ferner

$$y^3 - axy + x^3 = 0\,.$$

In diesem Falle ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 3x^2 - ay\,,$$

und wir haben also zur Bestimmung von x und y die beiden folgenden Gleichungen:

$$3x^2 - ay = 0\,,$$
$$y^3 - axy + x^3 = 0\,.$$

Aus der ersten folgt

$$y = \frac{3x^2}{a}\,.$$

Dies in die zweite gesetzt, giebt

$$\frac{27x^3}{a^3} - 2 = 0\,,$$

woraus

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2},\ y = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{4}\,.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 6x,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 3y^2 - ax\,.$$

Also ist für die gefundenen Werthe von x und y:

$$2a\sqrt[3]{2} + \tfrac{1}{3}a^2\sqrt[3]{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{6}{a}\,.$$

Jenachdem nun a positiv oder negativ ist, findet also für

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2},\ y = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

respective ein Maximum oder ein Minimum der Function y Statt.

Zu bemerken ist hierbei noch, daß den beiden Gleichungen

$$3x^2 - ay = 0\,,$$
$$y^3 - axy + x^3 = 0$$

auch genügt wird, wenn man $x = 0$, $y = 0$ setzt. Für diese Werthe von x und y geht die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

in die identische Gleichung

$$0 + 0.\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

über, und es fragt sich nun, ob für $x = 0$, $y = 0$ der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, wie erfordert wird, wirklich $= 0$ ist. Durch Differentiation erhält man aber leicht

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

und folglich, wie leicht erhellet, für $x = y = 0$:

$$-2a\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

so daß also für $x = y = 0$ wirklich $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist. Sucht man nun den entsprechenden Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

zu bestimmen; so erhält man die identische Gleichung

$$0 + 0.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

welche also den Werth des zweiten Differentialquotienten unbestimmt läßt. Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

erhält man aber leicht durch Differentiation:

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0.$$

Folglich für $x = y = 0$:

$$6 - 3a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2}{a}.$$

Jenachdem nun a positiv oder negativ ist, findet also für $x = y = 0$ respective ein Minimum oder ein Maximum Statt. Ist also a positiv, so ist $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ für $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ ein Maximum, $y = 0$ für $x = 0$ dagegen ein Minimum. Ist aber a negativ, so ist $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ für $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ ein Minimum, $y = 0$ für $x = 0$ dagegen ein Maximum.

19. Wir wollen nun ferner annehmen, daß zwischen den Größen x, y, z die Gleichung

$$u = f(x, y, z) = 0$$

gegeben sey; so kann man jede dieser drei Größen als Function der beiden andern, z. B. z als Function von x und y, betrachten, und dann x und y so zu bestimmen verlangen, daß z ein Maximum oder ein Minimum wird. Nach Principien der Differentialrechnung hat man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 .$$

Die allgemeinen Bedingungen des Maximums und Minimums sind bekanntlich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 .$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

ist. Verbindet man mit diesen Gleichungen die Gleichung $u=0$; so hat man Gleichungen genug, um x, y, z bestimmen zu können. Die den gefundenen Werthen von x, y, z entsprechende Werthe von

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

erhält man aus den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ist dann

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) < 0;$$

so ist z für die gefundenen Werthe von x und y ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \text{ und } \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

beide negativ oder beide positiv sind.

20. Sind endlich zwischen den drei Größen x, y, z die beiden Gleichungen

$$u = f(x, y, z) = 0 ,$$
$$v = \varphi(x, y, z) = 0$$

gegeben; so ist offenbar sowohl y, als auch z eine Function von

:x, und man kann sich nun z. B. vornehmen, x so zu bestimmen, daß y ein Maximum oder ein Minimum wird. Nach Principien der Differentialrechnung ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,.$$

Die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0\,.$$

Dies giebt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{\partial z}{\partial x}$; so erhält man

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\,.$$

Diese Gleichung, verbunden mit den gegebenen Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, reicht zur Bestimmung von x, und auch der entsprechenden Werthe von y und z hin. Aus einer der beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

erhält man dann auch den entsprechenden Werth von $\frac{\partial z}{\partial x}$. Mit Berücksichtigung von

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

erhält man nun ferner leicht durch Differentiation die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,.$$

Diese beiden Gleichungen enthalten bloß noch die beiden unbekannten Größen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

welche man also aus denselben bestimmen kann. Ist dann $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht $= 0$; so ist der gefundene Werth von y ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem dieser Differentialquotient negativ oder positiv ist. Daß man auf ganz ähnliche Art x auch so be-

stimmen kann, daß z ein Maximum oder ein Minimum wird, versteht sich von selbst.

Wir wollen z. B. das größte Viereck zu bestimmen suchen, welches sich mit den vier gegebenen Seiten a, b, α, β beschreiben läßt. Die von den Seiten a, b und α, β eingeschlossenen Winkel des gesuchten Vierecks seyen respective φ und ψ, sein Inhalt sey $= y$; so ist

$$2y = ab\sin\varphi + \alpha\beta\sin\psi .$$

Ferner ist, wie leicht erhellet,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\psi ,$$

und es ist folglich in diesem Falle, wenn wir uns respective φ und ψ statt des vorhergehenden x und z gesetzt denken,

$$u = 2y - ab\sin\varphi - \alpha\beta\sin\psi ,$$
$$v = a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2ab\cos\varphi + 2\alpha\beta\cos\psi .$$

Also ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) = -ab\cos\varphi , \left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) = -\alpha\beta\cos\psi ;$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right) = 2ab\sin\varphi , \left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right) = -2\alpha\beta\sin\psi ;$$

und wir haben folglich nachstehende Gleichung:

$$2ab\alpha\beta\{\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi\} = 0 ,$$

d. i.

$$2ab\alpha\beta\sin(\varphi + \psi) = 0 ,$$

oder

$$\sin(\varphi + \psi) = 0 .$$

Also, weil $\varphi + \psi < 360°$ seyn muß, entweder $\varphi + \psi = 0$ oder $\varphi + \psi = 180°$, wo aber wieder, wenn ein wirkliches Viereck entstehen soll, bloß die letztere Gleichung Statt finden kann. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

oder

$$-ab\cos\varphi - \alpha\beta\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

erhalten wir

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\frac{ab\cos\varphi}{\alpha\beta\cos\psi} .$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

oder

$$2ab\sin\varphi - 2\alpha\beta\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

ergiebt sich

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{ab\sin\varphi}{\alpha\beta\sin\psi}.$$

Weil $\varphi + \psi = 180°$ ist, so ist $\cos\varphi = -\cos\psi$, $\sin\varphi = \sin\psi$; also

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = -1, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = 1,$$

so daß sich folglich aus den beiden obigen Ausdrücken für $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{ab}{\alpha\beta}$$

ergiebt. Nach dem Obigen ist nun

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\,\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

d. i.

$$ab\sin\varphi + \frac{a^2b^2}{\alpha\beta}\sin\psi + 2\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \alpha\beta\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$2ab\cos\varphi - 2\frac{a^2b^2}{\alpha\beta}\cos\psi - 2\alpha\beta\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$, so ergiebt sich:

$$-2ab\cos(\varphi+\psi) + \frac{2a^2b^2}{\alpha\beta} + 4\sin\psi\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = 0,$$

d. i., weil $\cos(\varphi+\psi) = -1$ ist:

$$ab + \frac{a^2b^2}{\alpha\beta} + 2\sin\psi\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = -\frac{ab(ab+\alpha\beta)}{2\alpha\beta\sin\psi} = -\frac{ab(ab+\alpha\beta)}{2\alpha\beta\sin\varphi}.$$

Weil nun $\varphi + \psi = 180°$, $\varphi < 180°$ ist, so ist $\sin\varphi$ positiv, also $\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}$ negativ. Daher ist der Flächeninhalt des mit den Seiten a, b, α, β beschriebenen Vierecks für $\varphi + \psi = 180°$ ein Maximum. Also läßt sich um das größte mit den Seiten a, b, α, β beschriebene Viereck jederzeit ein Kreis beschreiben. Der Winkel φ selbst kann nun auf folgende Art bestimmt werden. Weil $\cos\varphi = -\cos\psi$ ist; so giebt die Gleichung

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\psi$$

auf der Stelle

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2(ab + \alpha\beta)}.$$

Also ist

$$1 + \cos\varphi = \frac{(a+b)^2 - (\alpha-\beta)^2}{2(ab+\alpha\beta)},$$

woraus leicht

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)}{ab+\alpha\beta}}.$$

Eben so ist

$$1-\cos\varphi = \frac{(\alpha+\beta)^2 - (a-b)^2}{2(ab+\alpha\beta)},$$

und folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}{ab+\alpha\beta}}.$$

Auch ist

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)}}.$$

Hat man den Winkel φ gefunden, so findet man, weil $\sin\varphi = \sin\psi$ ist, den Flächeninhalt y des größten Vierecks leicht aus der Formel

$$2y = (ab+\alpha\beta)\sin\varphi.$$

Es ist auch nach dem Obigen

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}}{2(ab+\alpha\beta)}.$$

Also ist

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+\alpha-\beta)(a+b-\alpha+\beta)(\alpha+\beta+a-b)(\alpha+\beta-a+b)}.$$

H.

Harmonikalen. Die Erklärung und einige Haupteigenschaften solcher Linien finden sich schon im Artikel Theilung (13.) im fünften Bande, auf den daher hier zu verweisen erlaubt seyn und nur noch bemerkt werden mag, daß der Ausdruck Harmonikalen, statt dessen Brianchon in seinem **Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris. 1817.** sich der Benennung **faisceau harmonique** bedient, zuerst von Lahire in seinem **Traité des sections coniques. p. 5.** gebraucht worden ist. Viele Eigenschaften der Harmonikalen findet man in den beiden folgenden trefflichen Werken: **Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, v. J. Steiner. T. I. Berlin. 1832. S. 18.** und **Traité des propriétés projectives des figures par J. V. Poncelet. Paris. 1822.** Auch s. m. Poncelets **Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques in Crelles Journal B. III. S. 213.**

Harriots Lehrsatz, s. Gleichung (32.) i. d. Z.

Hippokrates, s. **Lunula.**

Hyperbel. Mehrere merkwürdige Eigenschaften der Hyperbel s. m. im Art. Elliptische Functionen. XII. i. d. Z.

Hyperbolische Spirale, s. Spirale (72.).

Hyperboloid mit einem Fache oder mit einem Mantel (hyperboloide à une nappe) heißt jede krumme Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten von der Form

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

ist, oder auf diese Form gebracht werden kann.

Legt man durch die Axe der z eine beliebige gegen die Ebene der xz unter dem Winkel α geneigte Ebene, und bezeichnet, indem man die Durchschnittslinie derselben mit der Ebene der xy als Axe der X annimmt, die Coordinaten der Curve, in welcher das Hyperboloid von der in Rede stehenden Ebene geschnitten wird, durch X, Y; so muß man, um die Gleichung dieser Curve zu finden, in der Gleichung des Hyperboloids für x, y, z offenbar respective $X\cos\alpha$, $X\sin\alpha$, Y setzen. Dadurch erhält man als Gleichung der in Rede stehenden Curve

$$\frac{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2}{a^2b^2}X^2 - \frac{Y^2}{c^2} = 1$$

und sieht also, daß dieselbe jederzeit eine Hyperbel ist, deren zweite Axe mit der Axe der Y, d. i. hier mit der Axe der z, zusammenfällt.

Denkt man sich ferner in der Entfernung γ von der Ebene der xy eine dieser Ebene parallele Ebene; so ist die Gleichung der Curve, in welcher das Hyperboloid von dieser Ebene geschnitten wird, offenbar

$$\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 + c^2}{c^2}$$

und folglich augenscheinlich jederzeit eine Ellipse.

Man sieht also, daß

1. jeder Schnitt mit einer durch die Axe der z gelegten Ebene eine Hyperbel ist, deren zweite Axe mit der Axe der z zusammenfällt, und daß
2. jeder Schnitt mit einer der Ebene der xy parallelen Ebene eine Ellipse ist,

und wird sich nun leicht einen Begriff von der Gestalt des sogenannten einfächrigen Hyperboloids machen können, welches zum

Unterschiede von dem zweifächrigen Hyperboloid, das wir im folgenden Artikel näher betrachten werden, seinen Namen deshalb erhalten hat, weil es die Axe der z rings herum ohne alle Unterbrechung frei umgiebt, wobei zugleich auch aus dem Vorhergehenden klar ist, daß dieses Hyperboloid rings um die Axe der z herum hohl, d. i. eigentlich gegen die Axe der z convex ist.

Will man die Gleichungen von Curven finden, in denen das Hyperboloid von Ebenen geschnitten wird, die in den Entfernungen α und β von den Ebenen der yz und xz diesen Ebenen parallel sind; so muß man in der Gleichung des Hyperboloids offenbar respective $x = \alpha$ und $y = \beta$ setzen, wodurch man die Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} + 1 = 0, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + 1 = 0$$

erhält, und hat nun die drei folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. Wenn $a^2 - \alpha^2 > 0$, $b^2 - \beta^2 > 0$ ist; so sind die beiden Curven offenbar Hyperbeln, deren zweite Axen der Axe der z parallel sind, wie augenblicklich erhellet, wenn man die beiden vorhergehenden Gleichungen unter der Form

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - \alpha^2}{a^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2 - \beta^2}{b^2}$$

darstellt.

II. Ist dagegen $a^2 - \alpha^2 < 0$, $b^2 - \beta^2 < 0$; so sind die beiden Curven Hyperbeln, deren zweite Axen respective den Axen der y und x parallel sind, wie sogleich erhellet, wenn man die beiden Gleichungen unter der Form

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2 - a^2}{-c^2}, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{\beta^2 - b^2}{b^2}$$

darstellt.

III. Ist $a^2 - \alpha^2 = 0$, $b^2 - \beta^2 = 0$; so werden die beiden Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

oder

$$b^2 z^2 - c^2 y^2 = 0, \quad a^2 z^2 - c^2 x^2 = 0,$$

und jede stellt also, wie leicht erhellen wird, ein System zweier respective durch die Axe der x und y gehenden geraden Linie dar.

Für die sogenannten Hauptschnitte, d. h. die Curven, in denen das Hyperboloid von den Ebenen der yz, xz, xy geschnitten wird, erhält man leicht die Gleichungen

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und sieht also, daß die beiden ersten jederzeit Hyperbeln sind, der

letzte jederzeit ein Ellipse ist; auch ist klar, das die zweiten Axen der beiden in Rede stehenden Hyperbeln immer mit der Axe der z zusammen fallen.

Hyperboloid mit zwei Fächern oder mit zwei Mänteln (hyperboloide à deux nappes) heißt jede krumme Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten von der Form

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

ist, oder wenigstens auf diese Form gebracht werden kann.

Sucht man wieder auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Artikel die Gleichung des Durchschnitts einer beliebigen durch die Axe der z gelegten Ebene mit dem Hyperboloid; so erhält man

$$\frac{Y^2}{c^2} - \frac{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}{a^2 b^2} X^2 = 1,$$

und sieht also, daß jeder solcher Schnitt eine Hyperbel ist, deren Hauptaxe mit der Axe der Y, d. i. hier mit der Axe der z, zusammenfällt, oder deren Nebenaxe in der Ebene der xy liegt.

Um ferner die Gleichung des Durchschnitts einer in der Entfernung γ von der Ebene der xy dieser Ebene parallel gelegten Ebene mit dem Hyperboloid zu finden, muß man in der Gleichung desselben offenbar $z = \gamma$ setzen, wodurch man für diesen Durchschnitt die Gleichung

$$\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 - c^2}{c^2}$$

erhält. Hieraus sieht man, daß die in Rede stehenden Schnitte nur dann reell sind, wenn $\gamma^2 - c^2 > 0$ ist; ist aber diese Bedingung erfüllt, so sind die Schnitte jederzeit Ellipsen.

Das Hyperboloid mit zwei Fächern ist also offenbar eine aus zwei von einander abgesonderten Theilen bestehende krumme Fläche, deren einer über, der andere unter der Ebene der xy ist, und hat aus diesem Grunde auch seinen Namen erhalten. Zugleich ist klar, daß die beiden Theile des zweifächrigen Hyperboloids gegen die Ebene der xy jederzeit convex sind.

Für die Curven, in denen das zweifächrige Hyperboloid von Ebenen geschnitten wird, welche in den Entfernungen α und β von den Ebenen der yz und xz diesen Ebenen parallel gelegt sind, erhält man leicht

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 + \alpha^2}{a^2}, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2 + \beta^2}{b^2},$$

und sieht also, daß diese Schnitte jederzeit Hyperbeln sind, deren Hauptaxen der Axe der z parallel sind.

Für die Hauptschnitte ergeben sich folgende Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$$

die beiden ersten sind also jederzeit Hyperbeln, der letzte ist jederzeit imaginär.

Hyper-elliptische Functionen, s. Elliptische Functionen (59.) i. d. Z.

Hyper-Logarithmus, s. Integrallogarithmus i. d. Z.

Hypocykloide, s. Epicykloide.

I.

Integralrechnung. Als ein sehr zeitgemäßes literarisches Unternehmen ist die Uebersetzung zu nennen, welche J. Salomon von Eulers Integralrechnung in vier Bänden zu Wien 1828—1830 herausgegeben hat, ein Unternehmen, das um so verdienstlicher ist und den Dank der Mathematiker verdient, weil das Original des in Rede stehenden wichtigen Werkes nur schwierig zu erhalten ist.

Integralformel. Dieser wichtige Artikel hat schon durch die sehr ausführlichen Artikel Bestimmtes Integral, wo auch von (27.) bis (42.) von den vorzugsweise nach Euler benannten Integralen weitläufig die Rede gewesen ist, und Elliptische Functionen eine große Vervollständigung erhalten. Außerdem sind in dem Artikel Function. I. die vorzüglichsten neuern Methoden zu der für die Integration der rationalen algebraischen Functionen so überaus wichtigen Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in einfache Brüche nachgetragen worden, und in einem besondern Artikel wird auch noch von dem sogenannten Integrallogarithmus ausführlich gehandelt werden, so wie auch die Integration durch Annäherung, über welche übrigens vorzüglich der Artikel Quadratur (122.) zu vergleichen ist, in einem besondern Artikel noch einige Zusätze erhalten wird. Wir müssen uns daher hier damit begnügen, aus den vielen hierher gehörenden Arbeiten der neuern Mathematiker Einiges mitzutheilen, was uns von vorzüglicher Wichtigkeit und von besonderm Interesse zu seyn scheint.

1. Lassen wir x und y zwei durch eine beliebige algebraische Gleichung mit einander verbundene veränderliche Größen bezeichnen, so daß also sowohl y als Function von x, als auch x als Function von y betrachtet werden kann; so ist, wenn X eine

beliebige Function von x bezeichnet, für die jedoch nachher immer eine ganze rationale algebraische Function von x gesetzt werden wird, und wir jetzt y als Function von x betrachten, bekanntlich

$$\int X\partial y + \int y\partial X = Xy + C .$$

So lange bekannt diese Gleichung auch ist; so hat doch ganz neuerlich der berühmte Poisson in einer schönen in Crelles Journal. B. XII. S. 89. abgedruckten Abhandlung: Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriqués, gezeigt, daß sich aus derselben durch höchst einfache Betrachtungen noch manche bisher unbekannte wichtigen Folgerungen ziehen lassen, worüber wir daher jetzt Einiges beibringen wollen.

Zuerst wollen wir annehmen, daß x und y durch die algebraische Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots k'x + l')y ,$$

wo also natürlich n eine positive ganze Zahl bezeichnet, mit einander verbunden seyen, und wollen der Kürze wegen

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + k'x + l'} = f(x)$$

und

$$\int f(x)\partial X = F(x)$$

setzen, wo, wenn namentlich X, wie wir nach einer schon vorher gemachten Bemerkung hier immer voraussetzen, eine ganze rationale algebraische Function von x ist, F(x) eine Function ist, die sich nach bekannten Regeln der Integralrechnung jederzeit finden läßt. Bestimmen wir nun aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung x durch y; so erhalten wir für x im Allgemeinen n Werthe, die als Functionen von y durch

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

bezeichnet werden sollen. Die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von X, welche natürlich auch Functionen von y sind, sollen durch

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \ldots Y_n$$

bezeichnet werden. Weil nun

$$\int X\partial y + \int y\partial X = Xy + C$$

und

$$\int y\partial X = \int f(x)\partial X = F(x) ,$$

also

$$\int X\partial y = Xy - F(x) + C$$

ist; so ist offenbar, wenn i eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n bezeichnet, allgemein

$$\int Y_i \partial y = yY_i - F(y_i) + C ,$$

und hierdurch folglich $\int Y_i \partial y$ gefunden, so daß man also, wenn sich nur $F(x)$ finden läßt, hierdurch sehr viele neue Integrale finden kann.

Wenn $f(x)$ eine ganze Function von x, d. h. wenn der Coefficient von y in der zwischen x und y gegebenen Gleichung eine constante Größe ist; so ist offenbar auch

$$F(x) = \int f(x) \partial X$$

eine ganze rationale algebraische Function von x, und folglich die Größe

$$yY_i - F(y_i) ,$$

welche wir durch P_i bezeichnen wollen, eine ganze rationale algebraische Function von y_i. Setzt man also das Product

$$(u - P_1)(u - P_2)(u - P_3) \ldots (u - P_n)$$

der Null gleich; so erhält man eine Gleichung des nten Grades

$$u^n + Au^{n-1} + Bu^{n-2} + \ldots + Ku + L = 0 ,$$

deren Coefficienten A, B, C, ... K, L offenbar symmetrische Functionen der Größen

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n ,$$

d. i. der Wurzeln der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l - l'y = 0$$

sind, und sich folglich, wie in der Theorie der Gleichungen ausführlich gezeigt wird (Gleichung. III. i. d. Z.), durch die Coefficienten dieser Gleichung ausdrücken lassen, ohne die Wurzeln derselben selbst zu kennen. Hieraus sieht man also, daß in diesem Falle die n Werthe der Größe

$$P_i = \int Y_i \partial y - C ,$$

welche dieselbe für $i = 1, 2, 3, \ldots n$ erhält, jederzeit als die Wurzeln einer Gleichung des nten Grades betrachtet werden können, welche sich aus der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l - l'y = 0$$

leicht ableiten läßt.

2. Poisson betrachtet die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = (a'x^2 + b'x + c')y$$

oder

$$(a-a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c' = 0$$

als Beispiel. Die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind, wenn man der Kürze wegen

$$v = \sqrt{(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c)}$$

setzt,

$$y_1 = \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)}, \quad y_2 = \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)}.$$

Setzt man nun die Function $X = x$; so ist

$$F(x) = \int \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \partial x .$$

Sind α und β die beiden Wurzeln der Gleichung

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

und folglich

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha)(x - \beta) ;$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{a}{a'} + \frac{(a'b - ab')x + a'c - ac'}{a'^2(x - \alpha)(x - \beta)} ;$$

also, wenn α und β ungleich sind,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{a}{a'} + \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} .$$

Bestimmt man nun A und B auf gewöhnliche Weise; so erhält man

$$A = \frac{(a'b - ab')\alpha + a'c - ac'}{(\alpha - \beta)a'^2},$$

$$B = \frac{(a'b - ab')\beta + a'c - ac'}{(\beta - \alpha)a'^2} .$$

Durch Integration ergiebt sich aber auf der Stelle

$$F(x) = \int \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \partial x = \frac{ax}{a'} + A\,l(x - \alpha) + B\,l(x - \beta) .$$

Folglich ist nach (1.), da hier $X = x$ ist,

$$\int y_i \partial y = (a'y - a)\frac{y_i}{a'} - A\,l(y_i - \alpha) - B\,l(y_i - \beta) + c .$$

Setzt man nun y_1 und y_2 für y_i; so ergiebt sich

$$\int \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)} \partial y$$

$$= -\frac{b'y - b + v}{2a'} - A\,l(y_1 - \alpha) - B\,l(y_1 - \beta) + \text{Const.},$$

$$\int \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)} \partial y$$

$$= -\frac{b'y - b - v}{2a'} - A\,l(y_2 - \alpha) - B\,l(y_2 - \beta) + \text{Const.},$$

und, wenn man diese Gleichungen zu einander addirt und von einander subtrahirt,

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y = \frac{b-b'y}{a'} - A1\{(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)\}$$
$$- B1\{(y_1-\beta)(y_2-\beta)\} + \text{Const.},$$

$$\int\frac{v\partial y}{a'y-a} = \frac{v}{a'} + A1\frac{y_1-\alpha}{y_2-\alpha} + B1\frac{y_1-\beta}{y_2-\beta} + \text{Const.}$$

Die zweite dieser Formeln liefert, weil v irrational ist, das Integral einer ziemlich complicirten irrationalen Differentialformel und soll daher vorzüglich nun noch weiter entwickelt werden. Die erste Formel wollen wir bloß deshalb noch weiter entwickeln, um ihre Uebereinstimmung mit andern bekannten Formeln der Integralrechnung zu zeigen. Nach dem Vorhergehenden ist nämlich

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x-\alpha)(x-\beta),$$
$$(a-a'y)x^2 + (b-b'y)x + c - c' = (a-a'y)(x-y_1)(x-y_2).$$

Setzt man nun in diesen beiden Gleichungen $x=\alpha$ und $x=\beta$; so ergiebt sich

$$a'\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0,\quad a'\beta^2 + b'\beta + c' = 0;$$
$$(a-a'y)\alpha^2 + (b-b'y)\alpha + c - c' = (a-a'y)(\alpha-y_1)(\alpha-y_2),$$
$$(a-a'y)\beta^2 + (b-b'y)\beta + c - c' = (a-a'y)(\beta-y_1)(\beta-y_2);$$

folglich ist offenbar

$$(y_1-\alpha)(y_2-\alpha) = \frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{a-a'y},\quad (y_1-\beta)(y_2-\beta) = \frac{a\beta^2+b\beta+c}{a-a'y}.$$

Man erhält also

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y$$
$$= \frac{b-b'y}{a'} - A1\frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{a-a'y} - B1\frac{a\beta^2+b\beta+c}{a-a'y} + \text{Const.}$$
$$= \frac{b-b'y}{a'} - A1(a\alpha^2+b\alpha+c) - B1(a\beta^2+b\beta+c)$$
$$+ (A+B)1(a-a'y) + \text{Const.},$$

oder, weil

$$A+B = \frac{a'b-ab'}{a'^2}$$

und die Größe

$$\frac{b}{a'} - A1(a\alpha^2+b\alpha+c) - B1(a\beta^2+b\beta+c)$$

selbst eine Constante ist,

$$\int\frac{b'y-b}{a-a'y}\partial y = -\frac{b'y}{a'} + \frac{a'b-ab'}{a'^2}1(a-a'y) + \text{Const.}$$

Aber

$$\frac{b'y-b}{a-a'y} = -\frac{b'}{a'} + \frac{ab'-a'b}{(a-a'y)a'},$$

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y}\partial y = -\frac{b'y}{a'} + \frac{ab' - a'b}{a'}\int \frac{\partial y}{a - a'y}.$$

Also

$$\frac{ab' - a'b}{a'}\int \frac{\partial y}{a - a'y} = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.}$$

oder

$$\int \frac{\partial y}{a - a'y} = -\frac{1}{a'} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

welches in der That ein sehr bekanntes Integral ist.

Was nun ferner die zweite der beiden obigen Formeln betrifft; so bemerke man zuerst die beiden folgenden leicht zu rechtfertigenden Gleichungen:

$$A = \frac{a'b - ab'}{2a'^2} + \frac{(a'b - ab')(\alpha + \beta) + 2a'c - 2ac'}{2(\alpha - \beta)a'^2},$$

$$B = \frac{a'b - ab'}{2a'^2} - \frac{(a'b - ab')(\alpha + \beta) + 2a'c - 2ac'}{2(\alpha - \beta)a'^2}.$$

Also ist

$$A l\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + B l\frac{y_1 - \beta}{y_2 - \beta}$$

$$= \frac{a'b - ab'}{2a'^2} l\frac{(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta)} + \frac{(a'b - ab')(\alpha + \beta) + 2a'c - 2ac'}{2(\alpha - \beta)a'^2} l\frac{(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta)}$$

oder, weil nach der Theorie der Gleichungen

$$\alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}$$

ist,

$$A l\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + B l\frac{y_1 - \beta}{y_2 - b}$$

$$= \frac{a'b - ab'}{2a'^2} l\frac{(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta)} + \frac{2a'^2c + ab'^2 - 2aa'c' - a'bb'}{2(\alpha - \beta)a'^3} l\frac{(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta)}.$$

Setzt man nun

$$(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta) = y_1 y_1 - (\alpha + \beta)y_1 + \alpha\beta,$$
$$(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta) = y_2 y_2 - (\alpha + \beta)y_2 + \alpha\beta,$$
$$(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta) = y_1 y_2 - \beta y_1 - \alpha y_2 + \alpha\beta,$$
$$(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta) = y_1 y_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + \alpha\beta,$$

und bemerkt, daß nach der Theorie der Gleichungen

$$\alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}, \quad \alpha\beta = \frac{c'}{a};$$

$$\alpha = -\frac{b'}{2a'} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \beta = -\frac{b'}{2a'} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ist; so findet nach gehöriger Entwickelung

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a}$$

$$= \frac{v}{a'} + \frac{a'b - ab'}{2a'^2} l \frac{(ab' - a'b + a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c + b'v)(a'y - a)}{(ab' - a'b - a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c - b'v)(a'y - a)}$$

$$+ \frac{2a'^3c + ab'^2 - 2aa'c' - a'bb'}{2(\alpha - \beta)a'^3} l \frac{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' - (\alpha - \beta)a'v}{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' + (\alpha - \beta)a'v},$$

wo noch die gewöhnliche willkührliche Constante beizufügen ist.

Wir wollen nun noch den Fall besonders betrachten, wenn $\alpha = \beta$, d. i. wenn

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha)^2$$

ist. In diesem Falle ist, wenn wir jetzt

$$\frac{a'b - ab'}{a'^2} = A, \quad \frac{a'c - ac'}{a'^2} = B$$

setzen,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{a}{a'} + \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2},$$

und folglich

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \partial x = F(x) = \frac{ax}{a'} + \int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x.$$

Aber

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x = \int \frac{A(x - \alpha) + A\alpha + B}{(x - \alpha)^2} \partial x$$

$$= A \int \frac{\partial x}{x - \alpha} + (A\alpha + B) \int \frac{\partial x}{(x - \alpha)^2}$$

$$= A l(x - \alpha) + (A\alpha + B) \int \frac{\partial z}{z^2},$$

wenn wir $x - \alpha = z$ setzen. Also ist

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} \partial x = A l(x - \alpha) - \frac{A\alpha + B}{x - \alpha}$$

und folglich

$$F(x) = \frac{ax}{a'} - \frac{A\alpha + B}{x - \alpha} + A l(x - \alpha).$$

Also ist nach (1.), wenn wir wieder $X = x$ setzen,

$$\int y_i \partial y = y y_i - \frac{a y_i}{a'} + \frac{A\alpha + B}{y_i - \alpha} - A l(y_i - \alpha) + C$$

$$= (a'y - a)\frac{y_i'}{a'} - \frac{A\alpha + B}{y_i - \alpha} - A l(y_i - \alpha) + C.$$

Setzen wir nun

$$y_1 = \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)} \text{ und } y_2 = \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)}$$

für y_1; so erhalten wir

$$\int \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)} \partial y$$

$$= -\frac{b'y - b + v}{2a'} + \frac{A\alpha + B}{y_1 - \alpha} - A\,l(y_1 - \alpha) + \text{Const.},$$

$$\int \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)} \partial y$$

$$= -\frac{b'y - b - v}{2a'} + \frac{A\alpha + B}{y_2 - \alpha} - A\,l(y_2 - \alpha) + \text{Const.},$$

woraus mittelst Addition und Subtraction ferner

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = \frac{b - b'y}{a'} + (A\alpha + B)\left\{\frac{1}{y_1 - \alpha} + \frac{1}{y_2 - \alpha}\right\}$$
$$- A\,l\{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)\} + \text{Const.},$$

$$\int \frac{v \partial y}{a'y - a}$$

$$= \frac{v}{a'} - (A\alpha + B)\left\{\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha}\right\} + A\,l\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + \text{Const.}$$

folgt.

Ganz wie oben überzeugt man sich nun, daß

$$(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha) = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a - a'y}$$

ist. Weil ferner

$$x^2 + \frac{b'}{a'}x + \frac{c'}{a'} = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

ist; so ist

$$\alpha = -\frac{b'}{2a'},\quad \alpha^2 = \frac{c'}{a'}.$$

Also ist

$$y_1 + y_2 - 2\alpha = \frac{b'y - b}{a - a'y} + \frac{b'}{a'} = \frac{ab' - a'b}{a'(a - a'y)},$$

und folglich

$$\frac{1}{y_1 - \alpha} + \frac{1}{y_2 - \alpha} = \frac{y_1 + y_2 - 2\alpha}{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)} = \frac{ab' - a'b}{a'(a\alpha^2 + b\alpha + c)},$$

d. i. eine constante Größe. Nun ist ferner

$$l\{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)\} = l(a\alpha^2 + b\alpha + c) - l(a - a'y),$$

wo der erste Theil auch eine constante Größe ist. Also läßt sich die erste der beiden obigen Gleichungen offenbar auf folgende Art schreiben:

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y}\partial y = -\frac{b'y}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.}$$

oder

$$\int \frac{b'y - b}{a - a'y}\partial y + \int \frac{b'}{a'}\partial y = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

d. i., wie man leicht findet,

$$\frac{ab' - a'b}{a'} \int \frac{\partial y}{a - a'y} = \frac{a'b - ab'}{a'^2} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

oder

$$\int \frac{\partial y}{a - a'y} = -\frac{1}{a'} l(a - a'y) + \text{Const.},$$

ganz derselbe Ausdruck, welchen wir schon oben gehabt haben.

Was nun ferner die zweite der beiden obigen Formeln betrifft; so ist zuvörderst

$$\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha} = \frac{y_2 - y_1}{(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)} = -\frac{v}{a\alpha^2 + b\alpha + c}.$$

Ferner ist

$$A\alpha + B = \frac{(a'b - ab')\alpha + a'c - ac'}{a'^2}.$$

Aber $b' = -2a'\alpha$, $c' = a'\alpha^2$. Also

$$(a'b - ab')\alpha + a'c - ac' = a'(a\alpha^2 + b\alpha + c),$$

und folglich

$$A\alpha + B = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'}.$$

Also ist

$$(A\alpha + B)\left\{\frac{1}{y_1 - \alpha} - \frac{1}{y_2 - \alpha}\right\} = -\frac{v}{a'},$$

und daher

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a} = \frac{2v}{a'} + Al\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} + \text{Const.}$$

Weil nun

$$y_1 - \alpha = y_1 + \frac{b'}{2a'} = \frac{a'(b'y - b + v) + b'(a - a'y)}{2a'(a - a'y)},$$

$$y_2 - \alpha = y_2 + \frac{b'}{2a'} = \frac{a'(b'y - b - v) + b'(a - a'y)}{2a'(a - a'y)}$$

ist; so ist

$$\int \frac{v\partial y}{a'y - a} = \frac{2v}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} l\frac{a'(b'y - b + v) + b'(a - a'y)}{a'(b'y - b - v) + b'(a - a'y)} + \text{Const.}$$

Man hat zu merken, daß in dem hier betrachteten Falle, wo

$$b' = -\frac{b'}{2a'},\ a^2 = \frac{c'}{a'}$$

ist, zwischen den Größen a', b', c' die Relation $b'^2 = 4a'c'$ Statt findet.

3. Wir wollen nun ferner annehmen, daß zwischen x und y die Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l')y^2$$

gegeben sey, indem wir wie vorher auch hier wieder

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l'} = f(x)$$

setzen. Auch behalten y_i und Y_i die ihnen beigelegte Bedeutung. Setzen wir nun

$$\int \{f(x)\}^{\frac{1}{2}} \partial X = \psi(x)\ ;$$

so ergiebt sich, weil $y = \{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$ ist, wenn man y_i für x setzt, aus der Gleichung

$$\int X \partial y + \int y \partial X = Xy + C$$

auf der Stelle die Gleichung

$$\int Y_i \partial y + \psi(y_i) = yY_i + C\ ,$$

und diese Gleichung gilt immer, wenn man für i eine der Zahlen 1, 2, 3, ... n setzt. Setzt man nun nach der Reihe alle diese Zahlen für i und addirt dann alle erhaltenen Gleichungen zusammen; so ergiebt sich, indem man der Kürze wegen

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + .. + Y_n = Y$$

setzt, die Gleichung

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) + \psi(y_3) + .. + \psi(y_n) = yY - \int Y \partial y + C\ .$$

Da Y_i eine rationale Function von y_i ist; so ist die Summe Y offenbar eine rationale symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + .. + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + .. + k'x + l')y^2$$

oder

$$(a - a'y^2)x^n + (b - b'y^2)x^{n-1} + .. + (k - k'y^2)x + l - l'y^2 = 0,$$

und kann also, wie die Theorie der Gleichungen (Gleichung III. i. d. Z.) lehrt, jederzeit aus den Coefficienten dieser Gleichung ohne Schwierigkeit gefunden werden, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Nach bekannten Regeln der Integralrechnung läßt sich nun offenbar auch immer $\int Y \partial y$ unter einer endlichen völlig ent-

wickelten Form darstellen, und man kann also nach dem Vorhergehenden immer die Summe

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) + \psi(y_3) + \cdots + \psi(y_n)$$

unter einer endlichen völlig entwickelten Form als eine Function von y darstellen, welches in Bezug auf die einzelnen Theile dieser Summe, d. h. überhaupt in Bezug auf das Integral $\psi(x)$, keineswegs der Fall ist, so daß wir also hierdurch zu einem neuen allerdings sehr merkwürdigen Satze gelangt sind.

4. Als Beispiel zu dem Vorhergehenden betrachtet Poisson die Gleichung

$$(1-x)(h-x) = (1+x)(h+x)y^2 ,$$

oder, wenn wir

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = p$$

setzen, die Gleichung

$$x^2 - (1+h)px + h = 0 ,$$

deren Wurzeln

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h} ,$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h}$$

sind. Setzen wir nun wieder $X = x$; so ist

$$Y = y_1 + y_2 = (1+h)p = (1+h).\frac{1+y^2}{1-y^2} .$$

Weil nun

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = -1 + \frac{2}{1-y^2} = -1 + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}$$

ist; so ist

$$\int \frac{1+y^2}{1-y^2}\partial y = -y + \int \frac{\partial y}{1-y} + \int \frac{\partial y}{1+y} ,$$

$$= -y - l(1-y) + l(1+y) = -y + l\frac{1+y}{1-y}$$

und folglich

$$\int Y\partial y = -(1+h)y + (1+h)l\frac{1+y}{1-y} .$$

Für

$$\psi(x) = \int \partial x \sqrt{\frac{(1-x)(h-x)}{(1+x)(h+x)}}$$

ist also nach der in (3) bewiesenen Gleichung im vorliegenden Falle

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{(1+y^2)y}{1-y^2} + y - l\frac{1+y}{1-y}\right\} + C$$

oder

$$\psi(y_1) + \psi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{2y}{1-y^2} - l\frac{1+y}{1-y}\right\} + C .$$

Um diese Gleichung zu verificiren, setzt Poisson

$$\int \frac{(h+x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}} = \varphi(x), \quad \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}} = \varphi'(x)$$

und findet

$$\psi(x) = \varphi(x) - (1+h)\varphi'(x).$$

Führt man diesen Ausdruck in die in Rede stehende Gleichung ein; so erhält man

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = (1+h)\left\{\frac{2y}{1-y^2} - l\frac{1+y}{1-y} + \varphi'(y_1) + \varphi'(y_2)\right\} + C.$$

Nun ist

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l\{2x^3 - 1 - h^2 + 2\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}\},$$

wovon man sich leicht durch Differentiation überzeugen wird.

Wegen der Gleichung

$$x^2 - (1+h)px + h = 0$$

ist aber

$$1 - x^2 = (1+h)(1-px), \quad h^2 - x^2 = (1+h)(h-px).$$

Auch ist

$$2x^3 - 1 - h^2 = 2(1+h)px - 2h - 1 - h^2$$
$$= 2(1+h)px - (1+h)^2 = (1+h)(2px - 1 - h),$$

und folglich

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l\{2px - 1 - h + 2\sqrt{(1-px)(h-px)}\}.$$

Ferner ist vermöge obiger Gleichung

$$(1-px)(h-px) = h - (1+h)px + p^2x^2$$
$$= -x^2 + p^2x^2 = x^2(p^2-1).$$

Also ist

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l\{2x(p + \sqrt{p^2-1}) - 1 - h\},$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$p + \sqrt{p^2-1} = \frac{1+y}{1-y} = q$$

setzen,

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l(2qx - 1 - h).$$

Also ist

$$\varphi'(y_1) + \varphi'(y_2) = \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l(2qy_1 - 1 - h)$$
$$+ \tfrac{1}{2} l(1+h) + \tfrac{1}{2} l(2qy_2 - 1 - h)$$
$$= l(1+h) + \tfrac{1}{2} l\{(2qy_1 - 1 - h)(2qy_2 - 1 - h)\}$$
$$= l(1+h) + \tfrac{1}{2} l\{4q^2 y_1 y_2 - 2q(1+h)(y_1+y_2) + (1+h)^2\}.$$

Weil aber y_1 und y_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - (1+h)px + h = 0$$

sind; so ist nach der Theorie der Gleichungen

$$y_1 + y_2 = (1+h)p, \quad y_1 y_2 = h,$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&4q^2y_1y_2 - 2q(1+h)(y_1+y_2) + (1+h)^2 \\
&= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - 2.\frac{1+y}{1-y}.\frac{1+y^2}{1-y^2}.(1+h)^2 + (1+h)^2 \\
&= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - 2.\frac{1+y^2}{(1-y)^2}.(1+h)^2 + (1+h)^2 \\
&= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - (1+h)^2.\left\{\frac{2(1+y^2)}{(1-y)^2} - 1\right\} \\
&= 4.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.h - \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2.(1+h)^2 \\
&= -(1-h)^2.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2,
\end{aligned}$$

wobei wir bemerken, daß Poisson sagt, daß die so eben entwickelte Größe

$$4q^2y_1y_2 - 2q(1+h)(y_1+y_2) + (1+h)^2$$

dem Quadrat der Größe

$$(1-h).\frac{1+y}{1-y}$$

gleich sey, welches, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, nicht der Fall ist, und in einem Rechnungsfehler bei Poisson seinen Grund haben muß. Wir erhalten also jetzt nach dem Obigen

$$\varphi'(y_1) + \varphi'(y_2) = l(1+h) + l\{(1-h)\sqrt{-1}\} + l\frac{1+y}{1-y},$$

und folglich, wenn man die Größe

$$(1+h)l(1+h) + (1+h)l\{(1-h)\sqrt{-1}\}$$

mit in der Constante begreift,

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \frac{2(1+h)y}{1-y^2} + C.$$

Denken wir uns aber die Integrale $\varphi(y_1)$ und $\varphi(y_2)$ so bestimmt, daß sie für $y = 0$ verschwinden; so ist $C = 0$ und folglich

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \frac{2(1+h)y}{1-y^2},$$

immer unter der Voraussetzung, daß die Integrale auf die angegebene Weise bestimmt sind.

Weil nun

$$p = \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

und

$$\begin{aligned}
y_1 &= \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h}, \\
y_2 &= \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h}
\end{aligned}$$

ist; so ist für $y = 0$ offenbar $y_1 = 1$ und $y_2 = h$. Also sind die auf die vorher angegebene Art bestimmten Integrale $\varphi(y_1)$ und $\varphi(y_2)$ offenbar das respective zwischen den Gränzen $x = 1$, $x = y_1$ und $x = h$, $x = y_2$ genommene Integral $\varphi(x)$, und folglich

$$\int_1^{y_1} \frac{(h + x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)}} + \int_h^{y_2} \frac{(h + x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)}} = \frac{2(1 + h)\,y}{1 - y^2}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach y; so erhält man

$$\frac{(h + y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)}} + \frac{(h + y_2^2)\,\partial y_2}{\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)}} = \frac{2(1 + h)(1 + y^2)\partial y}{(1 - y^2)^2}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$(1 + h^2)\,p^2 - 4h = P;$$

so ist

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1 + h)\,p + \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)\,p - \tfrac{1}{2}\sqrt{P}.$$

Differentiirt man nun nach p; so findet man:

$$\partial y_1 = (1 + h)\,\partial p \cdot \frac{\sqrt{P} + (1 + h)\,p}{2\sqrt{P}},$$

$$\partial y_2 = (1 + h)\,\partial p \cdot \frac{\sqrt{P} - (1 + h)\,p}{2\sqrt{P}},$$

oder

$$\partial y_1 = \frac{(1 + h)\,y_1\,\partial p}{\sqrt{P}}, \quad \partial y_2 = -\frac{(1 + h)\,y_2\,\partial p}{\sqrt{P}}.$$

Ferner findet man

$$h + y_1^2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)\,p\,\{(1 + h)\,p + \sqrt{P}\},$$
$$h + y_2^2 = \tfrac{1}{2}(1 + h)\,p\,\{(1 + h)\,p - \sqrt{P}\},$$

d. i.

$$h + y_1^2 = (1 + h)\,p y_1, \quad h + y_2^2 = (1 + h)\,p y_2.$$

Auch ist nach dem Obigen

$$(1 - x^2)(h^2 - x^2) = (1 + h)^2 (1 - px)(h - px)$$
$$= (1 + h)^2 x^2 (p^2 - 1),$$
$$\sqrt{(1 - x^2)(h^2 - x^2)} = (1 + h)\,x\sqrt{p^2 - 1}.$$

Folglich ist

$$\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)} = (1 + h)\,y_1\sqrt{p^2 - 1},$$
$$\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)} = (1 + h)\,y_2\sqrt{p^2 - 1},$$

und nach leichter Rechnung ergiebt sich nun

$$\frac{(h + y_1^2)\,\partial y_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(h^2 - y_1^2)}} + \frac{(h + y_2^2)\,\partial y_2}{\sqrt{(1 - y_2^2)(h^2 - y_2^2)}}$$
$$= \frac{(1 + h)\,y_1\,p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}} - \frac{(1 + h)\,y_2\,p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}} = (y_1 - y_2) \cdot \frac{(1 + h)\,p\partial p}{\sqrt{(p^2 - 1)P}}$$
$$= \frac{(1 + h)\,p\partial p}{\sqrt{p^2 - 1}},$$

weil $y_1 - y_2 = \sqrt{P}$ ist. Es ist aber

$$p = \frac{1+y^2}{1-y^2},\ \sqrt{p^2-1} = \frac{2y}{1-y^2},\ \partial p = \frac{4y}{(1-y^2)^2}.$$

Also ist

$$\frac{p\partial p}{\sqrt{p^2-1}} = \frac{2(1+y^2)}{(1-y^2)^2},$$

und folglich wirklich

$$\frac{(1+h)p\partial p}{\sqrt{p^2-1}} = \frac{2(1+h)(1+y^2)\partial y}{(1-y^2)^2},$$

wie es nach dem Obigen seyn muß, wenn unsere Gleichung richtig seyn soll, so daß dieselbe also hierdurch verificirt ist.

Wenn wir

$$(1-x)(x-h) = (1+x)(x+h)y^2$$

setzen; so ist immer

$$\int_1^y \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} + \int_h^{y_2} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)}} = -\frac{2(1+h)y}{1+y^2},$$

wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Die gegebene Gleichung läßt sich nämlich leicht auf die Form

$$x^2 - (1+h)px + h = 0$$

bringen, wo nun aber

$$p = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt ganz wie vorher, wenn wir ihre beiden Wurzeln wieder durch y_1 und y_2 bezeichnen,

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+h)^2p^2 - 4h},$$

oder, indem wir wieder der Kürze wegen

$$(1+h)^2p^2 - 4h = P$$

setzen,

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(1+h)p + \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+h)p - \tfrac{1}{2}\sqrt{P},$$

und hieraus ganz eben so wie vorher

$$\partial y_1 = \frac{(1+h)y_1\partial p}{\sqrt{P}},\ \partial y_2 = -\frac{(1+h)y_2\partial p}{\sqrt{P}};$$

$$h + y_1^2 = (1+h)py_1,\ h + y_2^2 = (1+h)py_2.$$

Auch findet man ganz eben so wie vorher die Gleichung

$$(1-x^2)(h^2-x^2) = (1+h)^2x^2(p^2-1)$$

oder

$$(1-x^2)(x^2-h^2) = (1+h)^2x^2(1-p^2),$$
$$\sqrt{(1-x^2)(x^2-h^2)} = (1+h)x\sqrt{1-p^2},$$

und folglich

$$\gamma(1-y_1^2)(y_1^2-h^2) = (1+h)\,y_1\gamma 1-p^2,$$
$$\gamma(1-y_2^2)(y_2^2-h^2) = (1+h)\,y_2\gamma 1-p^2.$$

Also ist

$$\frac{(h+y_1^2)\partial y_1}{\gamma(1-y_1^2)(y_1^2-h^2)} + \frac{(h+y_2^2)\partial y_2}{\gamma(1-y_2^2)(y_2^2-h^2)}$$
$$= (y_1-y_2)\cdot\frac{(1+h)\,p\,\partial p}{\gamma(1-p^2)\,P} = \frac{(1+h)\,p\,\partial p}{\gamma 1-p^2}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet,

$$p = \frac{1-y^2}{1+y^2},\quad \gamma 1-p^2 = \frac{2y}{1+y^2},\quad \partial p = -\frac{4y\,\partial y}{(1+y^2)^2}.$$

Also ist

$$\frac{(h+y_1^2)\partial y_1}{\gamma(1-y_1^2)(y_1^2-h^2)} + \frac{(h+y_2^2)\partial y^2}{\gamma(1-y_2^2)(y_2^2-h^2)} = -\frac{2(1+h)(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2},$$

woraus sich ferner, wenn man zwischen den Gränzen 0 und y integrirt, leicht

$$\int_1^{y_1}\frac{(h+x^2)\partial x}{\gamma(1-x^2)(x^2-h^2)} + \int_h^{y_2}\frac{(h+x^2)\partial x}{\gamma(1-x^2)(x^2-h^2)} = -2(1+h)\int_0^y\frac{(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2}$$

ergiebt. Weil nun

$$\partial.\frac{y}{1+y^2} = \frac{(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2},$$

und folglich

$$\int_0^y\frac{(1-y^2)\partial y}{(1+y^2)^2} = \frac{y}{1+y^2}$$

ist; so ist

$$\int_1^{y_1}\frac{(h+x^2)\partial x}{\gamma(1-x^2)(x^2-h^2)} + \int_h^{y_2}\frac{(h+x^2)\partial x}{\gamma(1-x^2)(x^2-h^2)} = -\frac{2(1+h)\,y}{1+y^2}.$$

wie bewiesen werden sollte.

Diese letztere Gleichung hat Poisson auch noch mitteist der elliptischen Functionen verificirt, und theilt in seiner Abhandlung namentlich auch noch einen dem berühmten Abelschen Theorem, von welchem im Artikel Elliptische Functionen. XXI. ausführlich die Rede gewesen ist, ähnlichen Satz mit, eine Untersuchung, in welcher wir ihm hier der Beschränktheit des Raumes wegen nicht weiter folgen können, sondern uns mit einer Hinweisung auf das Abelsche Theorem selbst a. a. O. begnügen müssen.

5. Zu den schönsten neuern Arbeiten über die Integralrechnung gehört unstreitig die merkwürdige Transformation des wichtigen irrationalen Differentials

$$\frac{\partial E}{\gamma(A-a\cos E)^2+(B-b\sin E)^2+C^2},$$

welche sich aus der berühmten Abhandlung von Gauß: Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta, si ejus massa per totam orbitam, ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita. Comment. soc. reg. gott. recent. Vol. IV. Gott. 1820. p. 21. ergiebt. Diese merkwürdige Transformation und die daraus gezogenen Folgerungen wollen wir daher hier in aller Ausführlichkeit mittheilen. Gauß führt statt der veränderlichen Größe **E** eine andere veränderliche Größe **T** ein, und setzt zu dem Ende, indem $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ constante Größen bezeichnen,

$$\cos \mathrm{E} = \frac{\alpha + \alpha' \cos \mathrm{T} + \alpha'' \sin \mathrm{T}}{\gamma + \gamma' \cos \mathrm{T} + \gamma'' \sin \mathrm{T}},$$

$$\sin \mathrm{E} = \frac{\beta + \beta' \cos \mathrm{T} + \beta'' \sin \mathrm{T}}{\gamma + \gamma' \cos \mathrm{T} + \gamma'' \sin \mathrm{T}},$$

wo nun aber auf der Stelle erhellet, daß die constanten Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ nicht ganz unabhängig von einander seyn können, und es also zunächst darauf ankommt, die Abhängigkeit dieser neun constanten Coefficienten von einander näher zu untersuchen.

Da man, ohne die Werthe von $\cos \mathrm{E}$ und $\sin \mathrm{E}$ zu ändern, alle constanten Coefficienten mit einerlei Zahl multipliciren kann; so könnte man einem derselben einen bestimmten Werth beilegen, z. B. $\gamma = 1$ setzen. Gauß läßt aber der größern Gleichförmigkeit der Rechnung wegen für's Erste alle neun Coefficienten unbestimmt, welches bekanntlich öfters in ähnlichen Fällen mit besonderm Vortheil geschieht. Ferner erhellet, daß weder die Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$, noch die Größen β, β', β'', den Größen $\gamma, \gamma', \gamma''$ proportional seyn dürfen. Wäre nämlich z. B. das Erste der Fall, d. i.

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\alpha''}{\gamma''} = \lambda$$

oder

$$\alpha = \gamma\lambda, \quad \alpha' = \gamma'\lambda, \quad \alpha'' = \gamma''\lambda;$$

so wäre $\cos \mathrm{E} = \lambda$ und folglich **E** keine variable Größe mehr, welches offenbar ungereimt ist. Also dürfen weder die Größen

$$\alpha\gamma' - \alpha'\gamma, \quad \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma, \quad \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma',$$

noch die Größen

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma, \quad \beta\gamma'' - \beta''\gamma, \quad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma',$$

zugleich verschwinden.

Aus den beiden Ausdrücken von $\cos \mathrm{E}$ und $\sin \mathrm{E}$ ergiebt sich auf der Stelle die Bedingungsgleichung

$$\left\{\frac{\alpha + \alpha' \cos \mathrm{T} + \alpha'' \sin \mathrm{T}}{\gamma + \gamma' \cos \mathrm{T} + \gamma'' \sin \mathrm{T}}\right\}^2 + \left\{\frac{\beta + \beta' \cos \mathrm{T} + \beta'' \sin \mathrm{T}}{\gamma + \gamma' \cos \mathrm{T} + \gamma'' \sin \mathrm{T}}\right\}^2 = 1$$

oder

$$(\alpha+\alpha'\cos T+\alpha''\sin T)^2+(\beta+\beta'\cos T+\beta''\sin T)^2-(\gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T)^2=0,$$

welche für jedes T Statt finden muß. Entwickelt man die Quadrate, und ordnet gehörig; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha\alpha + \beta\beta - \gamma\gamma & & + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma')\cos T \\ + (\alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma')\cos T^2 & + 2(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' - \gamma\gamma'')\sin T & \\ + (\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' - \gamma''\gamma'')\sin T^2 & + 2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' - \gamma'\gamma'')\cos T\sin T & \end{array}\right\} = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$a + b\cos T^2 + c\sin T^2 + 2a'\cos T + 2b'\sin T + 2c'\cos T\sin T = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung, welche für jedes T Statt finden muß, nach der Reihe $T = 0$, $T = \frac{1}{4}\pi$, $T = \pi$, $T = \frac{3}{4}\pi$; so erhält man

$$\begin{aligned} a + b + 2a' &= 0, \\ a + c + 2b' &= 0, \\ a + b - 2a' &= 0, \\ a + c - 2b' &= 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraction der ersten und dritten, und zweiten und vierten Gleichung von einander folgt auf der Stelle

$$a' = 0,\ b' = 0,$$

so daß also für jedes T

$$a + b\cos T^2 + c\sin T^2 + 2c'\cos T\sin T = 0$$

ist. Setzt man nun in dieser Gleichung zuerst $T = +\frac{1}{4}\pi$, dann $T = -\frac{1}{4}\pi$; so erhält man

$$\begin{aligned} a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c + c' &= 0, \\ a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c - c' &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich auf der Stelle

$$c' = 0$$

ergiebt, und folglich für jedes T

$$a + b\cos T^2 + c\sin T^2 = 0$$

ist. Setzt man nun in dieser Gleichung zuerst $T = 0$, dann $T = \frac{1}{2}\pi$; so ergiebt sich

$$a + b = 0,\ a + c = 0,$$

d. i.

$$-a = b = c,$$

so daß also, wenn wir

$$-a = b = c = k$$

setzen, für jedes T

$$k(\cos T^2 + \sin T^2 - 1) = 0$$

ist. Aus dieser Betrachtung ergeben sich nun auch unmittelbar

die folgenden sechs zwischen den neun constanten Coefficienten Statt findenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl} -\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma = & k \\ -\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma' = & -k \\ -\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' = & -k \\ -\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = & 0 \\ -\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma = & 0 \\ -\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' = & 0 \end{array}\right\} \text{(I)}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' - \alpha\beta''\gamma' - \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta'\gamma = \varepsilon;$$

so erhalten wir aus den vorhergehenden sechs Gleichungen sehr leicht die folgenden neun Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl} \varepsilon\alpha = & -k(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') \\ \varepsilon\beta = & -k(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') \\ \varepsilon\gamma = & +k(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \\ \varepsilon\alpha' = & +k(\beta''\gamma - \gamma''\beta) \\ \varepsilon\beta' = & +k(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma) \\ \varepsilon\gamma' = & -k(\alpha''\beta - \beta''\alpha) \\ \varepsilon\alpha'' = & +k(\beta\gamma' - \gamma\beta') \\ \varepsilon\beta'' = & +k(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') \\ \varepsilon\gamma'' = & -k(\alpha\beta' - \beta\alpha') \end{array}\right\} \text{(II)}.$$

Es ist nämlich, um nur etwa die erste dieser neun Gleichungen zu beweisen,

$$\varepsilon\alpha = \alpha\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \alpha\alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'') + \alpha\alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma),$$

d. i. nach der ersten, sechsten und fünften der Gleichungen I.:

$$\begin{aligned} \varepsilon\alpha &= (-k + \gamma\gamma - \beta\beta)(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') \\ &\quad + (\gamma\gamma' - \beta\beta')(\beta'\gamma - \beta\gamma'') \\ &\quad + (\gamma''\gamma - \beta''\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) \\ &= -k(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + (\gamma\gamma - \beta\beta)(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') \\ &\quad + (\gamma\gamma' - \beta\beta')(\beta''\gamma - \beta\gamma'') \\ &\quad + (\gamma''\gamma - \beta''\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma). \end{aligned}$$

Entwickelt man nun die drei letzten Producte auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens; so findet man, daß alle Glieder derselben sich gegenseitig aufheben, und folglich

$$\varepsilon\alpha = -k(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')$$

ist. Die übrigen der obigen neun Gleichungen können ganz auf dieselbe Art bewiesen werden.

Aus den drei ersten dieser neun Gleichungen ergiebt sich nun ferner die Gleichung

$$\varepsilon\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \varepsilon\beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \varepsilon\gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')$$
$$= -k(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 - k(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 + k(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 ,$$

welche sich leicht auf die Form

$$\varepsilon^2 = k(-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma')(-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')$$
$$- k(-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2$$

bringen läßt, so daß also, wie hieraus mittelst der Gleichungen I unmittelbar folgt,

$$\varepsilon^2 = k^3 \ldots\ldots \text{(III)}$$

ist.

Nach der vierten, zweiten und dritten der Gleichungen I ist

$$(\gamma'\gamma'' - \beta'\beta'')^2 - (\gamma'\gamma' - \beta'\beta')(\gamma''\gamma'' - \beta''\beta'')$$
$$= \alpha'\alpha'\alpha''\alpha'' - (\alpha'\alpha' - k)(\alpha''\alpha'' - k) ,$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich nach gehöriger Entwickelung auf der Stelle

$$(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = -k(k - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'') .$$

Auf diese Weise erhält man aus den Gleichungen I überhaupt die folgenden neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = -k(k - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'') \\
(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')^2 = -k(k - \beta'\beta' - \beta''\beta'') \\
(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 = +k(k + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'') \\
(\beta''\gamma - \gamma''\beta)^2 = +k(k + \alpha\alpha - \alpha''\alpha'') \\
(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)^2 = +k(k + \beta\beta - \beta''\beta'') \\
(\alpha''\beta - \beta''\alpha)^2 = -k(k - \gamma\gamma + \gamma''\gamma'') \\
(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 = +k(k + \alpha\alpha - \alpha'\alpha') \\
(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 = +k(k + \beta\beta - \beta'\beta') \\
(\alpha\beta' - \beta\alpha'')^2 = -k(k - \gamma\gamma + \gamma'\gamma')
\end{array}\right\} \text{(IV.)} .$$

Wäre $k = 0$, so würden die Größen

$$\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'',\ \beta''\gamma - \gamma''\beta,\ \beta\gamma' - \gamma\beta' ;$$
$$\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'',\ \gamma''\alpha - \alpha''\gamma,\ \gamma\alpha' - \alpha\gamma' ;$$
$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',\ \alpha''\beta - \beta''\alpha,\ \alpha\beta' - \beta\alpha' ;$$

oder

$$\alpha\gamma' - \alpha'\gamma,\ \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma,\ \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma' ;$$
$$\beta\gamma' - \beta'\gamma,\ \beta\gamma'' - \beta''\gamma,\ \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' ;$$

und, was hieraus folgt,

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta,\ \alpha\beta'' - \alpha''\beta,\ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$$

zugleich verschwinden, welches, wie wir aus dem Obigen wissen, nicht der Fall seyn darf. Deshalb darf also auch k nicht $= 0$ seyn. Weil nun $\varepsilon^2 = k^3$ ist; so ist k auch offenbar positiv, und muß folglich jederzeit eine positive Größe seyn, die nicht $= 0$ ist.

Wegen der ersten Gleichung in II und IV ist

$$\varepsilon^3 \alpha\alpha = kk(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2,$$
$$kk(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 = -k^3(k - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'').$$

Also ist

$$\varepsilon^2 \alpha\alpha = -k^3(k - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''),$$

und folglich, weil $\varepsilon^2 = k^3$ und, wie wir so eben gesehen haben, k nicht $= 0$ ist:

$$\alpha\alpha = -k + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha''$$

oder

$$\alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' = -k.$$

Auf diese Art erhält man überhaupt aus den drei ersten Gleichungen in II. und IV:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' &= -k \\ \beta\beta - \beta'\beta' - \beta''\beta'' &= -k \\ \gamma\gamma - \gamma'\gamma' - \gamma''\gamma'' &= +k \end{aligned}\right\} \text{(V)}.$$

Die übrigen Gleichungen in II und IV würden dieselben Gleichungen geben.

Nach der zweiten, fünften und achten der Gleichungen II hat man:

$$\varepsilon\beta\gamma = -k\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''),$$
$$\varepsilon\beta'\gamma' = +k\gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma),$$
$$\varepsilon\beta''\gamma'' = +k\gamma''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma').$$

Also ist

$$\varepsilon(\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'')$$
$$= -k\{\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma) + \gamma''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\};$$

folglich

$$\varepsilon(\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'') = 0;$$

also, weil k, und folglich wegen $\varepsilon^2 = k^3$ auch ε nicht $= 0$ ist,

$$\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = 0.$$

Auf diese Weise erhält man überhaupt aus den Gleichungen II:

$$\left.\begin{aligned} \beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' &= 0 \\ \gamma\alpha - \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'' &= 0 \\ \alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(VI)}.$$

Weil man nach einer schon oben gemachten Bemerkung die constanten Coefficienten sämmtlich mit einerlei Zahl multipliciren kann, wodurch der Werth von k offenbar mit dem Quadrate dieser Zahl multiplicirt wird; so ist es, wie von nun an auch immer geschehen soll, verstattet, $k = 1$, und folglich $\varepsilon = \pm 1$ zu setzen. Dadurch gehen die sechs ersten Bedingungsgleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma &= 1 \\ -\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma' &= -1 \\ -\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' &= -1 \\ -\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0 \\ -\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0 \\ -\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

Bezeichnen wir nun die Größe

$$\sqrt{(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2}$$

durch ϱ und führen in dieselbe für $\cos E$ und $\sin E$ ihre obigen Ausdrücke ein; so erhalten wir für ϱ offenbar einen Ausdruck von der Form

$$\varrho = \frac{\sqrt{G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2 + 2H\cos T\sin T + 2H'\sin T + 2H''\cos T}}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T},$$

und wollen nun die neun constanten Coefficienten α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' auf eine solche Weise zu bestimmen suchen, daß, außer den sechs Gleichungen VII, auch noch den drei Gleichungen

$$H = 0, \quad H' = 0, \quad H'' = 0$$

genügt wird, wodurch das Problem, da wir jetzt neun Gleichungen zwischen neun unbekannten Größen haben, offenbar im Allgemeinen eine bestimmte Aufgabe wird. Sehr leicht sieht man aber, daß es überhaupt bloß darauf ankommt, die neun constanten Coefficienten so zu bestimmen, daß den sechs Gleichungen VII genügt wird, und daß, indem wir

$$\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T = t$$

setzen, die Größe

$$(A^2 + B^2 + C^2)t^2 + a^2(t\cos E)^2 + b^2(t\sin E)^2 - 2aAt.t\cos E - 2bBt.t\sin E$$

durch die Substitution von

$$\begin{aligned} t\cos E &= \alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T, \\ t\sin E &= \beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T, \\ t &= \gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T \end{aligned}$$

in eine Größe von der Form

$$G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2$$

übergeht, Bedingungen, welche offenbar jederzeit erfüllt seyn werden, wenn man die neun constanten Coefficienten so bestimmen kann, daß den sechs Gleichungen VII genügt wird, und daß überhaupt die Function

$$a^2x^2 + b^2y^2 + (A^2 + B^2 + C^2)z^2 - 2aAxz - 2Byz,$$

welche wir durch V bezeichnen wollen, durch die Substitution von

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'', \\ y &= \beta u + \beta' u' + \beta'' u'', \\ z &= \gamma u + \gamma' u' + \gamma'' u'' \end{aligned}$$

für jedes x, y, z oder jedes u, u′, u″ in eine Größe von der Form

$$Gu^2 + G'u'^2 + G''u''^2$$

übergeht. Multiplicirt man aber x, y, z nach der Reihe mit α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; so erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha x &= \alpha\alpha u + \alpha\alpha' u' + \alpha\alpha'' u'',\\
\beta y &= \beta\beta u + \beta\beta' u' + \beta\beta'' u'',\\
\gamma z &= \gamma\gamma u + \gamma\gamma' u' + \gamma\gamma'' u'',\\
\alpha' x &= \alpha\alpha' u + \alpha'\alpha' u' + \alpha'\alpha'' u'',\\
\beta' y &= \beta\beta' u + \beta'\beta' u' + \beta'\beta'' u'',\\
\gamma' z &= \gamma\gamma' u + \gamma'\gamma' u' + \gamma'\gamma'' u'',\\
\alpha'' x &= \alpha\alpha'' u + \alpha'\alpha'' u' + \alpha''\alpha'' u'',\\
\beta'' y &= \beta\beta'' u + \beta'\beta'' u' + \beta''\beta'' u'',\\
\gamma'' z &= \gamma\gamma'' u + \gamma'\gamma'' u' + \gamma''\gamma'' u'';
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&-\alpha x - \beta y + \gamma z\\
&= (-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma)u + (-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')u' + (-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')u'',\\
&\alpha' x + \beta' y - \gamma' z\\
&= -(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')u - (-\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma')u' - (-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')u'',\\
&\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z\\
&= -(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')u - (-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')u' - (-\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')u'';
\end{aligned}$$

also nach den Gleichungen **VII**:

$$\begin{aligned}
u &= -\alpha x - \beta y + \gamma z,\\
u' &= \alpha' x + \beta' y - \gamma' z,\\
u'' &= \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z.
\end{aligned}$$

Folglich muß für jedes x, y, z

$$\begin{aligned}
&a^2x^2 + b^2y^2 + (A^2 + B^2 + C^2)z^2 - 2aAxz - 2bByz\\
&= G(-\alpha x - \beta y + \gamma z)^2 + G'(\alpha' x + \beta' y - \gamma' z)^2 + G''(\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z)^2
\end{aligned}$$

seyn, woraus sich auf der Stelle die sechs folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
aa &= G\alpha\alpha + G'\alpha'\alpha' + G''\alpha''\alpha''\\
bb &= G\beta\beta + G'\beta'\beta' + G''\beta''\beta''\\
AA + BB + CC &= G\gamma\gamma + G'\gamma'\gamma' + G''\gamma''\gamma''\\
bB &= G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma''\\
aA &= G\gamma\alpha + G'\gamma'\alpha' + G''\gamma''\alpha''\\
0 &= G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta''
\end{aligned}\right\} \text{(VIII)}$$

und man sieht nun, daß unser Problem jetzt darauf zurückgeführt ist, daß die zwölf Größen $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$; G, G′, G″ so zu bestimmen sind, daß den zwölf Gleichungen **VII** und **VIII** genügt wird, woraus dann auch zugleich erhellet, daß die Aufgabe, da wir zwölf Gleichungen zwischen eben

so vielen unbekannten Größen haben, nun im Allgemeinen eine bestimmte ist. Können wir also die genannten zwölf Größen auf die angegebene Weise bestimmen; so geht die Größe

$$\varrho = \Upsilon(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2$$

durch die Substitution von

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T},$$
$$\sin E = \frac{\beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}$$

jederzeit in die Größe

$$\frac{\Upsilon G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T},$$

über, und es kommt daher nun zunächst auf die vollständige Auflösung der zwölf Gleichungen VII und VIII an.

6. Aus der ersten, fünften und sechsten der Gleichungen VIII folgt:

$$\begin{aligned} \alpha a a &= G\alpha\alpha\alpha + G'\alpha\alpha'\alpha' + G''\alpha\alpha''\alpha'', \\ \gamma a A &= G\gamma\gamma\alpha + G'\gamma\gamma'\alpha' + G''\gamma\gamma''\alpha'', \\ 0 &= G\beta\alpha\beta + G'\beta\alpha'\beta' + G''\beta\alpha''\beta'; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &-\alpha a a + \gamma a A \\ &= \alpha G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \alpha' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \alpha'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma''), \end{aligned}$$

d. i. nach den Gleichungen VII:

$$-\alpha a a + \gamma a A = \alpha G.$$

Aus der zweiten, vierten und sechsten der Gleichungen VIII erhält man:

$$\begin{aligned} \beta b b &= G\beta\beta\beta + G'\beta\beta'\beta' + G''\beta\beta''\beta'', \\ \gamma b B &= G\gamma\beta\gamma + G'\gamma\beta'\gamma' + G''\gamma\beta''\gamma'', \\ 0 &= G\alpha\beta\beta + G'\alpha\alpha'\beta' + G''\alpha\alpha''\beta''; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &-\beta b b + \gamma b B \\ &= \beta G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \beta' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \beta'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma''), \end{aligned}$$

d. i. nach den Gleichungen VII:

$$-\beta b b + \gamma b B = \beta G.$$

Endlich folgt aus der dritten, vierten und fünften der Gleichungen VIII auch:

$$\begin{aligned} \gamma(AA + BB + CC) &= G\gamma\gamma\gamma + G'\gamma\gamma'\gamma' + G''\gamma\gamma''\gamma'', \\ \beta b B &= G\beta\beta\gamma + G'\beta\beta'\gamma' + G''\beta\beta''\gamma'', \\ \alpha a A &= G\alpha\gamma\alpha + G'\alpha\gamma'\alpha' + G''\alpha\gamma''\alpha''; \end{aligned}$$

also

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB$$
$$= \gamma G(-\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma) + \gamma' G'(-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma') + \gamma'' G''(-\alpha\alpha'' - \beta\beta'' + \gamma\gamma'')$$

d. i. nach den Gleichungen VII:

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G .$$

Also haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$-\alpha aa + \gamma aA = \alpha G ,$$
$$-\beta bb + \gamma bB = \beta G ,$$
$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G ,$$

aus denen sich leicht

$$1.\ \alpha = \frac{\gamma aA}{a^2 + G},\quad 2.\ \beta = \frac{\gamma bB}{b^2 + G};$$

$$3.\ \frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1$$

ergiebt.

Auf ganz ähnliche Art findet man:

$$4.\ \alpha' = \frac{\gamma' aA}{a^2 - G'},\quad 5.\ \beta' = \frac{\gamma' bB}{b^2 - G'};$$

$$6.\ \frac{A^2}{a^2 - G'} + \frac{B^2}{b^2 - G'} - \frac{C^2}{G'} = 1 ,$$

und ganz eben so:

$$7.\ \alpha'' = \frac{\gamma'' aA}{a^2 - G''},\quad 8.\ \beta'' = \frac{\gamma'' bB}{b^2 - G''};$$

$$9.\ \frac{A^2}{a^2 - G''} + \frac{B^2}{b^2 - G''} - \frac{C^2}{G''} = 1 .$$

Betrachtet man nun die drei Gleichungen

$$\frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1 ,$$
$$\frac{A^2}{a^2 - G'} + \frac{B^2}{b^2 - G'} + \frac{C^2}{-G'} = 1 ,$$
$$\frac{A^2}{a^2 - G''} + \frac{B^2}{b^2 - G''} + \frac{C^2}{-G''} = 1$$

näher; so erhellet auf der Stelle, daß die Größen, G, $-G'$, $-G''$ die drei Wurzeln der Gleichung

$$10.\ \frac{A^2}{a^2 + x} + \frac{B^2}{b^2 + x} + \frac{C^2}{x} = 1$$

oder

$$11.\ x^3 - (A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2)x^2 + (a^2b^2 - a^2B^2 - a^2C^2 - b^2A^2 - b^2C^2)x$$
$$- a^2 b^2 C^2 = 0$$

sind, so daß es nun zunächst auf eine genauere Untersuchung der Natur der drei Wurzeln dieser cubischen Gleichung ankommt, die sich auf folgende Art anstellen läßt.

7. Wir nehmen im Folgenden an, daß keine der beiden Größen a, b null ist.

I. Unsere Gleichung hat, wie jede cubische Gleichung, entweder drei reelle, oder zwei imaginäre und eine reelle Wurzel. Bezeichnen wir nun die drei Wurzeln überhaupt durch p, q, r; so ist nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewiesenen Satze

$$a^2 b^2 C^2 = pqr .$$

Sind nun alle drei Wurzeln reell; so können dieselben, weil $a^2 b^2 C^2$ niemals negativ seyn kann, nicht alle drei negativ seyn, sondern mindestens eine derselben muß jederzeit positiv seyn, kann aber auch, wenn $C = 0$ ist, verschwinden. Sind ferner zwei Wurzeln, z. B. p, q, imaginär, die dritte r dagegen reell; so sind nach dem im Artikel Gleichung (19.) i. d. Z. bewiesenen Satze die beiden imaginären Wurzeln jederzeit von der Form

$$p = m + n\sqrt{-1},\ q = m - n\sqrt{-1},$$

und das Product

$$pq = (m + n\sqrt{-1})(m - n\sqrt{-1}) = m^2 + n^2$$

ist folglich stets positiv. Daher muß in diesem Falle, weil $a^2 b^2 C^2$ niemals negativ ist, die reelle Wurzel r jederzeit positiv oder $= 0$ seyn, welches Letztere in diesem Falle jederzeit Statt finden wird, wenn $C = 0$ ist und das letzte Glied unserer Gleichung also verschwindet. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die Gleichung (11.) jederzeit mindestens eine relle Wurzel hat, welche entweder positiv, oder, wenn C verschwindet, $= 0$ ist. Diese reelle nicht negative Wurzel wollen wir im Folgenden durch g bezeichnen.

II. Zieht man von der Gleichung (10.), die man auch auf folgende Art schreiben kann:

$$\frac{A^2 x}{a^2 + x} + \frac{B^2 x}{b^2 + x} + C^2 = x ,$$

die Gleichung

$$\frac{A^2 g}{a^2 + g} + \frac{B^2 g}{b^2 + g} + C^2 = g ,$$

ab, und dividirt die dadurch hervorgehende Gleichung durch $x - g$; so ergiebt sich die quadratische Gleichung

$$\frac{a^2 A^2}{(a^2 + x)(a^2 + g)} + \frac{b^2 B^2}{(b^2 + x)(b^2 + g)} = 1 .$$

Löst man nun diese Gleichung nach gewöhnlicher Methode auf; so erhält man für die beiden andern Wurzeln der Gleichung (11.) folgenden Ausdruck:

$$2x = \frac{a^2 A^2}{a^2 + g} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + g} - a^2 - b^2$$
$$\pm \sqrt{\left(a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + g} + \frac{b^2 B^2}{b^2 + g}\right)^2 + \frac{4 a^2 b^2 A^2 B^2}{(a^2 + g)(b^2 + g)}} ,$$

und sieht hieraus, indem man sich zugleich erinnert, daß g nicht negativ ist, daß auch die beiden andern Wurzeln der Gleichung (11.) reell sind, so daß also diese Gleichung jederzeit drei reelle Wurzeln, und unter denselben immer mindestens eine nicht negative, vorher durch g bezeichnete, Wurzel hat.

III. Zieht man aber die beiden schon vorher von einander subtrahirten Gleichungen, indem man dieselben jetzt nur auf folgende Art schreibt:

$$\frac{A^2 gx}{a^2+x} + \frac{B^2 gx}{b^2+x} + C^2 g = gx,$$

$$\frac{A^2 gx}{a^2+g} + \frac{B^2 gx}{b^2+g} + C^2 x = gx,$$

wieder von einander ab, und dividirt die hervorgehende Gleichung durch $g - x$; so erhält man die quadratische Gleichung

$$\frac{A^2 gx}{(a^2+g)(a^2+x)} + \frac{B^2 gx}{(b^2+g)(b^2+x)} + C^2 = 0,$$

deren Wurzeln natürlich ebenfalls mit den beiden Wurzeln, welche die Gleichung (11.) außer der Wurzel g noch hat, einerlei sind. Da aber g bekanntlich nicht negativ ist; so ist klar, daß sich der vorstehenden Gleichung durch keinen positiven Werth von x genügen läßt, und daß also die Gleichung (11.) nie mehr als eine positive reelle Wurzel haben kann.

IV. Wenn also C nicht $= 0$ ist; so hat die Gleichung (11.) jederzeit eine positive und zwei negative reelle Wurzeln. Ist aber $C = 0$ und folglich auch eine Wurzel der in Rede stehenden Gleichung $= 0$; so sind die beiden andern Wurzeln derselben in der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (A^2 + B^2 - a^2 - b^2)x + a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2 = 0$$

enthalten, und werden also, wie man durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung findet, durch folgende Formel gegeben:

$$x = \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2 - a^2 - b^2) \pm \sqrt{(A^2 - B^2 - a^2 + b^2)^2 + 4A^2 B^2},$$

wo nun nach Gauß wieder die drei folgenden Fälle zu unterscheiden sind.

1. Wenn das letzte Glied

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

unserer quadratischen Gleichung positiv und nicht $= 0$ ist; so sind die Wurzeln derselben, die, wie wir schon aus dem Vorhergehenden wissen, reell sind, aber nicht beide positiv seyn können, beide negativ, weil das letzte Glied bekanntlich das Product der beiden Wurzeln ist, und dieselben daher in diesem Falle, wo das letzte Glied nach der Voraussetzung positiv ist, nothwendig einerlei Vorzeichen haben müssen. Uebrigens erhellet dies auch, wie Gauß noch bemerkt, auf folgende Art. Der Coefficient

$$-(A^2 + B^2 - a^2 - b^2)$$

des zweiten Gliedes läßt sich nämlich, wie leicht erhellet, unter der Form

$$(a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{b^2A^2}{a^2} + \frac{a^2B^2}{b^2}$$

darstellen, und ist also in dem vorliegenden Falle, wo nach der Voraussetzung

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

positiv ist, offenbar jederzeit positiv. Da nun dieser Coefficient nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewiesenen Satze die Summe der beiden mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln ist, und die Wurzeln, weil das letzte Glied positiv ist, nothwendig einerlei Vorzeichen haben müssen; so ist klar, daß dieselben beide negativ sind.

2. Wenn das letzte Glied

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

negativ ist; so ist, wie auf der Stelle erhellet, eine der beiden Wurzeln positiv, die andere dagegen negativ.

3. Wenn endlich das letzte Glied

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

verschwindet; so ist jederzeit eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $= 0$, und die andere ist, wie sich aus dem Vorhergehenden leicht, am leichtesten aus der in 1. benutzten besondern Darstellung des Coefficienten des zweiten Gliedes ergiebt, $=$

$$-\frac{b^2A^2}{a^2} - \frac{a^2B}{b^2},$$

folglich negativ, so daß also in diesem Falle die cubische Gleichung (11.) zwei verschwindende und eine negative Wurzel hat.

8. Wenn man die drei ersten der Gleichungen **VII** mit den Gleichungen 1., 2., 4., 5., 7., 8. verbindet; so erhält man für die Größen $\gamma, \gamma', \gamma''$ leicht die folgenden Ausdrücke:

12. $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2}},$$

13. $$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 - 1}},$$

14. $$\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 - 1}}.$$

Diese drei Ausdrücke lassen sich aber auch auf folgende Form bringen:

$$\gamma = \int \frac{G}{G - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 . G - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2 . G},$$

$$\gamma' = \int \frac{G'}{\left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 . G' + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 . G' - G'},$$

$$\gamma'' = \int \frac{G''}{\left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 . G'' + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 . G'' - G''},$$

und nach den Gleichungen 3., 6., 9. ist:

$$G = \frac{A^2 G}{a^2+G} + \frac{B^2 G}{b^2+G} + C^2,$$

$$G' = \frac{A^2 G'}{a^2-G'} + \frac{B^2 G'}{b^2-G'} - C^2,$$

$$G'' = \frac{A^2 G''}{a^2-G''} + \frac{B^2 G''}{b^2-G''} - C^2.$$

Also ist, wenn wir der Kürze wegen

$$\gamma = \int \frac{G}{N}, \quad \gamma' = \int \frac{G'}{N'}, \quad \gamma'' = \int \frac{G''}{N''}$$

setzen,

$$N = \frac{A^2 G}{a^2+G} + \frac{B^2 G}{b^2+G} + C^2 - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 . G - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2 . G$$

$$= \left(\frac{AG}{a^2+G}\right)^2 + \left(\frac{BG}{b^2+G}\right)^2 + C^2,$$

$$N' = \left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 . G' + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 . G' - \frac{A^2 G'}{a^2-G'} - \frac{B^2 G'}{b^2-G'} + C^2$$

$$= \left(\frac{AG'}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{BG'}{b^2-G'}\right)^2 + C^2,$$

$$N'' = \left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 . G'' + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 . G'' - \frac{A^2 G''}{a^2-G''} - \frac{B^2 G''}{b^2-G''} + C^2$$

$$= \left(\frac{AG''}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{BG''}{b^2-G''}\right)^2 + C^2,$$

und folglich

15. $$\gamma = \int \frac{G}{\left(\frac{AG}{a^2+G}\right)^2 + \left(\frac{BG}{b^2+G}\right)^2 + C^2},$$

16. $$\gamma' = \int \frac{G'}{\left(\frac{AG'}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{BG'}{b^2-G'}\right)^2 + C^2},$$

17. $$\gamma'' = \int \frac{G''}{\left(\frac{AG''}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{BG''}{b^2-G''}\right)^2 + C^2}.$$

Aus diesen Ausdrücken erhellet auf der Stelle, daß, wenn die Größen γ, γ', γ'' sämmtlich reell seyn sollen, keine der Größen G, G', G'' negativ seyn darf. Ist nun

I. C nicht $= 0$; so muß man, wobei man sich zu erinnern hat, daß G, $-G'$, $-G''$ die drei Wurzeln der Gleichung 10. sind, für G offenbar die positive, für $-G'$ dagegen die eine, und für $-G''$ die andere negative Wurzel dieser Gleichung setzen, wobei es an sich willkührlich ist, welche der beiden negativen Wurzeln man für $-G'$, und welche man für $-G''$ setzt. Nur könnte hier noch die Frage entstehen, ob es nicht vielleicht verstattet wäre, für $-G'$ und $-G''$ ein und dieselbe negative Wurzel der Gleichung 10. zu setzen, wobei denn die andere negative Wurzel dieser Gleichung ganz unberücksichtigt bleiben würde. Wollte man aber auf diese Weise verfahren; so würde $-G' = -G''$, und folglich, wie sich aus den Gleichungen 16., 17., 4., 5., 7., 8. ergiebt,

$$\gamma' = \pm\gamma'', \quad \alpha' = \pm\alpha'', \quad \beta' = \pm\beta'';$$

also

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = \alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma',$$

d. i. nach der zweiten der Gleichungen VII

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = 1$$

seyn, da doch nach der vierten in derselben Reihe von Gleichungen

$$\pm\alpha'\alpha'' \pm \beta'\beta'' \mp \gamma'\gamma'' = 0$$

ist, so daß man also für $-G'$ und $-G''$ nie ein und dieselbe negative Wurzel der Gleichung 10. oder 11. setzen darf. Der Fall, wo die beiden negativen Wurzeln dieser Gleichung einander gleich sind, wird nachher besonders betrachtet werden.

II. Wenn $C = 0$ ist; so hat man wieder die drei folgenden Fälle zu unterscheiden, wobei wir auf (7. IV.) zurückweisen.

1. Wenn

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

positiv und nicht $= 0$ ist; so hat man $G = 0$ und für $-G'$ und $-G''$ die beiden negativen Wurzeln zu setzen, welche in diesem Falle die Gleichung 10. oder 11. jederzeit hat. Da aber dann der Ausdruck 15. von γ unbestimmt wird; so hat man in diesem Falle den Ausdruck 12. von γ beizubehalten, nämlich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}}}$$

zu setzen. Weil nach der Voraussetzung

$$a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$$

positiv und nicht $= 0$ ist; so ist natürlich auch

$$1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}$$

positiv und nicht $= 0$.

2. Wenn

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

negativ ist; so hat man für G die positive Wurzel der Gleichung 10. oder 11., und entweder die negative Wurzel $= -G'$ und $G'' = 0$, oder die negative Wurzel $= -G''$ und $G' = 0$ zu setzen. Im ersten Falle wird γ'', im zweiten γ' durch die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1}}$$

gefunden. Da nach der Voraussetzung

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2$$

negativ ist; so ist auch

$$1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}$$

negativ, oder

$$\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1$$

positiv und nicht $= 0$.

3. Wenn

$$a^2 b^2 - a^2 B^2 - b^2 A^2 = 0$$

ist; so ist auch

$$1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2} = \frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1 = 0,$$

und es erhellet also, daß in diesem Falle entweder γ und γ' oder γ und γ'' unendlich werden, woraus man schließt, daß in diesem Falle die Transformation, von der hier überhaupt die Rede ist, nicht möglich ist, weshalb dieser Fall auch von der fernern Betrachtung ganz ausgeschlossen werden soll. Daß keine der beiden Größen a, b null seyn soll, ist schon oben vorausgesetzt worden.

9. Gauß giebt nun für die Größen γ, γ', γ'' noch andere Ausdrücke, die ebenfalls sehr merkwürdig sind, und daher hier auch noch entwickelt werden sollen. Multiplicirt man nämlich die Gleichung

$$\frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1$$

mit $a^2 b^2 - G^2$; so erhält man

$$\frac{A^2 (a^2 b^2 - G^2)}{a^2 + G} + \frac{B^2 (a^2 b^2 - G^2)}{b^2 + G} + \frac{a^2 b^2 C^2}{G} - C^2 G = a^2 b^2 - G^2,$$

oder

$$\frac{A^2\{a^2(b^2+G)-(a^2+G)G\}}{a^2+G}+\frac{B^2\{b^2(a^2+G)-(b^2+G)G\}}{b^2+G}$$
$$+\frac{a^2b^2C^2}{G}-C^2G=a^2b^2-G^2,$$

oder

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}-A^2G+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}-B^2G+\frac{a^2b^2C^2}{G}-C^2G$$
$$=a^2b^2-G^2.$$

Weil aber $G, -G', -G''$ die Wurzeln der Gleichung 11. sind; so ist nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewiesenen Satze

$$G-G'-G''=A^2+B^2+C^2-a^2-b^2,\ GG'G''=a^2b^2C^2,$$

und die vorhergehende Gleichung geht also, wie leicht erhellet, in folgende über:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}+G'G''-G(G-G'-G''+a^2+b^2)$$
$$=a^2b^2-G^2,$$

die aber sehr leicht auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}-(a^2+G)(b^2+G)$$
$$+(G+G')(G+G'')=0.$$

Dividirt man nun mit

$$(a^2+G)(b^2+G);$$

so erhält man

$$\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2+\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2-1+\frac{(G+G')(G+G'')}{(a^2+G)(b^2+G)}=0$$

oder

$$1-\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2-\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2=\frac{(G+G')(G+G'')}{(a^2+G)(b^2+G)},$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2-\left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2}=\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')},$$

und folglich nach 12.

$$\gamma=\sqrt{\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}}.$$

Wendet man nun auch auf die Gleichungen 6. und 9. ein ganz ähnliches Verfahren an; so erhält man überhaupt für $\gamma, \gamma', \gamma''$ die drei folgenden höchst merkwürdigen Ausdrücke:

18. $$\gamma=\sqrt{\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}},$$

19. $$\gamma'=\sqrt{\frac{(a^2-G')(b^2-G')}{(G+G')(G''-G')}},$$

$$20.\quad \gamma'' = \sqrt{\frac{(a^2 - G'')(b^2 - G'')}{(G + G'')(G' - G'')}},$$

und es erhellet leicht, daß diese Ausdrücke zur Berechnung von $\gamma, \gamma', \gamma''$ vorzüglich bequem sind.

Da man nun $\gamma, \gamma', \gamma''$ hat; so ist es auch leicht, die Größen $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' mittelst der Gleichungen 1., 4., 7., 2., 5., 8. zu finden.

10. Aus dem Vorhergehenden lassen sich noch mehrere andere Relationen ableiten, von denen wir die bemerkenswerthesten ebenfalls mittheilen wollen. Da nämlich G, $-G'$, $-G''$ die drei Wurzeln der Gleichung 11. sind; so ist nach dem im Artikel Gleichung (26.) i. d. Z. bewiesenen Satze

$$G - G' - G'' = A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2,$$
$$-GG' - GG'' + G'G'' = a^2 b^2 - a^2 B^2 - a^2 C^2 - b^2 A^2 - b^2 C^2,$$
$$GG'G'' = a^2 b^2 C^2.$$

Durch Entwickelung der Producte

$$(a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'') \text{ und } (b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'')$$

ergiebt sich aber leicht:

$$(a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'')$$
$$= a^6 + a^4(G - G' - G'') - a^2(GG' + GG'' - G'G'') + GG'G'',$$
$$(b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'')$$
$$= b^6 + b^4(G - G' - G'') - b^2(GG' + GG'' - G'G'') + GG'G'',$$

und folglich, wenn man die vorher gefundenen Werthe von

$$G - G' - G'',\ GG' + GG'' - G'G'',\ GG'G''$$

substituirt:

$$21.\quad (a^2 + G)(a^2 - G')(a^2 - G'') = a^2(a^2 - b^2)A^2,$$
$$22.\quad (b^2 + G)(b^2 - G')(b^2 - G'') = -b^2(a^2 - b^2)B^2.$$

Also ist

$$23.\quad (a^2 - G')(a^2 - G'')(b^2 - G')(b^2 - G'') = -\frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2 A^2 B^2}{(a^2 + G)(b^2 + G)}.$$

Nun ist nach der dritten der Gleichungen II:

$$\varepsilon\gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',$$

und folglich nach den Gleichungen 4., 5., 7., 8.

$$24.\quad \varepsilon\gamma = \frac{ab\,AB\,\gamma'\gamma''}{(a^2 - G')(b^2 - G')} - \frac{ab\,AB\,\gamma'\gamma''}{(a^2 - G'')(b^2 - G')}$$
$$= \frac{ab(a^2 - b^2)AB(G'' - G')\gamma'\gamma''}{(a^2 - G')(a^2 - G'')(b^2 - G')(b^2 - G'')};$$

also nach 23.

$$25.\quad \varepsilon\gamma = \frac{(a^2 + G)(b^2 + G)(G' - G'')\gamma'\gamma''}{ab(a^2 - b^2)AB}.$$

Nun ist aber nach 18.

$$\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')} = \gamma^2 .$$

Multiplicirt man also hiermit die vorhergehende Gleichung; so erhält man

$$\frac{\varepsilon}{(G+G')(G+G'')} = \frac{(G'-G'')\gamma\gamma'\gamma''}{ab(a^2-b^2)AB} ,$$

oder

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab(a^2-b^2)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')} .$$

Aus den Gleichungen, 1., 4., 7. und 2., 5., 8. folgt ferner

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{a^3A^3\gamma\gamma'\gamma''}{(a^2+G)(a^2-G')(a^2-G'')} ,$$

$$\beta\beta'\beta'' = \frac{b^3B^3\gamma\gamma'\gamma''}{(b^2+G)(b^2-G')b^2-G'')} .$$

Folglich ist nach 21. und 22.

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{aA\gamma\gamma'\gamma''}{a^2-b^2}, \quad \beta\beta'\beta'' = -\frac{bB\gamma\gamma'\gamma''}{a^2-b^2} ,$$

in welche Formeln man nun noch den Werth von $\gamma\gamma'\gamma''$ aus dem Vorhergehenden substituiren kann, so daß wir also jetzt überhaupt die drei folgenden Relationen haben:

$$26.\quad \alpha\alpha'\alpha'' = \frac{-\varepsilon a^2bA^2B}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')} ,$$

$$27.\quad \beta\beta'\beta'' = -\frac{\varepsilon ab^2AB^2}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')} ,$$

$$28.\quad \gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab(a^2-b^2)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')} ,$$

aus denen sich auch noch

$$29.\ \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''} = -\frac{aA}{bB}, \quad 30.\ \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\gamma\gamma'\gamma''} = \frac{aA}{a^2-b^2}, \quad 31.\ \frac{\beta\beta'\beta''}{\gamma\gamma'\gamma''} = -\frac{bB}{a^2-b^2}$$

ergiebt.

Endlich erhalten wir auch noch aus 1., 2., 4., 5., 7., 8. und 18., 19., 20. leicht:

$$32.\quad \alpha\beta = \frac{abAB}{(G+G')(G+G'')} ,$$

$$33.\quad \alpha'\beta' = -\frac{abAB}{(G+G')(G'-G'')} ,$$

$$34.\quad \alpha''\beta'' = \frac{abAB}{(G+G'')(G'-G'')} .$$

Mit welchen Vorzeichen man die Wurzelgrößen nimmt, durch welche die Größen γ, γ', γ'' dargestellt werden, ist, wie leicht erhellet, an sich willkürlich. Von Wichtigkeit ist es aber, den Zusammenhang des Vorzeichens der Größe ε, welche bekanntlich

$= \pm 1$ ist, mit den Vorzeichen der Größen $\gamma, \gamma', \gamma''$ zu kennen, und in dieser Beziehung ist die vorher gefundene Gleichung

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab(a^2-b^2)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')}$$

von besonderer Bedeutung, indem, wie auf der Stelle in die Augen fällt, mittelst derselben über das Vorzeichen, mit welchem ε zu nehmen ist, wenn die Vorzeichen von $\gamma, \gamma', \gamma''$ bestimmt sind, immer sicher entschieden werden kann.

11. Es sind nun noch einige Fälle besonders zu betrachten, in denen die vorher gefundenen Formeln unbestimmt werden. Dabei wollen wir, so wie von jetzt an immer, $a^2 - b^2 \gtreqless 0$ setzen. Daß dies verstattet ist, erhellet auf der Stelle, indem man, wenn $a^2 - b^2 < 0$ wäre, $E = \frac{1}{2}\pi - E'$, $\partial E = -\partial E'$, $\cos E = \sin E'$, $\sin E = \cos E'$ setzen könnte, wodurch die Größe

$$\Upsilon(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2$$

in

$$\Upsilon(B - b\cos E')^2 + (A - a\sin E') + C^2$$

übergehen würde, eine Größe von völlig einerlei Form mit der vorhergehenden, in der nun aber $b^2 - a^2 > 0$ ist.

Dies vorausgesetzt, betrachten wir nun zuerst den Fall, wenn die beiden negativen Wurzeln $-G', -G''$ der cubischen Gleichung einander gleich sind, in welchem die Ausdrücke 19. und 20. von γ' und γ'' unendlich zu seyn scheinen, in der That aber bloß unbestimmt sind, wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Setzen wir in dem in (7. II.) für $2x$ gefundenen Ausdrucke G für g; so wird derselbe

$$2x = \frac{a^2A^2}{a^2+G} + \frac{b^2B^2}{b^2+G} - a^2 - b^2$$
$$\pm \Upsilon\left(a^2 - b^2 - \frac{a^2A^2}{a^2+G} + \frac{b^2B^2}{b^2+G}\right)^2 + \frac{4a^2b^2A^2B^2}{(a^2+G)(b^2+G)}.$$

Sollen nun die sich hieraus ergebenden beiden Werthe von x, d. i. die Größen $-G'$ und $-G''$ einander gleich seyn; so muß nothwendig

$$\frac{4a^2b^2A^2B^2}{(a^2+G)(b^2+G)} = 0, \quad a^2 - b^2 - \frac{a^2A^2}{a^2+G} + \frac{b^2B^2}{b^2+G} = 0;$$

d. i., weil keine der beiden Größen a, b null seyn darf,

$$AB = 0, \quad a^2 - b^2 - \frac{a^2A^2}{a^2+G} + \frac{b^2B^2}{b^2+G} = 0$$

seyn. Wäre nun B nicht $= 0$; so wäre wegen der ersten Gleichung $A = 0$, und folglich wegen der zweiten Gleichung

$$a^2 - b^2 + \frac{b^2B^2}{b^2+G} = 0,$$

welches ungereimt ist, da $a^2 - b^2 \gtreqless 0$ und $b^2 > 0$ ist. Also ist jederzeit

$$B = 0,\ a^2 - b^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} = 0\ ;$$

oder

$$B = 0,\ \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} = a^2 - b^2\ .$$

Führt man diese beiden Ausdrücke in den obigen Ausdruck von $2x$ ein; so erhält man $x = -b^2$, d. i.

$$G' = G'' = b^2\ .$$

Um G zu finden, hat man nach (10.), weil hier $B = 0$ ist, die beiden Gleichungen

$$G - G' - G'' = A^2 + C^2 - a^2 - b^2$$

und

$$GG'G'' = a^2 b^2 C^2\ .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich, wenn man $G' = G'' = b^2$ setzt,

$$G = A^2 + C^2 - a^2 + b^2,\ G = \frac{a^2 C^2}{b^2}\ ,$$

und hieraus folgt:

$$A^2 + C^2 - a^2 + b^2 = \frac{a^2 C^2}{b^2}\ ,$$

d. i.

$$(a^2 - b^2)(C^2 + b^2) = b^2 A^2\ .$$

Diese Gleichung muß also nebst der Gleichung $B = 0$ erfüllt seyn, wenn der Fall, den wir hier betrachten, überhaupt eintreten soll.

Weil nun

$$a^2 + G = \frac{a^2(C^2 + b^2)}{b^2},\ b^2 + G = \frac{a^2 C^2 + b^4}{b^2},\ G + G' = G + G'' = \frac{a^2 C^2 + b^4}{b^2}$$

ist; so ergiebt sich aus der Gleichung 18.

$$\gamma = \sqrt{\frac{a^2(C^2 + b^2)}{a^2 C^2 + b^4}}\ ,$$

und endlich erhält man auch leicht nach 1. und 2.

$$\alpha = \sqrt{\frac{b^4 A^2}{(C^2 + b^2)(a^2 C^2 + b^2)}} = \sqrt{\frac{b^2(a^2 - b^2)}{a^2 C^2 + b^4}},\ \beta = 0\ .$$

Weil

$$b^2 - G' = b^2 - G'' = G' - G'' = 0$$

ist; so bleiben in diesem Falle, wie aus den Formeln 19. und 20. erhellet, die Werthe von γ', γ'', so wie auch die Werthe von α', β', α'', β'', unbestimmt. Man kann aber jederzeit durch einen dieser Coefficienten alle übrigen bestimmen, wie sich auf folgende Art zeigen läßt. Weil $\beta = 0$ ist, so ist nach den Gleichungen VII

$$\gamma\gamma = 1 + \alpha\alpha,\ \alpha\alpha' = \gamma\gamma'\ .$$

Ferner ist auch

$$\alpha'\alpha' + \beta'\beta' - \gamma'\gamma' = 1 .$$

Also ist

$$\beta'\beta' + \frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha} = 1 - \alpha'\alpha' + \gamma'\gamma' + \frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha}$$

$$= 1 - \alpha'\alpha' + \frac{1+\alpha\alpha}{\alpha\alpha}.\gamma'\gamma' = 1 - \alpha'\alpha' + \frac{\gamma\gamma\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha}$$

$$= 1 - \alpha'\alpha' + \frac{\alpha\alpha\alpha'\alpha'}{\alpha\alpha} = 1 - \alpha'\alpha' + \alpha'\alpha' = 1 .$$

Folglich kann man

$$\beta' = \cos f, \quad \gamma' = \alpha \sin f$$

und

$$\alpha' = \gamma\frac{\gamma'}{\alpha} = \gamma \sin f$$

setzen. Dann folgt aus den aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\varepsilon\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad \varepsilon\beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \varepsilon\gamma'' = \beta\alpha' - \alpha\beta', \quad \varepsilon\varepsilon = 1 ,$$

weil hier $\beta = 0$ und $\gamma\gamma - \alpha\alpha = 1$ ist, leicht:

$$\alpha'' = -\varepsilon\gamma \cos f, \quad \beta'' = \varepsilon \sin f, \quad \gamma'' = \varepsilon\alpha \cos f ,$$

so daß man also zur Bestimmung von β', α', γ', α'', β'', γ'' folgende Formeln hat:

$$\beta' = \cos f, \quad \alpha' = \gamma \sin f, \quad \gamma' = \alpha \sin f ;$$

$$\alpha'' = -\varepsilon\gamma \cos f, \quad \beta'' = \varepsilon \sin f, \quad \gamma'' = \varepsilon\alpha \cos f .$$

Der Winkel f kann hier willkührlich angenommen werden, und man kann auch nach Belieben $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ setzen.

Wenn G' und G'' ungleich sind; so werden die Coefficienten γ, γ', γ'' durch die Formeln 18., 19., 20. offenbar völlig bestimmt. Verschwindet aber eine der Größen $a^2 - G'$, $b^2 - G'$, $a^2 - G''$, $b^2 - G''$; so scheint respective der Coefficient α', β', α'', β'' durch die Formeln 4., 5., 7., 8. nicht bestimmt zu werden. Diese Coefficienten lassen sich aber in diesem Falle auf folgende Art bestimmen. Ist z. B. $a^2 - G' = 0$ und folglich, wie aus 19. erhellet, $\gamma' = 0$; so ist nach 5., wenn a^2 nicht $= b^2$ ist, $\beta' = 0$, und folglich nach der zweiten der Gleichungen VII $\alpha' = \pm 1$. Ist aber $a^2 = b^2$; so folgt aus der Gleichung

$$-\gamma'(AA + BB + CC) - \alpha' aA - \beta' bB = \gamma' G' ,$$

die ganz auf dieselbe Art wie die Gleichung

$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G ,$$

welche in (6.) ausführlich entwickelt worden ist, gefunden wird, daß

$$\alpha' A + \beta' B = 0$$

ist. Verbindet man nun diese Gleichung mit der Gleichung

$$\alpha'\alpha' + \beta'\beta' = 1 ;$$

so erhält man

$$\alpha' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \beta' = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

wodurch, wenn A und B nicht zugleich verschwinden, α' und β' völlig bestimmt sind. Ist aber zugleich $A=0$, $B=0$; so ist, weil $a^2=b^2$ ist,

$$B = 0 \text{ und } (a^2-b^2)(C^2+b^2) = b^2A^2,$$

und wir haben also dann wieder den schon vorher ausführlich betrachteten Fall.

12. Nachdem wir gezeigt haben, wie sich die Größen G, G', G''; α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' in allen Fällen bestimmen lassen, gehen wir nun zur Entwickelung des Differentials ∂E über, und setzen zu dem Ende wieder

$$35.\quad t = \gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T,$$

$$36.\quad t\cos E = \alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T,$$

$$37.\quad t\sin E = \beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T.$$

Aus 36. und 37. folgt

$$-t\sin E\,\partial E + \cos E\,\partial t = -\alpha'\sin T\,\partial T + \alpha''\cos T\,\partial T,$$
$$t\cos E\,\partial E + \sin E\,\partial t = -\beta'\sin T\,\partial T + \beta''\cos T\,\partial T.$$

Multiplicirt man nun die erste dieser beiden Gleichungen mit $\sin E$, die zweite mit $\cos E$, und zieht dann die erste Gleichung von der zweiten ab; so erhält man

$$t\,\partial E = \cos E(\beta''\cos T - \beta'\sin T)\,\partial T - \sin E(\alpha''\cos T - \alpha'\sin T)\partial T,$$

und folglich, wenn man mit t auf beiden Seiten multiplicirt und für $t\cos E$ und $t\sin E$ ihre Ausdrücke aus 36. und 37. setzt:

$$\begin{aligned} t^2\,\partial E &= (\alpha+\alpha'\cos T + \alpha''\sin T)(\beta''\cos T - \beta'\sin T)\,\partial T \\ &\quad -(\beta+\beta'\cos T + \beta''\sin T)(\alpha''\cos T - \alpha'\sin T)\,\partial T \\ &= (\beta''\alpha - \alpha''\beta)\cos T\,\partial T + (\beta\alpha' - \alpha\beta')\sin T\,\partial T \\ &\quad + (\beta''\alpha' - \alpha''\beta')(\sin T^2 + \cos T^2)\,\partial T, \end{aligned}$$

und folglich nach der sechsten, neunten und dritten der Gleichungen II

$$\begin{aligned} t^2\,\partial E &= \varepsilon\gamma'\cos T\,\partial T + \varepsilon\gamma''\sin T\,\partial T + \varepsilon\gamma\,\partial T \\ &= \varepsilon(\gamma+\gamma'\cos T + \gamma''\sin T)\,\partial T, \end{aligned}$$

d. i. nach 35.

$$t^2\,\partial E = \varepsilon t\,\partial T,$$

oder

$$38.\quad t\,\partial E = \varepsilon\,\partial T.$$

Weil

$$\begin{aligned} &(\gamma'\cos T + \gamma''\sin T)^2 + (\gamma''\cos T - \gamma'\sin T)^2 \\ &= \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = \gamma\gamma - 1 \end{aligned}$$

ist; so ist die Größe

$$\gamma'\cos T + \gamma''\sin T$$

ohne Rücksicht auf das Vorzeichen offenbar immer kleiner wie γ, und das Vorzeichen der Größe t hängt also immer bloß von dem Vorzeichen von γ ab, oder γt ist jederzeit eine positive Größe. Da nun

$$\gamma t \partial E = \varepsilon\gamma \partial T$$

ist; so haben ∂E und ∂T jederzeit gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen, jenachdem die Größe $\varepsilon\gamma$ positiv oder negativ ist. Ist also $\varepsilon\gamma$ positiv, so werden die Größen E und T gleichzeitig zu- und abnehmen; dagegen wird, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ ist, die eine immer wachsen, wenn die andere abnimmt.

Die Art des Zusammenhanges der Größen E und T unter einander läßt sich noch deutlicher auf folgende Art übersehen. Weil nach der ersten der Gleichungen VII

$$\gamma\gamma = 1 + \alpha\alpha + \beta\beta$$

und folglich im Allgemeinen $\gamma\gamma > 1$ ist; so kann man

$$\gamma_{\gamma\gamma - 1} = \delta$$

setzen, so daß also nach den Gleichungen VII und V

$$\delta\delta = \alpha\alpha + \beta\beta = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma''$$

ist. Nach 35., 36., 37. ist

$$t(\delta + \alpha\cos E + \beta\sin E) = \delta t + \alpha . t\cos E + \beta . t\sin E$$
$$= \gamma\delta + \gamma'\delta\cos T + \gamma''\delta\sin T$$
$$+ \alpha\alpha + \beta\beta + (\alpha\alpha' + \beta\beta')\cos T + (\alpha\alpha'' + \beta\beta'')\sin T,$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden $\alpha\alpha + \beta\beta = \delta\delta$ und nach den Gleichungen VII

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \gamma\gamma', \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' = \gamma\gamma''$$

ist,

39. $$t(\delta + \alpha\cos E + \beta\sin E) = \delta(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T)$$
$$+ \gamma(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T)$$
$$= (\gamma + \delta)(\delta + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T).$$

Ferner hat man nach 36. und 37.

$$t\beta\cos E = \alpha\beta + \alpha'\beta\cos T + \alpha''\beta\sin T,$$
$$t\alpha\sin E = \alpha\beta + \alpha\beta'\cos T + \alpha\beta''\sin T;$$

also durch Subtraction

$$t(\alpha\sin E - \beta\cos E) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\cos T + (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)\sin T,$$

und folglich nach II

40. $$t(\alpha\sin E - \beta\cos E) = \varepsilon(\gamma'\sin T - \gamma''\cos T).$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\gamma'}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma''}{\delta}\right) = 1$$

ist; so kann man

$$\frac{\alpha}{\delta} = \cos L, \quad \frac{\beta}{\delta} = \sin L, \quad \frac{\gamma'}{\delta} = \cos M, \quad \frac{\gamma''}{\delta} = \sin M$$

setzen. Dadurch werden die Gleichungen 39. und 40.

$$t\{1 + \cos(E-L)\} = (\gamma+\delta)\{1 + \cos(T-M)\},$$
$$t \sin(E-L) = \varepsilon \sin(T-M),$$

oder

$$2t\cos\tfrac{1}{2}(E-L)^2 = 2(\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(T-M)^2,$$
$$2t\sin\tfrac{1}{2}(E-L)\cos\tfrac{1}{2}(E-L) = 2\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(T-M)\cos\tfrac{1}{2}(T-M);$$

also, wenn man diese Gleichungen durch einander dividirt,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \frac{\varepsilon}{\gamma+\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}$; so erhält man

$$\frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L) = \frac{\varepsilon\varepsilon}{(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M),$$

oder, weil bekanntlich

$$\varepsilon\varepsilon = 1, \ (\gamma+\delta)(\gamma-\delta) = \gamma\gamma - \delta\delta = 1$$

ist,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M) = \frac{\varepsilon}{\gamma-\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L),$$

so daß wir also jetzt die beiden folgenden Gleichungen haben:

41. $\varepsilon \operatorname{tang}\frac{1}{2}(E-L) = (\gamma-\delta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T-M)$,
42. $\varepsilon \operatorname{tang}\frac{1}{2}(T-M) = (\gamma+\delta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(E-L)$,

oder, wenn man auf beiden Seiten mit ε multiplicirt,

43. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(E-L) = \varepsilon(\gamma-\delta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T-M)$,
44. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(E-L)$.

Setzt man, welches, weil $\gamma\gamma - \delta\delta = 1$ ist, verstattet ist,

$$\delta = \operatorname{tang} N, \quad \gamma = \sec N;$$

so erhält man leicht

$$\gamma - \delta = \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}N), \quad \gamma + \delta = \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}N).$$

Bezeichnen wir den dem Werthe $E + 2\pi$ von E entsprechenden Werth von T durch T'; so ist nach 44.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(E-L) + \pi\},$$

d. i. nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \varepsilon(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L),$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T'-M) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M),$$

und folglich nach dem Artikel Goniometrie (32. III.) i. d. Z., wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}(T'-M) = \tfrac{1}{2}(T-M) + n\pi.$$

Weil nun aber nach dem Vorhergehenden T mit E gleichzeitig wächst und abnimmt, wenn $\varepsilon\gamma$ positiv ist, dagegen die eine dieser Größen, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ ist, immer zu- oder abnimmt, indem die andere respective ab- oder zunimmt; so ist klar, daß n positiv oder negativ ist, jenachdem $\varepsilon\gamma$ respective positiv oder negativ ist. Denkt man sich nun aber nur, daß E von E bis $E+2\pi$ stetig wachse, und daß also auch T sich von T bis T' stetig verändere; so erhellet auf der Stelle, daß $n=+1$ oder $=-1$ zu setzen ist, jenachdem $\varepsilon\gamma$ positiv oder negativ ist. Also ist, indem das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $\varepsilon\gamma$ positiv oder negativ ist,

$$\tfrac{1}{2}(T'-M)=\tfrac{1}{2}(T-M)\pm\pi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}T'=\tfrac{1}{2}T\pm\pi,\quad T'=T\pm 2\pi,$$

und man sieht also, daß, wenn E um 2π wächst, T jederzeit um 2π zu- oder abnimmt, jenachdem $\varepsilon\gamma$ positiv oder negativ ist, welches man des Folgenden wegen wohl zu beachten hat.

13. Wir wollen nun im Folgenden

$$\varrho=\sqrt{(A-a\cos E)^2+(B-b\sin E)^2+C^2}$$

immer als positiv annehmen und auch unter

$$\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}$$

stets den positiven Werth dieser Wurzelgröße verstehen; so ist, weil das Vorzeichen von t bloß von dem Vorzeichen von γ abhängt, nach (5.)

$$\varrho t=\pm\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}$$

zu setzen, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem γ positiv oder negativ ist.

Ist also zuerst γ positiv; so ist nach 38.

$$\frac{\partial E}{\varrho}=\frac{\varepsilon\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}}.$$

Ist nun τ der dem Werthe $E=0$ entsprechende Werth von T; so ist nach (12.) $\tau+2\pi$ oder $\tau-2\pi$ der dem Werthe $E=2\pi$ entsprechende Werth von T, jenachdem $\varepsilon\gamma$ positiv oder negativ ist, d. i. in diesem Falle, wo γ positiv ist, jenachdem $\varepsilon=+1$ oder $=-1$ ist. Also ist für $\varepsilon=+1$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=\int_\tau^{\tau+2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}},$$

und für $\varepsilon=-1$ ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial E}{\varrho}=-\int_\tau^{\tau-2\pi}\frac{\partial T}{\sqrt{G+G'\cos T^2+G''\sin T^2}},$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_{\tau-2\pi}^{\tau} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Nun erhellet aber leicht, daß für jedes T

$$\int_T^{T+2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}$$

ist. Also ist in diesem Falle, wo γ positiv ist, jederzeit

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Ist ferner γ negativ; so ist nach 38.

$$\frac{\partial E}{\varrho} = - \frac{\varepsilon \partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Folglich ist, wenn $\varepsilon\gamma$ positiv, d. i. $\varepsilon = -1$ ist,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_{\tau}^{\tau+2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

und, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ, d. i. $\varepsilon = +1$ ist,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = - \int_{\tau}^{\tau-2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_{\tau-2\pi}^{\tau} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

Also ist auch in diesem Falle immer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

und wir haben daher in völliger Allgemeinheit

$$45. \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\varrho} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}}.$$

14. Gauß hat nun in seiner berühmten Abhandlung vorzüglich die drei folgenden für die physische Astronomie höchst wichtigen Integrale betrachtet:

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{(A - a \cos E)(1 - e \cos E) \partial E}{2\pi \varrho^3},$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{(B - b \sin E)(1 - e \cos E) \partial E}{2\pi \varrho^3},$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{C(1 - e \cos E) \partial E}{2\pi \varrho^3},$$

wo $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ ist.

Um diese Integrale zu entwickeln, haben wir nach dem Vorhergehenden zunächst

$$\begin{aligned} &at(A - a\cos E) \\ &= aA(\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T) - a^2(\alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T) \\ &= a(A\gamma - a\alpha) + a(A\gamma' - a\alpha')\cos T + a(A\gamma'' - a\alpha'')\sin T . \end{aligned}$$

Nach 1., 4., 7. ist aber

$$\alpha = \frac{\gamma a A}{a^2 + G}, \quad \alpha' = \frac{\gamma' a A}{a^2 - G'}, \quad \alpha'' = \frac{\gamma'' a A}{a^2 - G''},$$

und folglich

$$A\gamma - a\alpha = \frac{\alpha(a^2 + G)}{a} - a\alpha = \frac{\alpha G}{a},$$

$$A\gamma' - a\alpha' = \frac{\alpha'(a^2 - G')}{a} - a\alpha' = -\frac{\alpha' G'}{a},$$

$$A\gamma'' - a\alpha'' = \frac{\alpha''(a^2 - G'')}{a} - a\alpha'' = -\frac{\alpha'' G''}{a}.$$

Also

$$at(A - a\cos E) = \alpha G - \alpha' G'\cos T - \alpha'' G''\sin T ,$$

und ganz eben so

$$bt(B - b\sin E) = \beta G - \beta' G'\cos T - \beta'' G''\sin T .$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} &t(1 - e\cos E) = t - et\cos E \\ &= \gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} &at^2(A - a\cos E)(1 - e\cos E) \\ &= (\alpha G - \alpha' G'\cos T - \alpha'' G''\sin T)\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\}, \\ &bt^2(B - b\sin E)(1 - e\cos E) \\ &= (\beta G - \beta' G'\cos T - \beta'' G''\sin T)\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\}, \\ &Ct^2(1 - e\cos E) \\ &= C(\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T)\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\}. \end{aligned}$$

Setzen wir also der Kürze wegen die Größen auf den rechten Seiten der drei vorhergehenden Gleichungen nach der Reihe $= aX, bY, Z$; so ist

$$\partial\xi = \frac{X\partial E}{2\pi t^2 \varrho^3}, \quad \partial\eta = \frac{Y\partial E}{2\pi t^2 \varrho^3}, \quad \partial\zeta = \frac{Z\partial E}{2\pi t^2 \varrho^3};$$

oder nach 38.

$$\partial\xi = \frac{\varepsilon X\partial T}{2\pi t^3 \varrho^3}, \quad \partial\eta = \frac{\varepsilon Y\partial T}{2\pi t^3 \varrho^3}, \quad \partial\zeta = \frac{\varepsilon Z\partial T}{2\pi t^3 \varrho^3}.$$

Hieraus erhält man nun auf ganz ähnliche Art wie in (13.)

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{X\partial T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{Y\partial T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{Z\partial T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Formeln hier ausführlich zu entwickeln, ist unnöthig, weil das anzuwendende Raisonnement von dem in (13.) gebrauchten durchaus nicht wesentlich verschieden ist. Bemerkt man nun, daß, wie auf der Stelle erhellet,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T\partial T}{(G+G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin T\partial T}{(G+G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T\sin T\partial T}{(G+G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ist; so erhält man, wenn man in die Formeln für ξ, η, ζ die obigen Ausdrücke von X, Y, Z einführt, sehr leicht

$$\xi = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G'\cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G''\sin T^2}{2\pi a(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}\partial T,$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G'\cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G''\sin T^2}{2\pi b(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}\partial T,$$

$$\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma'\cos T^2 + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma''\sin T^2}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}} C\partial T.$$

Setzen wir aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos T^2\partial T}{2\pi\{(G + G')\cos T^2 + (G + G'')\sin T^2\}^{\frac{3}{2}}} = P,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin T^2\partial T}{2\pi\{(G + G')\cos T^2 + (G + G'')\sin T^2\}^{\frac{3}{2}}} = Q;$$

so wird

$$\begin{aligned} a\xi &= \{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G'\}P \\ &\quad + \{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G''\}Q, \\ b\eta &= \{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G'\}P \\ &\quad + \{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G''\}Q, \\ \zeta &= \{(\gamma - e\alpha)\gamma - (\gamma' - e\alpha')\gamma'\}CP \\ &\quad + \{(\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma''\}CQ. \end{aligned}$$

15. Man sieht nun, daß sich alle hier und in (13.) betrachteten Integrale auf die drei Integrale:

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \partial T}{(G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \partial T}{\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \partial T}{\{(G + G') \cos T^2 + (G + G'') \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn wir

$$\sqrt{G + G'} = m, \quad \sqrt{G + G''} = n$$

setzen, auf die drei Integrale

$$\int \frac{\partial T}{\sqrt{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2}},$$

$$\int \frac{\cos T^2 \partial T}{\{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\sin T^2 \partial T}{\{m^2 \cos T^2 + n^2 \sin T^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

zurückführen lassen. Wie sich aber die Werthe dieser zwischen beliebigen Gränzen genommenen Integrale in allen Fällen nach einer sehr bequemen Methode näherungsweise, und zwar mit jedem beliebigen Grade der Annäherung, berechnen lassen, soll gleich nachher in dem besondern Artikel Integration durch Annäherung ebenfalls nach Gauß ausführlich gezeigt werden. Ueber den Zusammenhang, in welchem die hier betrachteten Integrale mit der physischen Astronomie stehen, hier Etwas beizubringen, gestattet die Natur dieses Werkes nicht. Wir haben es uns aber angelegen seyn lassen, den Hauptinhalt der mehr erwähnten meisterhaften Abhandlung hier vollständig wiederzugeben, und wenn wir uns bei diesem Geschäft fast nur mit der Rolle des Uebersetzers begnügen mußten; so liegt der Grund hiervon lediglich in der hohen Vollendung dieser trefflichen Arbeit von Gauß, die uns an keiner Stelle etwas Wesentliches hinzuzusetzen oder wegzulassen erlaubt hat. Als weitere Ausführungen der Abhandlung von Gauß sind einige, doppelte und vielfache Integrale betreffende, schöne Abhandlungen von C. G. J. Jacobi zu

betrachten, die sich in Crelles Journal B. II., VIII., X., XII. finden. Auch vergleiche man einen Aufsatz von Clausen in demselben Journal. B. VI. S. 290. Hier gestattet der Raum größere Ausführlichkeit nicht.

16. Nachdem wir die vorhergehende merkwürdige Transformation eines wichtigen irrationalen Differentials ausführlich betrachtet haben, wollen wir nun auch an einigen Beispielen zeigen, wie sich irrationale Differentiale häufig dadurch integriren lassen, daß man sie durch schickliche Substitutionen rational macht, und wählen dazu einige von N. Fuß in einer in den von der Petersburger Akademie herausgegebenen Mémoires posthumes de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuss. Pétersb. 1830. p. 305. sich findenden Abhandlung betrachtete Integrale deshalb, weil diese Integrale, wenigstens größtentheils, ziemlich allgemein sind, und sich daher vorkommende Integrale öfters werden auf dieselben zurückführen lassen.

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{in-1}(\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}}.$$

m, n, r, λ sollen ganze Zahlen seyn; i kann jede ganze oder gebrochene Zahl bezeichnen.

Man setze $a + bx^n = y^n$; so ergiebt sich

$$x^{in-1}\partial x = \frac{y^{n-1}\partial y}{bi}, \quad x^{in} = \frac{y^n - a}{b},$$

und hieraus

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha b + \beta(y^n - a))^r}{b^r}, \quad (f + g x^{in})^\lambda = \frac{(bf + g(y^n - a))^\lambda}{b^\lambda};$$

folglich

$$P = \frac{b^{\lambda-r-1}}{i} \int \frac{y^{n-m-1}\partial y (\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

Diese Formel ist für jedes ganze oder gebrochene i rational.

1. Für $i = \frac{1}{2}$ ist

$$P = \int \frac{x^{\frac{1}{2}n-1}(a + \beta x^{\frac{1}{2}n})^r \partial x}{(f + g x^{\frac{1}{2}n})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{\frac{1}{2}n})^m}} = 2b^{\lambda-r-1} \int \frac{y^{n-m-1}(\alpha b - \beta a + \beta y^n)^r \partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

2. Für $r = 0$ ist

$$P = \int \frac{x^{in-1}\partial x}{(x + g x^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + b x^{in})^m}} = \frac{b^{\lambda-1}}{i} \int \frac{y^{n-m-1}\partial y}{(bf - ag + gy^n)^\lambda}.$$

3. Für $m = 2$, $n = 3$, $i = 1$, $\lambda = 1$ folgt hieraus

$$P = \int \frac{x^2 \partial x}{(f + \gamma x^3) \sqrt[3]{a + bx^3}} = \int \frac{\partial y}{bf - ag + gy^3}.$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{im-1}(\alpha + \beta x^{in})^r \partial x}{(f + gx^{in})^\lambda \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} .$$

m, n, r, λ bezeichnen ganze Zahlen; i kann jede ganze oder gebrochene Zahl seyn.

Man setze

$$\frac{x^i}{\sqrt[n]{a + bx^{in}}} = y, \quad \frac{x^{in}}{a + bx^{in}} = y^n ,$$

nehme auf beiden Seiten die Logarithmen und differentiire; so erhält man

$$n l y = i n l x - l(a + bx^{in}), \quad \frac{\partial y}{y} = \frac{a i \partial x}{x(a + bx^{in})} ,$$

$$\partial y = \frac{a i x^{i-1} \partial x}{(a + bx^{in}) \sqrt[n]{a + bx^{in}}} .$$

Hieraus folgt, weil

$$x^{in} = \frac{ay^n}{1 - by^n}, \quad a + bx^{in} = \frac{a}{1 - by^n}$$

ist, leicht

$$\frac{x^{i-1} \partial x}{\sqrt[n]{a + bx^{in}}} = \frac{\partial y}{i(1 - by^n)} ,$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{i y (1 - by^n)} .$$

Nun ist

$$\frac{x^{im}}{\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = y^m, \quad \sqrt[n]{(a + bx^{in})^m} = \frac{x^{in}}{y^m} .$$

Also ist

$$\frac{x^{im-1} \partial x}{\sqrt[n]{(a + bx^{in})^m}} = y^m \frac{\partial x}{x} = \frac{y^{m-1} \partial y}{i(1 - by^n)} .$$

Weil ferner

$$(\alpha + \beta x^{in})^r = \frac{(\alpha - (\alpha b - \beta a) y^n)^r}{(1 - by^n)^r}, \quad (f + gx^{in})^\lambda = \frac{(f - c(bf - ag) y^n)^\lambda}{(1 - by^n)^\lambda}$$

ist; so erhält man nach gehöriger Substitution

$$P = \frac{1}{i} \int \frac{y^{m-1} (\alpha - (\alpha b - \beta a) y^n)^r \partial y}{(1 - by^n)^{r-\lambda+1} (f - (bf - ag) y^n)^\lambda} ,$$

welche Formel wieder für jedes i rational ist.

1. Für $r = 0$ erhält man

$$P = \int \frac{x^{in-1}\partial x}{(f+gx^{in})^{\lambda}\sqrt[n]{(a+bx^{in})^{m}}} = \frac{1}{i}\int \frac{y^{m-1}(1-by^{n})^{\lambda-1}\partial y}{(f-(bf-ag)y^{n})^{\lambda}}.$$

2. Setzt man hierin $i = 1$, $\lambda = 1$, $m = 1$, $f = 1$, $g = 0$; so ergiebt sich

$$P = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{a+bx^{n}}} = \int \frac{\partial y}{1-by^{n}}.$$

3. Durch Verbindung von I. und II. mit einander kann man jederzeit die sehr allgemeine Formel

$$\int \frac{(Ax^{in-1} \pm Bx^{in-1})(\alpha+\beta x^{in})^{r}\partial x}{(f+gx^{in})^{\lambda}\sqrt[n]{(a+bx^{in})^{m}}}$$

für jedes ganze oder gebrochene i rational machen. Also kann man, wenn man $r = 0$ setzt, auch jederzeit die Formel

$$\int \frac{(Ax^{in-1} \pm Bx^{in-1})\partial x}{(f+gx^{in})^{\lambda}\sqrt[n]{(a+bx^{in})^{m}}}$$

für jedes ganze oder gebrochene i rational machen.

III. $$P = \int \frac{x^{in-1}(\alpha+\beta x^{\varepsilon in})^{r}\partial x}{(f+gx^{\delta in})^{\lambda}\sqrt[n]{(a+bx^{in})^{m}}}.$$

Man setze

$$a + bx^{in} = y^{n}, \quad x^{in-1}\partial x = \frac{y^{n-1}\partial y}{bi};$$

so ist

$$(\alpha + bx^{\varepsilon in})^{r} = \frac{(\alpha b^{\varepsilon} + \beta(y^{n}-a)^{\varepsilon})^{r}}{b^{\varepsilon r}},$$

$$(f + gx^{\delta in})^{\lambda} = \frac{(fb^{\delta} + g(y^{n}-a)^{\delta})^{\lambda}}{b^{\delta\lambda}},$$

und nach gehöriger Substitution erhält man:

$$P = \frac{b^{\delta\lambda-\varepsilon r-1}}{i}\int \frac{y^{n-m-1}(ab^{\varepsilon}+\beta(y^{n}-a)^{\varepsilon})^{r}\partial y}{(fb^{\delta}+g(y^{n}-a)^{\delta})^{\lambda}}.$$

Für $\varepsilon = \delta = 1$ erhält man den Fall I.

IV. $$P = \int \frac{x^{im-1}(a+\beta x^{\varepsilon in})^{r}\partial x}{(f+gx^{\delta in})^{\lambda}\sqrt[n]{(a+bx^{in})^{m}}}.$$

Man setze

$$\frac{x^{i}}{\sqrt[n]{a+bx^{in}}} = y, \quad \frac{x^{in}}{a+bx^{in}} = y^{n}, \quad x^{in} = \frac{ay^{n}}{1-by^{n}};$$

so erhält man ganz wie in II.

$$\frac{x^{im-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(a+bx^{in})^m}} = \frac{y^{m-1}\,\partial y}{i(1-by^n)}\,.$$

Auch findet man leicht:

$$(\alpha + \beta x^{\varepsilon in})^r = \frac{(\alpha(1-by^n)^\varepsilon + \beta a^\varepsilon y^{\varepsilon n})^r}{(1-by^n)^{\varepsilon r}}\,,$$

$$(f + gx^{\delta in})^r = \frac{(f(1-by^n)^\delta + ga^\delta y^{\delta n})}{(1-by^n)^{\delta\lambda}}\,,$$

und folglich nach gehöriger Substitution

$$P = \frac{1}{i}\int \frac{y^{m-1}(\alpha(1-by^n)^\varepsilon + \beta a^\varepsilon y^{\varepsilon n})^r\,\partial y}{(1-by^n)^{\varepsilon r-\delta\lambda+1}(f(1-by^n)^\delta + ga^\delta y^{\delta n})^\lambda}\,.$$

Für $\varepsilon = \delta = 1$ erhält man den Fall II.

$$\text{V.}\quad P = \int \frac{(1+x)^2\,\partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{1+3x^2}}\,.$$

Man setze

$$\frac{1-x}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = p\,;$$

so ist

$$l(1-x) - \tfrac{1}{3}l(1+3x^2) = lp\,,$$

$$-\frac{\partial x}{1-x} - \frac{2x\,\partial x}{1+3x^2} = \frac{\partial p}{p}\,,\quad \text{d. i.}\quad \frac{(1+x)^2\,\partial x}{(1-x)(1+3x^2)} = -\frac{\partial p}{p}\,.$$

Folglich ist

$$\frac{(1+x)^2\,\partial x}{(1+3x^2)\sqrt[3]{1+3x^2}} = -\partial p\,.$$

Weil nun

$$\frac{3x+x^3}{1+3x^2} = 1 - p^3$$

ist; so ist

$$P = -\int \frac{\partial p}{1-p^3}\,.$$

$$\text{VI.}\quad Q = \int \frac{(1-x)^2\,\partial x}{(3x+x^3)\sqrt[3]{1+3x^2}}\,.$$

Man setze

$$\frac{1+x}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = q\,;$$

so ist

$$l(1+x) - \tfrac{1}{3}l(1+3x^2) = lq\,,$$

$$\frac{\partial x}{1+x} - \frac{2x\,\partial x}{1+3x^2} = \frac{\partial q}{q}\,,\quad \text{d. i.}\quad \frac{(1-x)^2\,\partial x}{(1+x)(1+3x^2)} = \frac{\partial q}{q}\,,$$

und folglich

$$\frac{(1-x)^2\,\partial x}{(1+3x^2)\sqrt[3]{1+3x^3}} = \partial q\,.$$

Weil nun

$$\frac{3x+x^3}{1+3x^2} = -(1-q^3)$$

ist; so ist

$$Q = -\int \frac{\partial x}{1-q^3}\,.$$

VII. Weil

$$P - Q = \frac{4\,\partial x}{(3+x^2)\sqrt[3]{1+3x^3}}$$

ist; so ist

$$4\int \frac{\partial x}{(3+x^2)\sqrt[3]{1+3x^3}} = \int \frac{\partial q}{1-q^3} - \int \frac{\partial p}{1-p^3}\,,$$

wie auch schon Euler in den Nov. Act. Petrop. T. X. gefunden hat.

Wir müssen uns hier mit den obigen Mittheilungen begnügen, und bemerken nur noch, daß in den Integraltafeln oder Sammlung von Integralformeln von Meier Hirsch. Berlin. 1810. die vollständigste Sammlung von Integralformeln enthalten ist, welche wir gegenwärtig besitzen. Auch F. X. Moth hatte in Schumachers astronomischen Nachrichten. B. IV. S. 489. neue Integraltafeln angekündigt.

Integrallogarithmus (logarithme intégral) nennt man nach Soldners (Théorie et Tables d'une nouvelle fonction transcendante. Munic. 1809. p. 7.) und Bessels (Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik. 1811. St. 1. S. 7.) Vorgange jetzt gewöhnlich das in vieler Beziehung merkwürdige und schwierige Integral

$$\int_0^x \frac{\partial x}{lx}\,,$$

mit dem schon Euler sich vielfach beschäftigt hat, und bezeichnet dasselbe auf eine ganz zweckmäßige Weise nach Soldner durch li.x, so daß also

$$1.\quad \mathrm{li}.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx}$$

ist. Daß, wenn imaginäre Größen vermieden werden sollen, für x, wie hier auch immer geschehen soll, bloß positive Werthe gesetzt werden dürfen, bedarf wohl kaum noch einer besondern Erwäh-

nung. Maſcheroni, der ſich in ſeinen Adnot. ad calculum integralem Euleri auch viel mit dieſem Integral beſchäftigt hat, ſchlug für daſſelbe den Namen Hyperlogarithmus, Caluſo (Memorie della Societa italiana. T. XII. p. 268.) dagegen, weil

$$\int\frac{\partial x}{lx}=\int\frac{\partial x}{\int\frac{\partial x}{lx}}$$

iſt, den Namen Logologarithmus vor.

1. Weil x immer poſitiv iſt, ſo kann man jederzeit $x=e^y$, wo y poſitiv und negativ ſeyn kann, ſetzen. Dann iſt $lx=y$, $\partial x=e^y\partial y$, und folglich

$$\frac{\partial x}{lx}=\frac{e^y\partial y}{y}.$$

Weil nun dem Werthe $x=0$ offenbar der Werth $y=-\infty$ entſpricht; ſo iſt

$$2.\quad li.x=\int_{-\infty}^{y}\frac{e^y\partial y}{y}.$$

y iſt, was man wohl zu betrachten hat, $=lx$. Uebrigens kann man, was ſich von ſelbſt verſteht, dieſe Gleichung auch auf folgende Art ſchreiben:

$$3.\quad li.e^y=\int_{-\infty}^{y}\frac{e^y\partial y}{y}.$$

2. Um die Natur unſers Integrals kennen zu lernen, wollen wir es in eine convergirende Reihe zu entwickeln ſuchen. Bekanntlich hat man die für jedes poſitive x convergirende Reihe

$$x=e^{lx}=1+\frac{lx}{1}+\frac{(lx)^2}{1.2}+\frac{(lx)^3}{1.2.3}+\frac{(lx)^4}{1...4}+....$$

Alſo iſt, wenn man differentiirt,

$$\partial x=\partial lx+\frac{lx.\partial lx}{1}+\frac{(lx)^2\partial lx}{1.2}+\frac{(lx)^3\partial lx}{1.2.3}+.....,$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{lx}=\frac{\partial lx}{lx}+\frac{\partial lx}{1}+\frac{lx.\partial lx}{1.2}+\frac{(lx)^2\partial lx}{1.2.3}+.....$$

Integrirt man nun; ſo erhält man

$$\int\frac{\partial x}{lx}=\int\frac{\partial lx}{lx}+\frac{1}{1}.\frac{lx}{1}+\frac{1}{2}.\frac{(lx)^2}{1.2}+\frac{1}{3}.\frac{(lx)^3}{1.2.3}+....$$

Weil aber

$$\partial 1(\pm lx)=\frac{\pm\partial lx}{\pm lx}=\frac{\partial lx}{lx}$$

iſt; ſo iſt

$$\int\frac{\partial lx}{lx}=1(\pm lx)+\text{Const.}$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{lx} = \text{Const.} + l(\pm lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo Const. eine beliebige Constante bezeichnet. In Bezug auf das doppelte Zeichen in dieser Formel ist, weil unser Integral, da wir x immer positiv nehmen, seiner Natur nach eine reelle Größe ist, klar, daß man jederzeit das untere oder obere Zeichen nehmen muß, jenachdem x kleiner oder größer als die Einheit ist. Für $x < 1$ muß man also

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C' + l(-lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

für $x > 1$ dagegen

$$\int \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo C' und C'' zwei ganz willkührliche Constanten bezeichnen, setzen, woraus man sieht, daß sich die Werthe unsers Integrals für alle Werthe der Größe x von 0 bis ∞ nicht durch eine Formel darstellen lassen.

3. Bezeichnen wir nun den Werth der willkührlichen Constante C', welchen dieselbe erhält, wenn man sich das Integral in dem Falle, wo $x < 1$ ist, so bestimmt denkt, daß es für $x = 0$ verschwindet, durch C; so ist für jedes positive x, welches < 1 ist,

4. $$\text{li}.x = C + l(-lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $x > 1$ läßt sich, wenn ε eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, li . x nach bekannten Sätzen von den bestimmten Integralen auf folgende Art ausdrücken:

$$\text{li}.x = \int_0^x \frac{\partial x}{lx} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\partial x}{lx} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\partial x}{lx}$$

$$= \text{li}.(1-\varepsilon) + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\partial x}{lx}.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\partial x}{lx} = C'' + l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots.$$

$$- C'' - l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots$$

ist; so ist für $x > 1$

$$\mathrm{li}\,.\,x = C + l(-l(1-\varepsilon)) + \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \ldots$$
$$- l(+l(1+\varepsilon)) - \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \ldots$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Es ist aber

$$l(-(1-\varepsilon)) - l(+l(1+\varepsilon)) = l\left\{-\frac{l(1-\varepsilon)}{l(1+\varepsilon)}\right\}$$
$$= l\left\{-\frac{-\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}{+\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3-\ldots}\right\} = l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\ldots}\right\};$$

also ist

$$\mathrm{li}\,.\,x = C + l\left\{-\frac{-1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3-\ldots.}{+1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3+\ldots.}\right\}$$
$$+ \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1-\varepsilon)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$- \frac{1}{1}\cdot\frac{l(1+\varepsilon)}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(l(1+\varepsilon))^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(l(1-\varepsilon))^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$+ l(+lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und folglich, weil ε eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, offenbar für jedes x, welches > 1 ist:

$$5.\quad \mathrm{li}\,.\,x = C + l(+x) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

so daß also

$$6.\quad \mathrm{li}\,.\,x = C + l(\mp lx) + \frac{1}{1}\cdot\frac{lx}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

ist, mit der Bestimmung, daß man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem respective das immer positive x kleiner oder größer als die Einheit ist. Für $x = 1$ findet, wie man leicht übersehen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\mathrm{li}\,.\,x$ Statt. Noch deutlicher fällt dies in die Augen, wenn man sich eine Curve verzeichnet, deren Abscissen und entsprechende rechtwinklige Ordinaten respective x und $\frac{1}{lx}$ sind. Diese Curve wird ungefähr die in Fig. 33., wo **A** der Anfang der Abscissen und $\mathbf{AB} = 1$ ist, dargestellte Gestalt haben, und besteht also jederzeit aus zwei von einander völlig abgesonderten Theilen oder Zweigen, von denen der eine ganz unter-, der andere ganz oberhalb der Abscissenaxe liegt. Ueberlegt man nun, daß durch $\mathrm{li}\,.\,x$ das den Coordinaten x und $\frac{1}{lx}$ entsprechende Flächenstück dieser Curve dargestellt wird; so wird man sich leicht von der Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung überzeugen, und hieran auch noch andere geometrische Betrachtungen, zu denen es hier an Raum fehlt, knüpfen können.

Für $x > 1$ ist $\frac{1}{x} < 1$. Also ist unter der Voraussetzung, daß $x > 1$ ist, jederzeit nach (6.)

7. $\mathrm{li}.x = C + \mathrm{ll}x + \frac{1}{1}\cdot\frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$

8. $\mathrm{li}.\frac{1}{x} = C + \mathrm{ll}x - \frac{1}{1}\cdot\frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$

Auch ist immer

9. $\mathrm{li}.e^x = C + \mathrm{l}x + \frac{1}{1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$

10. $\mathrm{li}.e^{-x} = C + \mathrm{l}x - \frac{1}{1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$

4. Besondere Schwierigkeit macht die Bestimmung der Constante C. Man gelangt dazu nach Soldner mittelst der Formel (10.) auf folgende Art. Bekanntlich ist

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \ldots\ldots,$$

und folglich

$$\frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = -\frac{\partial x}{1} + \frac{x\partial x}{1.2} - \frac{x^2\partial x}{1.2.3} + \frac{x^3\partial x}{1\ldots4} - \ldots\ldots$$

Also ist, wie man leicht findet,

$$\int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = -\frac{1}{1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Folglich ist nach der Gleichung (10.)

11. $$\mathrm{li}.e^{-x} = C + \mathrm{l}x + \int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x.$$

Weil nun $\mathrm{li}.0 = 0$, d. i. $\mathrm{li}.e^{-\infty} = 0$ ist; so ist

12. $$C = -\mathrm{l}\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x,$$

oder, wenn im Folgenden n immer eine positive Größe bezeichnet, die man sich in's Unendliche wachsend denkt:

13. $$C = -\mathrm{Lim}\left\{\mathrm{l}n + \int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\right\}.$$

Nun ist aber nach dem Binomischen Lehrsatze

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1 - \frac{x}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{x^2}{1.2} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und folglich, wie leicht erhellen wird, indem n immer seine vorige Bedeutung behält,

14. $$\mathrm{Lim}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

Setzen wir jetzt

$$1 - \frac{x}{n} = z ;$$

so ist

$$\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \frac{1-z^n}{1-z}\partial z ,$$

und folglich, weil für $x = 0$ und $x = n$ respective $z = 1$ und $z = 0$ ist,

$$\int_0^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z .$$

Also ist offenbar

$$\mathrm{Lim}\int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x = \mathrm{Lim}\int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z ,$$

und folglich nach (13.)

$$15.\quad C = -\mathrm{Lim}\left\{\ln + \int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z\right\} .$$

Nun ist aber

$$\frac{1-z^n}{1-z}\partial z = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1})\partial z ;$$

also

$$\int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

oder

$$\int_1^0 \frac{1-z^n}{1-z}\partial z = -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) .$$

Folglich ist nach (15.)

$$16.\quad C = \mathrm{Lim}\left\{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln\right\} .$$

Denselben Ausdruck für die Constante C hat, aber auf einem ganz andern Wege, auch Mascheroni a. a. O. gefunden. Ueber das weitere Verfahren bei der Berechnung von C ist der Artikel Summirung der Reihen (39.) im vierten Theile dieses Wörterbuchs nachzusehen. Hier mag bloß noch erwähnt werden, daß Mascheroni, wie Lacroix im Traité du calc. diff. et du calc. int. T. III. p. 521. anführt, für $n = 100$

$$C = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 618112\ 090082\ 39$$

gefunden hat. Soldner ist a. a. O. p. 13. bloß bis zur zwei- und zwanzigsten Decimale gegangen; seine drei letzten Ziffern sind 065, und weichen also von den entsprechenden Ziffern in der von Mascheroni gefundenen Zahl, welche 181 sind, ab.

5. Soldner giebt in seiner empfehlenswerthen Schrift noch eine Reihe für $\mathrm{li}.(a+x)$, die wir hier auch noch kurz entwickeln wollen. Man setze

$$l\left(1+\frac{x}{a}\right)=y;$$

so ist

$$\frac{1}{l(a+x)}=\frac{1}{la+l\left(1+\frac{x}{a}\right)}=\frac{1}{la+y}=\frac{1}{la.\left(1+\frac{y}{la}\right)}.$$

Ist nun der absolute Werth von

$$\frac{y}{la}=\frac{l\left(1+\frac{x}{a}\right)}{la}$$

kleiner als die Einheit; so hat man die convergirende Reihe

$$\frac{1}{1+\frac{y}{la}}=1-\frac{y}{la}+\frac{y^2}{(la)^2}-\frac{y^3}{(la)^3}+\ldots.,$$

die auch convergent bleibt, wenn man jedes Glied auf seinen absoluten Werth reducirt, wie aus der Lehre von der Convergenz der Reihen hier als bekannt vorausgesetzt wird. Also kann man

$$\frac{1}{l(a+x)}=\frac{1}{la}\left\{1-\frac{y}{la}+\frac{y^2}{(la)^2}-\frac{y^3}{(la)^3}+\ldots.\right\}$$

und folglich

$$\int_0^x\frac{\partial x}{l(a+x)}=\frac{x}{la}-\frac{1}{la}\int_0^x\left\{\frac{y}{la}-\frac{y^2}{(la)^2}+\frac{y^3}{(la)^3}-\ldots\right\}\partial x$$

setzen. Weil nun aber

$$1+\frac{x}{a}=e^y,$$

und folglich

$$\partial x=ae^y\partial y=a\left\{1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots.\right\}\partial y$$

ist; so ist

$$\int_0^x\frac{\partial x}{l(a+x)}=$$

$$\frac{x}{la}-\frac{a}{la}\int_0^x\left\{1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right\}\left\{\frac{y}{la}-\frac{y^2}{(la)^2}+\frac{y^3}{(la)^3}-\ldots\right\}\partial y,$$

oder, weil offenbar $y=0$ ist, wenn $x=0$ ist:

$$\int_0^x\frac{\partial x}{l(a+x)}=$$

$$\frac{x}{la}-\frac{a}{la}\int_0^y\left\{1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right\}\left\{\frac{y}{la}-\frac{y^2}{(la)^2}+\frac{y^3}{(la)^3}-\ldots\right\}\partial y.$$

Die beiden unter dem Integralzeichen in einander multiplicirten Reihen sind, wenn der absolute Werth von $\frac{y}{la}$ kleiner als die Einheit ist, convergent und bleiben auch convergent, wenn man für jedes Glied derselben seinen absoluten Werth setzt. Daher kann man auf das Product dieser beiden Reihen den im Artikel Convergenz der Reihen (20.) i. d. Z. bewiesenen Satz anwenden, und erhält also, wenn wir die Coefficienten der durch Multiplication der beiden Reihen in einander hervorgehenden Reihe einstweilen durch $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ bezeichnen,

$$\int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)} = \frac{x}{la} - \frac{a}{la}\int_0^y (A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + \ldots)\partial y,$$

oder

$$17. \quad \int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)} = \frac{x}{la} - \frac{a}{la}\left(\tfrac{1}{2}A_1 y^2 + \tfrac{1}{3}A_2 y^3 + \tfrac{1}{4}A_3 y^4 + \tfrac{1}{5}A_4 y^5 + \ldots.\right),$$

wo aber, was man wohl zu beachten hat, der absolute Werth von

$$\frac{y}{la} = \frac{l\left(1+\frac{x}{a}\right)}{la}$$

kleiner als die Einheit seyn muß. Das Gesetz der Coefficienten $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ findet man leicht. Es ist nämlich

$$18. \quad A_1 = \frac{1}{la}$$

und allgemein

$$A_n = \frac{1}{1..(n-1)la} - \frac{1}{1..(n-2)(la)^2} + \ldots. \pm \frac{1}{(la)^{n+1}},$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{1...nla} - \frac{1}{1..(n-1)(la)^2} + \frac{1}{1..(n-2)(la)^3} - \ldots. \mp \frac{1}{(la)^n}.$$

Dies giebt die Relation

$$19. \quad \frac{A_n}{la} + A_{n+1} = \frac{1}{1\ldots nla},$$

mittelst welcher und des in (18.) angegebenen Werths von A_1 die Coefficienten leicht berechnet werden können.

Setzt man

$$20. \quad \int_0^x \frac{\partial x}{l(a+x)} = \frac{x}{la} - a\left\{\tfrac{1}{2}B_1\frac{y^2}{(la)^2} + \tfrac{1}{3}B_2\frac{y^3}{(la)^3} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{y^4}{(la)^4} + \ldots.\right\};$$

so ist

$$B_1 = A_1 la,\ B_2 = A_2 (la)^2,\ B_3 = A_3 (la)^3, \ldots,$$

d. i. allgemein

$$B_n = A_n (la)^n .$$

Folglich ist

$$A_n = \frac{B_n}{(la)^n},$$

und also nach (19.)

$$\frac{B_n}{(la)^{n+1}} + \frac{B_{n+1}}{(la)^{n+1}} = \frac{1}{1 \ldots n\, la};$$

also

$$21.\quad B_n + B_{n+1} = \frac{(la)^n}{1 \ldots . n},$$

wozu man noch die Gleichung

$$22.\quad B_1 = 1$$

zu nehmen hat. Die Gleichung (21.) gewährt, wie es uns scheint, die bequemste Berechnung der Coefficienten.

Aus dem in (20.) gefundenen Integral läßt sich nun li.(a + x) auf folgende Art ableiten.

Es ist nämlich offenbar

$$li.(a + x) = \int_0^{a+x} \frac{\partial z}{lz},$$

oder

$$li.(a+x) = \int_0^{a} \frac{\partial z}{lz} + \int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz},$$

d. i., wie sogleich in die Augen fällt,

$$li.(a+x) = li.a + \int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz}.$$

Setzen wir nun

$$z = a + u,\ \partial z = u;$$

so ist

$$\frac{\partial z}{lz} = \frac{\partial u}{l(a+u)},$$

und folglich, weil für $z = a$ und $z = a + x$ respective $u = 0$ und $u = x$ ist,

$$\int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz} = \int_0^{x} \frac{\partial u}{l(a+u)},$$

oder, was dasselbe ist

$$\int_a^{a+x} \frac{\partial z}{lz} = \int_0^{x} \frac{\partial x}{l(a+x)}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\mathrm{li}.(a+x) = \mathrm{li}.a + \int_0^x \frac{\partial x}{\mathrm{l}(a+x)},$$

und folglich nach (20.)

23. $$\mathrm{li}.(a+x) = \mathrm{li}.a + \frac{x}{\mathrm{l}a} - a\left\{\tfrac{1}{2}B_1\frac{y^2}{(\mathrm{l}a)^2} + \tfrac{1}{3}B_2\frac{y^3}{(\mathrm{l}a)^3} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{y^4}{(\mathrm{l}a)^4} + \ldots\right\},$$

wo aber immer der absolute Werth von

$$\frac{y}{\mathrm{l}a} = \frac{\mathrm{l}\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{l}a}$$

kleiner als die Einheit seyn muß. Mittelst dieser Formel und der directen Formel (6.) hat Soldner eine Tafel von li.x berechnet, welche sich von $x=0$ bis $x=1280$ erstreckt. Mittelst der directen Formel ging er bis zu $x=10$, und schritt von hier an von Glied zu Glied mittelst der Formel (23.) bis zur Gränze der Tafel fort. Wir theilen diese Tafel am Ende dieses Artikels mit, ohne weitere Erläuterungen über ihren Gebrauch beizufügen, indem sich jeder von selbst leicht in denselben finden wird.

Bekanntlich ist $\mathrm{li}.0 = 0$. Man findet aber leicht, daß für Werthe von x, die größer als die Einheit, aber nicht viel von derselben verschieden sind, li.x negativ ist; für größere Werthe von x ist dagegen li.x positiv; daher muß es außer dem Werthe $x=0$ nothwendig noch einen zweiten die Einheit übersteigenden Werth von x geben, für welchen $\mathrm{li}.x = 0$ ist. Soldner findet

$$\mathrm{li}.1{,}4513692346 = 0;$$

nach Bessels Rechnung (a. a. O. S. 14.) ist

$$\mathrm{li}.1{,}45136923495 = 0.$$

Auch mögen hier aus Soldners Schrift noch folgende ein besonderes Interesse habende Integrallogarithmen mitgetheilt werden:

$$\mathrm{li}.0{,}1 = -\,0{,}0323897896$$
$$\mathrm{li}.10 = \,6{,}1655995048$$
$$\mathrm{li}.e^{-1} = -\,0{,}2193839344$$
$$\mathrm{li}.e = \,1{,}8951178164.$$

6. Wenn x sehr groß oder sehr klein ist; so convergirt die Reihe (6.) nur sehr langsam. Der Grund dieser langsamen Convergenz liegt, wie Bessel in seinem schönen Aufsatze über den Integrallogarithmus ganz richtig bemerkt, in der geringen Convergenz der Reihe

$$x = 1 + \frac{\mathrm{l}x}{1} + \frac{(\mathrm{l}x)^2}{1.2} + \frac{(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3} + \frac{(\mathrm{l}x)^4}{1\ldots4} + \ldots.$$

Könnte man diese Reihe convergenter machen, oder lx durch

eine stark convergirende Reihe ausdrücken; so würde man dadurch einen brauchbarern Ausdruck für den Integrallogarithmus erhalten. Eine solche stark convergirende Reihe für lx erhält nun Bessel durch folgenden an sich sehr einfachen, aber bemerkenswerthen, Kunstgriff. Es ist

$$24.\quad lx = il.x^{\frac{1}{i}} = il\{1 + (x^{\frac{1}{i}} - 1)\},$$

wo man, welchen positiven Werth auch x haben mag, die Größe $x^{\frac{1}{i}} - 1$ durch zweckmäßige Annahme der willkührlichen Zahl i der Null beliebig nahe bringen kann. Wenigstens muß i jederzeit so angenommen werden, daß $x^{\frac{1}{i}} < 2$ ist, damit der absolute Werth von $x^{\frac{1}{i}} - 1$ kleiner als die Einheit werde. Dann ist nach der bekannten logarithmischen Reihe

$$25.\quad lx = i\{(x^{\frac{1}{i}}-1) - \tfrac{1}{2}(x^{\frac{1}{i}}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x^{\frac{1}{i}}-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x^{\frac{1}{i}}-1)^4 + \ldots\},$$

wobei zu bemerken ist, daß sich diese Reihe durch zweckmäßige Annahme der willkührlichen Zahl i beliebig convergent machen läßt. Also ist

$$26.\quad \frac{1}{lx} = \frac{1}{i}\left\{(x^{\frac{1}{i}}-1) - \tfrac{1}{2}(x^{\frac{1}{i}}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x^{\frac{1}{i}}-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x^{\frac{1}{i}}-1)^4 + \ldots\right\}^{-1}$$

$$= \frac{1}{i(x^{\frac{1}{i}}-1)} + \frac{A_0}{i} + \frac{A_1}{i}\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right) + \frac{A_2}{i}\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right)^2 + \frac{A_3}{i}\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right)^3 + \ldots,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt und dann zwischen den Gränzen 0 und x integrirt:

$$27.\quad li.x = \frac{1}{i}\int_0^x \frac{\partial x}{x^{\frac{1}{i}}-1} + \frac{A_0}{i}x + \frac{A_1}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)\partial x$$

$$+ \frac{A_2}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^2\partial x + \frac{A_3}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^3\partial x + \ldots.$$

Setzen wir nun $x^{\frac{1}{i}} = z$; so erhalten wir

$$\frac{1}{i}\int_0^x \frac{\partial x}{x^{\frac{1}{i}}-1} = \int_0^z \frac{z^{i-1}\partial z}{z-1} = \int_0^z \left\{\frac{z^{i-1}-1}{z-1} + \frac{1}{z-1}\right\}\partial z$$

$$= \int_0^z \left\{1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{i-2} + \frac{1}{z-1}\right\}\partial z$$

$$= z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \ldots + \frac{1}{i-1}z^{i-1} + \int_0^z \frac{\partial z}{z-1}$$

$$= x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}} + \int_0^z \frac{\partial z}{z-1}.$$

Ferner ist allgemein nach dem binomischen Lehrsatze

$$\frac{1}{i}(x^{\frac{1}{i}}-1)^k\partial x = (z-1)^k z^{i-1}\partial z$$

$$= (z^{i+k-1} - k_1 z^{i+k-2} + k_2 z^{i+k-3} - \ldots \mp k_2 z^i \pm z^{i-1})\partial z ,$$

$$\frac{1}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^k\partial x = \int_0^z (z-1)^k z^{i-1}\partial z$$

$$= \frac{1}{i+k} z^{i+k} - \frac{k_1}{i+k-1} z^{i+k-1} + \frac{k_2}{i+k-2} z^{i+k-2} - \ldots .$$

$$\ldots . \mp \frac{k_1}{i+1} z^{i+1} \pm \frac{1}{i} z^i .$$

Also ist, wie man leicht findet,

$$\frac{1}{i}\int_0^x (x^{\frac{1}{i}}-1)^k\partial x$$

$$= \frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{k}{i}}}{1+\frac{k}{i}} - \frac{k_1 x^{\frac{k-1}{i}}}{1+\frac{k-1}{i}} + \frac{k_2 x^{\frac{k-2}{i}}}{1+\frac{k-2}{i}} - \ldots \mp \frac{k_1 x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} \pm 1\right\},$$

und folglich

$$\text{li}.x = \int_0^z \frac{\partial z}{z-1} + x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}}$$

$$+ A_0\frac{x}{i}$$

$$+ A_1\frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} - 1\right\}$$

$$+ A_2\frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{2}{i}}}{1+\frac{2}{i}} - \frac{2x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} + 1\right\}$$

$$+ A_3\frac{x}{i}\left\{\frac{x^{\frac{3}{i}}}{1+\frac{3}{i}} - \frac{3x^{\frac{2}{i}}}{1+\frac{2}{i}} + \frac{3x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}} - 1\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder auch, wie leicht aus bekannten Sätzen der Differenzenrechnung erhellet, wenn man die ersten Glieder der successiven Differenzenreihen der Reihe

$$1, \frac{x^{\frac{1}{i}}}{1+\frac{1}{i}}, \frac{x^{\frac{2}{i}}}{1+\frac{2}{i}}, \frac{x^{\frac{3}{i}}}{1+\frac{3}{i}}, \frac{x^{\frac{4}{i}}}{1+\frac{4}{i}}, \ldots .$$

nach der Ordnung durch

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \ldots\ldots$$

bezeichnet, und $\Delta_0 = 1$ setzt:

$$\text{li}.x = \int_0^x \frac{\partial z}{z-1} + x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}}$$
$$+ \frac{x}{i}\left\{A_0\Delta_0 + A_1\Delta_1 + A_2\Delta_2 + A_3\Delta_3 + A_4\Delta_4 + \ldots\ldots\right\}.$$

Weil nun

$$\partial l\{\pm(z-1)\} = \frac{\pm\partial z}{\pm(z-1)} = \frac{\partial z}{z-1}$$

ist; so ist

$$\int\frac{\partial z}{z-1} = \text{Const.} + l\{\pm(z-1)\},$$

wo man das obere oder das untere Zeichen nehmen muß, jenachdem z, d. i. $x^{\frac{1}{i}}$, größer oder kleiner als die Einheit ist. Ist nun z kleiner als die Einheit, so ist offenbar Const. $= 0$, wenn man das Integral zwischen den Gränzen 0 und z nimmt, und folglich für $z < 1$

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = l\{-(z-1)\}.$$

Ist aber $z > 1$; so ist, wenn ε eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet,

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = \int_0^{1-\varepsilon}\frac{\partial z}{z-1} + \int_{1+\varepsilon}^z \frac{\partial z}{z-1},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird,

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = l\{-(1-\varepsilon-1)\} + l\{+(z-1)\} - l\{+(1+\varepsilon-1)\}$$
$$= l\varepsilon + l\{+(z-1)\} - l\varepsilon = l\{+(z-1)\}.$$

Also ist

$$\int_0^z \frac{\partial z}{z-1} = l\{\mp(z-1)\} = l\{\mp(x^{\frac{1}{i}}-1)\},$$

und in dieser Formel das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $x^{\frac{1}{i}}$ kleiner oder größer als die Einheit ist. Nach dem Obigen ist nun

$$28.\quad \text{li}.x = l\{\mp(x^{\frac{1}{i}}-1)\} + x^{\frac{1}{i}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \ldots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}}$$
$$+ \frac{x}{i}\left\{A_0\Delta_0 + A_1\Delta_1 + A_2\Delta_2 + A_3\Delta_3 + A_4\Delta_4 + \ldots\right\}$$

und auch in dieser Formel das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $x^{\frac{1}{i}}$ kleiner oder größer als die Einheit ist.

Es kommt nun noch auf das Gesetz der Coefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, ... an, welches Bessel auf die folgende sinnreiche Weise findet. Es ist nämlich, wenn wir

$$\frac{\alpha}{l(1+\alpha)} = f(\alpha)$$

setzen und die Differentialquotienten nach Lagrange bezeichnen, wie sehr leicht erhellen wird,

$$A_n = \frac{f^{(n+1)}(0)}{1.2.3..(n+1)} .$$

Sey nun $(1+\alpha)^x = u$; so ist

$$x\,l(1+\alpha) = lu, \quad \frac{\partial u}{u} = l(1+\alpha).\partial x, \quad \partial u = l(1+\alpha).u\partial x ,$$

und folglich, wenn man zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = 1$ integrirt,

$$\frac{\alpha}{l(1+\alpha)} = f(\alpha) = \int_0^1 (1+\alpha)^x \partial x .$$

Differentiirt man nun nach α, auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen; so erhält man nach und nach:

$$f'(\alpha) = \int_0^1 x(1+\alpha)^{x-1}\partial x ,$$

$$f''(\alpha) = \int_0^1 x(x-1)(1+\alpha)^{x-2}\partial x ,$$

$$f'''(\alpha) = \int_0^1 x(x-1)(x-2)(1+\alpha)^{x-3}\partial x ,$$

u. s. w. u. s. w.

$$f^{(n+1)}(\alpha) = \int_0^1 x(x-1)(x-2)..(x-n)(1+\alpha)^{x-n-1}\partial x$$

u. s. w. u. s. w.

Setzt man also $\alpha = 0$, so erhält man

$$f(0) = \int_0^1 \partial x = 1 ,$$

$$f^{(n+1)}(0) = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\partial x .$$

Folglich ist nach dem Obigen offenbar

$$A_n = \int_0^1 \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots.(n+1)}\partial x .$$

Mittelst dieser Formel, zu welcher Bessel auf einem von dem hier eingeschlagenen etwas verschiedenen Wege gelangt, findet man nun ohne Schwierigkeit:

$$A_0 = \frac{1}{2} = +\frac{1}{2} ,$$

$$A_1 = \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} ,$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{2}\right) = +\frac{1}{24} ,$$

$$A_3 = \frac{1}{1..4}\left(\frac{1}{5} - \frac{6}{4} + \frac{11}{3} - \frac{6}{2}\right) = -\frac{19}{720} ,$$

$$A_4 = \frac{1}{1..5}\left(\frac{1}{6} - \frac{10}{5} + \frac{35}{4} - \frac{50}{3} + \frac{24}{2}\right) = +\frac{3}{160} ,$$

u. s. w. u. s. w.

Bessel entwickelt in seiner Abhandlung noch mehrere andere Formeln zur Berechnung des Integrallogarithmus, die wir aber hier der Beschränktheit des Raumes wegen nicht mittheilen können, sondern auf die vieles Bemerkenswerthe enthaltende Abhandlung selbst verweisen müssen. Noch s. m. über den Integrallogarithmus eine Abhandlung von Bidone in den Mém. de l'Acad. de Turin. 1805—1808, Sciences phys. et math., p. 19. des Mém. présentés. Eine Anwendung seiner Methode zur annähernden Berechnung des Integrallogarithmus macht auch Gauß in der betreffenden berühmten Abhandlung in den Comment. soc. reg. gott. recent. Vol. III. p. 75. Die Soldnersche Tafel lassen wir nun folgen.

Zahl	li. —	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III. +
0,00	0,0000000	18297	5458	2128
0,01	0,0018297	23755	3330	598
0,02	0,0042052	27085	2732	309
0,03	0,0069137	29817	2423	190
0,04	0,0098954	32240	2233	125
0,05	0,0131194	34473	2108	88
0,06	0,0165667	36581	2023	63
0,07	0,0202248	38604	1960	42
0,08	0,0240852	40564	1918	31
0,09	0,0281416	42482	1887	21
0,10	0,0323898	44369	1866	11
0,11	0,0368267	46235	1855	7
0,12	0,0414502	48090	1848	0
0,13	0,0462592	49938	1848	5
0,14	0,0512530	51786	1853	8
0,15	0,0564316	53639	1861	13
0,16	0,0617955	55500	1874	16
0,17	0,0673455	57374	1890	18
0,18	0,0730829	59264	1908	23
0,19	0,0790093	61172	1931	24
0,20	0,0851265	63103	1955	28
0,21	0,0914368	65058	1983	30
0,22	0,0979426	67041	2013	33
0,23	0,1046467	69054	2046	36
0,24	0,1115521	71100	2082	37
0,25	0,1186621	73182	2119	42
0,26	0,1259803	75301	2161	43
0,27	0,1335104	77462	2204	47
0,28	0,1412566	79666	2251	49
0,29	0,1492232	81917	2300	52
0,30	0,1574149	84217	2352	55
0,31	0,1658366	86569	2407	58
0,32	0,1744935	88976	2465	63
0,33	0,1833911	91441	2528	65
0,34	0,1925352	93969	2593	68
0,35	0,2019321	96562	2661	74
0,36	0,2115883	99223	2735	76
0,37	0,2215106	101958	2811	81
0,38	0,2317064	104769	2892	86
0,39	0,2421833	107661	2978	91
0,40	0,2529494	110639	3069	96
0,41	0,2640133	113708	3165	100
0,42	0,2753841	116873	3265	107
0,43	0,2870714	120138	3372	113
0,44	0,2990852	123510	3485	122
0,45	0,3114362	126995	3607	126
0,46	0,3241357	130602	3733	134
0,47	0,3371959	134335	3867	146
0,48	0,3506294	138202	4013	149
0,49	0,3644496	142215	4162	164
0,50	0,3786711	146377	4326	172
0,51	0,3933088	150703	4498	184
0,52	0,4083791	155201	4682	197
0,53	0,4238992	159883	4879	209
0,54	0,4398875	164762	5088	225
0,55	0,4563637	169850	5313	240
0,56	0,4733487	175163	5553	260
0,57	0,4908650	180716	5813	278
0,58	0,5089366	186529	6091	296
0,59	0,5275895	192620	6387	326
0,60	0,5468515	199007	6713	346
0,61	0,5667522	205720	7059	381
0,62	0,5873242	212779	7440	407
0,63	0,6086021	220219	7847	447
0,64	0,6306240	228066	8294	485
0,65	0,6534306	236360	8779	531
0,66	0,6770666	245139	9310	583
0,67	0,7015805	254449	9893	638
0,68	0,7270254	264342	10530	704
0,69	0,7534596	274873	11235	780
0,70	0,7809469	286108	12015	863
0,71	0,8095577	298123	12878	963
0,72	0,8393700	311001	13841	1074
0,73	0,8704701	324842	14915	1209
0,74	0,9029543	339757	16124	1362
0,75	0,9369300	355881	17486	1542
0,76	0,9795181	373367	19028	1762
0,77	1,0098548	392395	20790	2017
0,78	1,0490943	413185	22807	2327
0,79	1,0904128	435992	25134	2709
0,80	1,1340120	461126	27843	3170

Zahl	li. —	Zahl	li. —
,80	1,1340120	0,91	1,8760780
,81	1,1801246	0,92	1,9887871
,82	1,2290215	0,93	2,1172535
,83	1,2810197	0,94	2,2663481
,84	1,3364941	0,95	2,4436226
0,85	1,3958924	0,96	2,6617277
0,86	1,4597547	0,97	2,9443801
0,87	1,5287419	0,98	3,3448241
0,88	1,6036733	0,99	4,0329587
0,89	1,6855829	1,00	unendlich
0,90	1,7758007		

Zahl	li. ∓	Zahl	li. +	Zahl	li. +	Zahl	li. +
1,0	unendlich	11	6,5919851	45	17,173366	260	61,233401
1,1	1,6757728	12	7,0005477	50	18,468696	280	64,806034
1,2	0,9337873	13	7,3965480	55	19,731245	300	68,333612
1,3	0,4801779	14	7,7808256	60	20,965412	320	71,820157
1,4	0,1449911	15	8,1548249	65	22,174669	360	78,683375
1,5	0,1250650	16	8,5197165	70	23,361813	400	85,417888
1,6	0,3537475	17	8,8764646	75	24,529138	440	92,040677
1,7	0,5537438	18	9,2258743	80	25,678554	480	98,565102
1,8	0,7326370	19	9,5686258	90	27,929887	520	105,00191
1,9	0,8953266	20	9,9053000	100	30,126139	560	111,35993
2,0	1,0451638	22	10,562353	110	32,275096	600	117,64651
2,5	1,6672946	24	11,200316	120	34,382807	640	123,86784
3	2,1635889	26	11,821734	130	36,454085	720	136,13526
4	2,9675853	28	12,428628	140	38,492841	800	148,19668
5	3,6345880	30	13,022632	150	40,502303	880	160,07861
6	4,2222224	32	13,605092	160	42,485178	960	171,80200
7	4,7570508	34	14,177131	180	46,380020	1040	183,38376
8	5,2537182	36	14,739697	200	50,192168	1120	194,83783
9	5,7212387	38	15,293602	220	53,932872	1200	206,17582
10	6,1655895	40	15,839544	240	57,610933	1280	217,40761

Integration durch Annäherung. Von den verschiedenen Methoden Integrale durch Annäherung zu finden, oder von den sogenannten mechanischen Quadraturen, ist in dem Artikel Integral (135.), vorzüglich aber in dem Artikel Quadratur (122.), schon in so großer Ausführlichkeit die Rede gewesen, daß wir uns hier nur mit einer kleinen Nachlese begnügen müssen. Namentlich können wir es uns nicht versagen, eine überaus einfache, aber höchst sinnreiche, Methode hier mitzutheilen, welche **Gauß** in der in jeder Beziehung so wichtigen Abhandlung: **Determinatio attractionis etc. Comment. soc. reg. Gott. rec. Vol. IV. Gott. 1820.** zur annähernden Bestimmung der Integrale von der Form

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}},$$

und ähnlicher, von denen nachher die Rede seyn wird, gegeben hat

Diese Methode beruhet vorzüglich auf dem folgenden arithmetischen Theorem, welches Gauß a. a. O. ohne Beweis mitgetheilt hat, und das daher hier von uns zunächst in aller Strenge bewiesen werden soll.

1. Wenn m und n zwei beliebige positive Größen sind, und, indem man die Quadratwurzel immer positiv nimmt,

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n),\quad n' = \sqrt{mn};$$

$$m'' = \tfrac{1}{2}(m'+n'),\quad n'' = \sqrt{m'n'};$$

$$m''' = \tfrac{1}{2}(m''+n''),\quad n''' = \sqrt{m''n''}$$

$$m^{IV} = \tfrac{1}{2}(m'''+n'''),\quad n^{IV} = \sqrt{m'''n'''};$$

u. s. w. u. s. w

gesetzt wird; so nähern sich die Größen m, m′, m″, m‴, ... und n, n′, n″, n‴, ... immer mehr und mehr einer und derselben bestimmten Gränze, der sie auch beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur die Berechnung dieser Größen weit genug fortsetzt.

Dieser Satz kann auf folgende Art bewiesen werden.

I. Zuerst erhellet, daß die Größen m, m′, m″, m‴, m^{IV}, ... von der zweiten an nie zunehmen. Wäre nämlich $m'' > m'$; so wäre, da

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n),\quad m'' = \tfrac{1}{2}(m'+n')$$

ist,

$$m' + n' > m + n;$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}(m+n) + \sqrt{mn} > m + n$$

oder

$$2\sqrt{mn} > m + n;$$

also

$$m - 2\sqrt{mn} + n < 0$$

oder

$$(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 < 0,$$

welches ungereimt ist, da bekanntlich immer

$$(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \gtrless 0$$

ist. Man sieht also, daß m″ nicht größer als m′, überhaupt keine der Größen m′, m″, m‴, m^{IV}, ... größer als die nächst vorhergehende seyn kann, oder daß die Größen m, m′, m″, m‴, m^{IV}, ... von der zweiten an nie zunehmen. Daß m′ in gewissen Fällen größer wie m seyn kann, erhellet leicht.

II. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß die Größen n, n′, n″, n‴, n^{IV}, ... von der zweiten an nie abnehmen. Wäre nämlich $n'' < n'$; so wäre $\sqrt{m'n'} < \sqrt{mn}$, $m'n' < mn$, d. i.

$$\tfrac{1}{2}(m+n) > \sqrt{mn}, \quad m+n > 2\sqrt{mn},$$

und folglich wieder

$$m - 2\sqrt{mn} + n > 0,$$

d. i.

$$(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 > 0,$$

welches dieselbe Ungereimtheit ist, wie vorher.

III. Die Differenzen

$$m-n, \; m'-n', \; m''-n'', \; m'''-n''', \; m^{IV}-n^{IV}, \; \ldots,$$

bloß in Bezug auf ihre absoluten Werthe genommen, bilden eine fortwährend abnehmende Reihe, und können beliebig klein gemacht werden, wenn man sie nur weit genug vom Anfange der obigen Reihe entfernt nimmt.

Es ist nämlich

$$m' - n' = \tfrac{1}{2}(m+n) - \sqrt{mn} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2,$$

$$m'' - n'' = \tfrac{1}{2}(m'+n') - \sqrt{m'n'} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m'} - \sqrt{n'})^2,$$

$$m''' - n''' = \tfrac{1}{2}(m''+n'') - \sqrt{m''n''} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m''} - \sqrt{n''})^2,$$

$$m^{IV} - n^{IV} = \tfrac{1}{2}(m'''+n''') - \sqrt{m'''n'''} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{m'''} - \sqrt{n'''})^2,$$

u. s. w. u. s. w.

oder, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$m' - n' = (m-n) \cdot \frac{m-n}{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2},$$

$$m'' - n'' = (m'-n') \cdot \frac{m'-n'}{2(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2},$$

$$m''' - n''' = (m''-n'') \cdot \frac{m''-n''}{2(\sqrt{m''}+\sqrt{n''})^2},$$

$$m^{IV} - n^{IV} = (m'''-n''') \cdot \frac{m'''-n'''}{2(\sqrt{m'''}+\sqrt{n'''})^2},$$

u. s. w. u. s. w.

d. i.

$$m' - n' = \tfrac{1}{2}(m-n) \cdot \frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2},$$

$$m'' - n'' = \frac{1}{2^2}(m-n) \cdot \frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2} \cdot \frac{m'-n'}{(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2},$$

$$m''' - n''' = \frac{1}{2^3}(m-n) \cdot \frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2} \cdot \frac{m'-n'}{(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2} \cdot \frac{m''-n''}{(\sqrt{m''}+\sqrt{n''})^2},$$

u. s. w. u. s. w.

Da nun

$$(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 = m + n + 2\sqrt{mn}$$

ist; so übersteigt offenbar der absolute Werth keiner der Brüche

$$\frac{m-n}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}, \quad \frac{m'-n'}{(\sqrt{m'}+\sqrt{n'})^2}, \quad \frac{m''-n''}{(\sqrt{m''}+\sqrt{n''})^2}, \quad \ldots\ldots$$

die Einheit, und im Allgemeinen ist also für kein k der absolute Werth von $m^{(k)} - n^{(k)}$ größer als der absolute Werth der Größe

$$\frac{1}{2^k}(m - n),$$

woraus das zu Beweisende sich unmittelbar ergiebt.

IV. Nach I., II. und III. nehmen also die Größen m, m', m'', m''', m^{IV}, ... von der zweiten an nie zu, die Größen n, n', n'', n''', n^{IV}, ... dagegen nehmen von der zweiten an nie ab, und die absoluten Werthe der Differenzen

$$m - n,\ m' - n',\ m'' - n'',\ m''' - n''',\ \ldots\ldots$$

nehmen fortwährend ab, können auch beliebig klein gemacht werden, wenn man sie nur weit genug vom Anfange dieser Reihe entfernt nimmt. Dies führt aber offenbar unmittelbar zu dem zu beweisenden Satze.

Zugleich erhellet aus diesem Beweise, daß, wenn namentlich m und n nur wenig von einander verschieden sind, die Differenzen $m - n$, $m' - n'$, $m'' - n''$, $m''' - n'''$, ... bald sehr klein werden.

Die gemeinschaftliche Gränze, welcher sich die Größen m, m', m'', m''', ... und n, n', n'', n''', ... immer mehr und mehr, und, wenn man sich nur weit genug vom Anfange dieser Reihen entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wollen wir im Folgenden mit Gauß durch μ bezeichnen und das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen m und n nennen, eine Benennung, welche offenbar daher entstanden ist, weil m', n'; m'', n''; m''', n'''; m^{IV}, n^{IV}; ..... respective die arithmetischen und geometrischen Mittel zwischen m, n; m', n'; m'', n''; m''', n'''; ..... sind. Aus dem Beweise des vorigen Lehrsatzes ergiebt sich unmittelbar, daß die Größe μ zwischen jeden zwei zusammengehörenden der Größen m', n'; m'', n''; m''', n'''; m^{IV}, n^{IV}; ..... als zwei Gränzen enthalten ist, eine Bemerkung, welche für die Beurtheilung des Fehlers, welchen man begeht, wenn man die eine von zwei zusammengehörenden Gränzen der Größe μ als einen Näherungswerth dieser Größe betrachtet, von Wichtigkeit ist.

Dies vorausgesetzt, läßt sich nun ferner der folgende Lehrsatz beweisen.

2. Behält μ seine vorige Bedeutung; so ist jederzeit

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{\mu}.$$

Um dies zu beweisen, denke man sich den Winkel φ' so bestimmt, daß

$$\sin\varphi = \frac{2m\sin\varphi'}{(m+n)\cos\varphi'^2 + 2m\sin\varphi'^2}$$

ist. Daß diese Bestimmung immer möglich ist, läßt sich auf folgende Art übersehen. Zuerst erhellet, daß der absolute Werth des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nie größer als die Einheit ist. Wäre nämlich, immer bloß rücksichtlich der absoluten Werthe,

$$\frac{2m \sin \varphi'}{(m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2} > 1 ;$$

so wäre

$$2m \sin \varphi' > (m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2 ,$$

oder

$$2m \sin \varphi' > m(1+\sin \varphi'^2) + n \cos \varphi'^2 ,$$

und folglich, da wir m und n als positiv annehmen, um so mehr

$$2m \sin \varphi' > m(1+\sin \varphi'^2)$$

oder

$$2 \sin \varphi' > 1 + \sin \varphi'^2$$

immer bloß rücksichtlich des absoluten Werths von $\sin \varphi'$. Also wäre, wenn man quadrirt,

$$4 \sin \varphi'^2 > 1 + 2 \sin \varphi'^2 + \sin \varphi'^4$$

oder

$$1 - 2 \sin \varphi'^2 + \sin \varphi'^4 < 0 ,$$

d. i.

$$(1 - \sin \varphi'^2)^2 < 0 \text{ oder } \cos \varphi'^4 < 0 ,$$

welches ungereimt ist. Da nun ferner die Function

$$\frac{2m \sin \varphi'}{(m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2}$$

für $\varphi' = 0$ verschwindet, für $\varphi' = \pm \frac{1}{2}\pi$ dagegen $= \pm 1$ wird, und sich offenbar stetig ändert, wenn man φ' sich von 0 bis $\pm \frac{1}{2}\pi$ stetig ändern läßt; so ist klar, daß sich φ' immer so bestimmen lassen muß, daß der Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{2m \sin \varphi'}{(m+n)\cos \varphi'^2 + 2m \sin \varphi'^2}$$

genügt wird. Dasselbe ergiebt sich übrigens auch unmittelbar aus dem gleich nachher vollständig entwickelten Ausdrucke von $\sin \varphi'$, welcher offenbar unter allen Umständen eine reelle Größe ist. Auch überzeugt man sich auf der Stelle, daß, wenn φ' von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π wächst, auch φ respective von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π wächst, wenn auch in ungleichen Intervallen, so daß also $\sin \varphi$, $\sin \varphi'$ und $\cos \varphi$, $\cos \varphi'$ immer gleiche Vorzeichen haben.

Entwickelt man mittelst der Gleichung $\cos \varphi^2 = 1 - \sin \varphi^2$ aus dem obigen Ausdrucke des Sinus den Cosinus von φ; so erhält man

$$\cos\varphi = \cos\varphi' . \frac{\sqrt{(m+n)^2\cos\varphi'^2 + 4mn\sin\varphi'^2}}{(m+n)\cos\varphi'^2 + 2m\sin\varphi'^2},$$

oder, weil

$$(m+n)^2 = 4m'^2,\ 4mn = 4n'^2$$

ist,

$$\cos\varphi = 2\cos\varphi' . \frac{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}}{(m+n)\cos\varphi'^2 + 2m\sin\varphi'^2},$$

die Quadratwurzel positiv genommen, weil $\cos\varphi$ und $\cos\varphi'$ gleiche Vorzeichen haben.

Aus dem obigen Ausdrucke für $\sin\varphi$ ergiebt sich auch leicht die Gleichung

$$(m+n)\sin\varphi + (m-n)\sin\varphi\sin\varphi'^2 = 2m\sin\varphi',$$

und aus dieser Gleichung erhält man ohne Schwierigkeit

$$\sin\varphi' = \frac{m \pm \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}{(m-n)\sin\varphi},$$

wo es sich nun bloß noch fragt, welches Zeichen man zu nehmen hat. Man überzeugt sich aber leicht, daß, wenn man das obere Zeichen nimmt, der absolute Werth des Bruchs auf der rechten Seite jederzeit größer als die Einheit ist. Daher muß man das untere Zeichen nehmen, und setzt also

$$\sin\varphi' = \frac{m - \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}{(m-n)\sin\varphi}.$$

Aus dieser Gleichung folgt auf der Stelle

$$\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2} = m - (m-n)\sin\varphi\sin\varphi'.$$

Da aus der Formel für $\sin\varphi$

$$(m+n)\cos\varphi'^2 + 2m\sin\varphi'^2 = 2m\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}$$

folgt; so kann man die Formel für $\cos\varphi$ auch auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\cos\varphi = \cos\varphi' . \frac{\sin\varphi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}}{m\sin\varphi'},$$

und erhält hieraus ferner leicht

$$\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2} = m\cot\varphi\tang\varphi'.$$

Differentiirt man nun die Gleichung

$$(m+n)\sin\varphi + (m-n)\sin\varphi\sin\varphi'^2 = 2m\sin\varphi';$$

so erhält man

$$\{m+n+(m-n)\sin\varphi'^2\}\cos\varphi\,\partial\varphi = 2\{m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi\}\cos\varphi'\partial\varphi',$$

oder

$$\frac{\partial\varphi}{m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi'} = \frac{2\cos\varphi'\partial\varphi'}{\cos\varphi\{m+n+(m-n)\sin\varphi'^2\}},$$

oder

$$\frac{\partial\varphi}{m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi'} = \frac{2\cos\varphi'\partial\varphi}{\cos\varphi\{(m+n)\cos\varphi'^2+2m\sin\varphi'^2\}}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$m-(m-n)\sin\varphi\sin\varphi' = \sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2},$$

$$\frac{2\cos\varphi'}{\cos\varphi\{(m+n)\cos\varphi'^2+2m\sin\varphi'^2\}} = \frac{1}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}.$$

Also ist

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}},$$

und folglich, wie nach dem Obigen nun leicht erhellet, da φ und φ' zugleich $=0$ und 2π sind:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}.$$

Ganz auf dieselbe Weise ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi''}{2\pi\sqrt{m''^2\cos\varphi''^2+n''^2\sin\varphi''^2}}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi''}{2\pi\sqrt{m''^2\cos\varphi''+n''^2\sin\varphi''^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi''}{2\pi\sqrt{m'''^2\cos\varphi'''^2+n'''^2\sin\varphi'''^2}}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi'''}{2\pi\sqrt{m'''^2\cos\varphi'''+n'''^2\sin\varphi'''^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi^{IV}}{2\pi\sqrt{m^{IV2}\cos\varphi^{IV2}+n^{IV2}\sin\varphi^{IV2}}}.$$

u. s. w. u. s. w.

Da sich nun die Größen m, m′, m″, m‴, ... und n, n′, n″, n‴, ... immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Größe μ nähern; so ist offenbar

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\Theta}{2\pi\sqrt{\mu^2\cos\Theta^2+\mu^2\sin\Theta^2}},$$

oder, wie leicht erhellet,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{2\pi\mu}\int_0^{2\pi}\partial\Theta,$$

oder, weil offenbar

$$\int_0^{2\pi}\partial\Theta = 2\pi$$

ist,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{\mu},$$

wie bewiesen werden sollte.

3. Nach (2.) ist

$$\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2} = m - (m-n)\sin\varphi\sin\varphi',$$
$$\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2} = m\cot\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi'.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\sin\varphi\sin\varphi'$ und $\cos\varphi\cos\varphi'$, und zieht sie dann von einander ab; so erhält man

$$\sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} - \cos\varphi\cos\varphi'\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}$$
$$= m\sin\varphi\sin\varphi' - (m-n)\sin\varphi^2\sin\varphi'^2 - \frac{m\cos\varphi^2\sin\varphi'}{\sin\varphi}.$$

Aber nach (2.)

$$m\sin\varphi' = \tfrac{1}{2}(m+n)\sin\varphi + \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi\sin\varphi'^2.$$

Also

$$\sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} - \cos\varphi\cos\varphi'\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(m+n)\sin\varphi^2 + \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi^2\sin\varphi'^2$$
$$- \tfrac{1}{2}(m+n)\cos\varphi^2 - \tfrac{1}{2}(m-n)\cos\varphi^2\sin\varphi'^2 - (m-n)\sin\varphi^2\sin\varphi'^2$$
$$= -\tfrac{1}{2}(m+n)(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) - \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2,$$

und folglich, weil $\frac{1}{2}(m+n) = m'$ ist,

$$\sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} + m'(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$$
$$= \cos\varphi\cos\varphi'\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2} - \tfrac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}};$$

so ergiebt sich

$$\sin\varphi\sin\varphi'\partial\varphi + \frac{m'(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$
$$= \cos\varphi\cos\varphi'\partial\varphi' - \frac{\frac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}},$$

woraus dann ferner leicht

$$\frac{m'(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$
$$= -\frac{\frac{1}{2}(m-n)\sin\varphi'^2\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}} + \partial.\cos\varphi\sin\varphi'$$

folgt.

Multipliciren wir nun diese Gleichung mit $\frac{m-n}{\pi}$ und setzen

$$m'(m-n) = \tfrac{1}{2}(m^2-n^2),$$
$$(m-n)^2 = 4(m'^2-n'^2),$$
$$\sin\varphi'^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos\varphi'^2 - \sin\varphi'^2);$$

so erhalten wir

$$\frac{\frac{1}{2}(m^2-n^2)(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$

$$=-\frac{(m'^2-n'^2)\partial\varphi'}{\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}+\frac{(m'^2-n'^2)(\cos\varphi'^2-\sin\varphi'^2)\partial\varphi'}{\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}$$

$$+\frac{m-n}{\pi}\partial.\cos\varphi\sin\varphi';$$

also, wenn man integrirt und alle Integrale zwiſchen den Gränzen $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$; $\varphi'=0$, $\varphi'=2\pi$ nimmt, nach (2.)

$$(m^2-n^2)\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$

$$=-\frac{2(m'^2-n'^2)}{\mu}+2(m'^2-n'^2)\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\varphi'^2-\sin\varphi'^2)\partial\varphi'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2}}.$$

Das Integral von $\partial.\cos\varphi\sin\varphi'$ iſt nämlich $\cos\varphi\sin\varphi'$, und verſchwindet alſo offenbar, wenn man es zwiſchen den angegebenen Gränzen nimmt, wobei man zu bemerken hat, daß, wie wir aus dem Obigen wiſſen, φ und φ' zugleich $=0$ und $=2\pi$ ſind.

Bezeichnen wir nun das Integral auf der linken Seite der vorhergehenden Gleichung durch Φ und alle ähnlichen Integrale auf ähnliche Weiſe; ſo haben wir, wenn wir der Kürze wegen auch

$$m^2-n^2=L,\ m'^2-n'^2=L',\ m''^2-n''^2=L'',\ldots\ldots$$

ſetzen, überhaupt folgende Gleichungen:

$$L\Phi=-\frac{2L'}{\mu}+2L'\Phi',$$

$$L'\Phi'=-\frac{2L''}{\mu}+2L''\Phi'',$$

$$L''\Phi''=-\frac{2L'''}{\mu}+2L'''\Phi''',$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

$$L^{(k-1)}\Phi^{(k-1)}=-\frac{2L^{(k)}}{\mu}+2L^{(k)}\Phi^{(k)}.$$

Hieraus erhält man ſehr leicht nach und nach durch Subſtitution:

$$L\Phi=-\frac{2L'+2^2L''+2^3L'''+\ldots+2^kL^{(k)}}{\mu}+2^kL^{(k)}\Phi^{(k)}.$$

Nun iſt

$$L'=m'^2-n'^2=\tfrac{1}{4}(m+n)^2-mn=\tfrac{1}{4}(m-n)^2,$$

$$L''=m''^2-n''^2=\tfrac{1}{4}(m'+n')^2-m'n'=\tfrac{1}{4}(m'-n')^2,$$

$$L'''=m'''^2-n'''^2=\tfrac{1}{4}(m''+n'')^2-m''n''=\tfrac{1}{4}(m''-n'')^2,$$

$$L^{IV}=m^{IV2}-n^{IV2}=\tfrac{1}{4}(m'''+n''')^2-m'''n'''=\tfrac{1}{4}(m'''-n''')^2,$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Weil aber

$(m' - n')^2 = (m' - n')(m' - n')$, $m'^2 - n'^2 = (m' - n')(m' + n')$;
$(m'' - n'')^2 = (m'' - n'')(m'' - n'')$, $m''^2 - n''^2 = (m'' - n'')(m'' + n'')$;
$(m''' - n''')^2 = (m''' - n''')(m''' - n''')$, $m'''^2 - n'''^2 = (m''' - n''')(m''' + n''')$;
u. s. w. u. s. w.

ist; so ist offenbar

$$(m' - n')^2 \overset{=}{<} L'$$
$$(m'' - n'')^2 \overset{=}{<} L'',$$
$$(m''' - n''')^2 \overset{=}{<} L''',$$
u. s. w.

Also ist

$$L' = \tfrac{1}{4}(m-n)^2, \quad L'' \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}L', \quad L''' \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}L'', \quad L^{IV} \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}L''', \ldots.$$

und folglich

$$L' = \frac{1}{4}(m-n)^2,$$
$$L'' \overset{=}{<} \frac{1}{4^2}(m-n)^2,$$
$$L''' \overset{=}{<} \frac{1}{4^3}(m-n)^2,$$
$$L^{IV} \overset{=}{<} \frac{1}{4^4}(m-n)^2,$$
u. s. w.

also

$$2L' = \frac{1}{2}(m-n)^2,$$
$$2^2 L'' \overset{=}{<} \frac{1}{2^2}(m-n)^2,$$
$$2^3 L''' \overset{=}{<} \frac{1}{2^3}(m-n)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$2^k L^{(k)} \overset{=}{<} \frac{1}{2^k}(m-n)^2.$$

Für ein unendlich großes k ist folglich $2^k L^{(k)} = 0$, oder diese Größe nähert sich, wenn k wächst, immer mehr und mehr der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur k groß genug nimmt. Also ist nach dem Obigen offenbar

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} = -\frac{2L' + 2^2L'' + 2^3L''' + 2^4L^{IV} + \ldots + 2^kL^{(k)}}{\mu L},$$

desto genauer, je größer k ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur k groß genug nimmt. Setzen wir

$$\frac{2L' + 2^2 L'' + 2^3 L''' + 2^4 L^{IV} + \ldots + 2^k L^{(k)}}{L} = K;$$

so ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} = -\frac{K}{\mu}.$$

Die Größe K wird am leichtesten gefunden, wenn man sich bei der numerischen Berechnung ihrer einzelnen Theile der Logarithmen und der nachfolgend entwickelten Formeln bedient. Man setze nämlich

$$\lambda = \tfrac{1}{4}\gamma L,\ \lambda' = \tfrac{1}{4}\gamma L',\ \lambda'' = \tfrac{1}{4}\gamma L'',\ \lambda''' = \tfrac{1}{4}\gamma L''',\ \ldots\ldots$$

Bekanntlich ist nun

$$\lambda' = \tfrac{1}{4}\gamma(m'^2 - n'^2) = \tfrac{1}{4}\gamma\{\tfrac{1}{4}(m+n)^2 - mn\},$$

woraus man auf der Stelle

$$\lambda' = \tfrac{1}{8}(m-n)$$

erhält. Nun ist aber

$$\frac{\lambda^2}{m'} = \frac{\frac{1}{16}L}{m'} = \frac{\frac{1}{16}(m^2-n^2)}{\frac{1}{2}(m+n)} = \tfrac{1}{8}(m-n);$$

also ist

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{m'},$$

und man hat folglich die zur logarithmischen Berechnung der Größen λ', λ'', λ''', λ^{IV}, ... sehr bequemen Formeln:

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{m'},\ \lambda'' = \frac{\lambda'^2}{m''},\ \lambda''' = \frac{\lambda''^2}{m'''},\ \lambda^{IV} = \frac{\lambda'''^2}{m^{IV}},\ \ldots\ldots$$

Hat man aber diese Größen, so findet man K aus der Formel

$$K = \frac{2\lambda'^2 + 2^2\lambda''^2 + 2^3\lambda'''^2 + \ldots + 2^k\lambda^{(k)2}}{\lambda^2}.$$

4. Setzen wir jetzt

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi^2\,\partial\varphi}{2\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}},\quad Q = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2\,\partial\varphi}{2\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

so ist, wie sogleich in die Augen fällt

$$m^2 P + n^2 Q = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}},$$

und folglich nach (2.)

$$\text{I.}\quad m^2 P + n^2 Q = \frac{1}{\mu}.$$

Ferner ist

$$\frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\partial\varphi}{2\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} + \frac{(m^2\cos\varphi^2 - n^2\sin\varphi^2)\partial\varphi}{2\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(m^2\cos\varphi^4 - n^2\sin\varphi^4)\partial\varphi}{\pi\{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}} = \partial\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\pi\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}.$$

Integrirt man nun diese Gleichung zwischen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$; so erhält man nach (3.) in der eingeführten Bezeichnung auf der Stelle

$$\text{II.} \quad -\frac{K}{\mu} + m^2 P - n^2 Q = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen **I.** und **II.** ergiebt sich aber sehr leicht

$$P = \frac{1+K}{2m^2\mu}, \quad Q = \frac{1-K}{2n^2\mu},$$

wodurch also die beiden bestimmten Integrale **P** und **Q** gefunden sind.

5. Bisher haben wir nur die zwischen den Gränzen 0 und 2π genommenen Integrale bestimmt; man kann aber mittelst des Vorhergehenden auch leicht überhaupt die zwischen den Gränzen 0 und φ genommenen Integrale finden, wie nun noch gezeigt werden soll. Zu dem Ende bestimme man nämlich eben so, wie vorher der Winkel φ' aus den Größen m, n, φ bestimmt worden ist, die Winkel φ'', φ''', φ^{IV}, ... respective aus den Größen m', n', φ'; m'', n'', φ''; m''', n''', φ'''; u. s. w., so daß man also folgende Gleichungen hat:

$$(m + n)\sin\varphi + (m - n)\sin\varphi\sin\varphi'^2 = 2m\sin\varphi',$$
$$(m' + n')\sin\varphi' + (m' - n')\sin\varphi'\sin\varphi''^2 = 2m'\sin\varphi'',$$
$$(m'' + n'')\sin\varphi'' + (m'' - n'')\sin\varphi''\sin\varphi'''^2 = 2m''\sin\varphi''',$$
$$(m''' + n''')\sin\varphi''' + (m''' - n''')\sin\varphi'''\sin\varphi^{IV2} = 2m'''\sin\varphi^{IV},$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

Weil nun die Größen m, m', m'', m''', ... und n, n', n'', n''', ... sich der gemeinschaftlichen Gränze μ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, und z. B. die erste der vorhergehenden Gleichungen für $m = n$ in die Gleichung $\sin\varphi = \sin\varphi'$ übergeht; so ist klar, daß auch die Winkel φ, φ', φ'', φ''', ... sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten Gränze nähern werden, die wir in der Folge durch Θ bezeichnen wollen. Da nun nach (2.)

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}},$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{m'^2\cos\varphi'^2 + n'^2\sin\varphi'^2}} = \frac{\partial\varphi''}{\sqrt{m''^2\cos\varphi''^2 + n''^2\sin\varphi''^2}},$$

$$\frac{\partial\varphi''}{\Gamma m''^2\cos\varphi''^2+n''^2\sin\varphi''^2} = \frac{\partial\varphi'''}{\Gamma m'''^2\cos\varphi'''^2+n'''^2\sin\varphi'''^2},$$

u. s. w. u. s. w.

ist; so ist offenbar auch

$$\frac{\partial\varphi}{\Gamma m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} = \frac{\partial\Theta}{\Gamma\mu^2\cos\Theta^2+\mu^2\sin\Theta^2},$$

d. i.

$$\frac{\partial\varphi}{\Gamma m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} = \frac{\partial\Theta}{\mu}.$$

Für $\varphi = 0$ ist offenbar auch $\Theta = 0$. Also ist

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Gamma m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} = \int_0^{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\mu},$$

woraus sich augenblicklich

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Gamma m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} = \frac{\Theta}{\mu}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir jetzt ferner die Größen

$$\frac{\cos\varphi^2-\sin\varphi^2}{\Gamma m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2},\quad m-n$$

respective durch $\frac{1}{\Omega}$, Δ, und alle ähnlichen Größen auf ähnliche Weise; so haben wir nach (3.) die Gleichung

$$L\frac{\partial\varphi}{\Omega} = -2L'\frac{\partial\varphi'}{\Gamma m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2} + 2L'\frac{\partial\varphi'}{\Omega'} + 2\Delta\partial.\cos\varphi\sin\varphi',$$

und folglich, wenn wir zwischen den gehörigen Gränzen integriren,

$$L\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Omega}$$

$$= -2L'\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi'}{\Gamma m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2} + 2L'\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi}{\Omega'} + 2\Delta\cos\varphi\sin\varphi',$$

oder, weil nach dem Vorhergehenden überhaupt

$$\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi'}{\Gamma m'^2\cos\varphi'^2+n'^2\sin\varphi'^2} = \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Gamma m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2} = \frac{\Theta}{\mu}$$

ist,

$$L\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Omega} = -\frac{2L'\Theta}{\mu} + 2L'\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi'}{\Omega'} + 2\Delta\cos\varphi\sin\varphi'.$$

Bezeichnen wir also der Kürze wegen das Integral

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\Omega}$$

durch Ψ und alle ähnlichen Größen durch ähnliche Zeichen; so haben wir jetzt die folgende Reihe von Gleichungen:

$$L\Psi = -\frac{2L'\Theta}{\mu} + 2L'\Psi' + 2\Delta\cos\varphi\sin\varphi',$$

$$L'\Psi' = -\frac{2L''\Theta}{\mu} + 2L''\Psi'' + 2\Delta'\cos\varphi'\sin\varphi'',$$

$$L''\Psi'' = -\frac{2L'''\Theta}{\mu} + 2L'''\Psi''' + 2\Delta''\cos\varphi''\sin\varphi''',$$

. . . . . .

$$L^{(k-1)}\Psi^{(k-1)} = -\frac{2L^{(k)}\Theta}{\mu} + 2L^{(k)}\Psi^{(k)} + 2\Delta^{(k-1)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)},$$

aus denen sich ganz auf ähnliche Art wie in (3.)

$$\Psi = -\frac{\{2L' + 2^2L'' + 2^3L''' + \ldots + 2^kL^{(k)}\}\Theta}{L\mu}$$

$$+\frac{2\Delta\cos\varphi\sin\varphi' + 2^2\Delta'\cos\varphi'\sin\varphi'' + \ldots + 2^k\Delta^{(k-1)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)}}{L},$$

oder

$$\int_0^\varphi \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}$$

$$= -\frac{K\Theta}{\mu} + \frac{2\Delta\cos\varphi\sin\varphi' + 2^2\Delta'\cos\varphi'\sin\varphi'' + \ldots + 2^k\Delta^{(k-1)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)}}{L}$$

ergiebt. Nach (3.) ist

$$\Delta = m - n = 8\lambda',$$

$$\Delta' = m' - n' = 8\lambda'',$$

$$\Delta'' = m'' - n'' = 8\lambda''',$$

u. s. w.

und L ist $= 16\lambda^2$. Führt man also die Größen λ, λ', λ'', λ''' .... ein; so erhält man

$$\int_0^\varphi \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}} =$$

$$-\frac{K\Theta}{\mu} + \frac{\lambda'\cos\varphi\sin\varphi' + 2\lambda''\cos\varphi'\sin\varphi'' + \ldots + 2^{k-1}\lambda^{(k)}\cos\varphi^{(k-1)}\sin\varphi^{(k)}}{\lambda^2},$$

immer mit desto größerer Genauigkeit, je größer k ist, aber auch zugleich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur k groß genug nimmt.

Zur Berechnung der Winkel φ', φ'', φ''', ... wird man sich vielleicht am besten folgender Methode bedienen. Nach (2.) ist

$$\sin\varphi' = \frac{m - \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}{(m-n)\sin\varphi},$$

und folglich, wenn man den Hülfswinkel ψ aus der Formel

$$\text{tang}\,\psi = \frac{n}{m}\,\text{tang}\,\varphi$$

berechnet:

$$\sin\varphi' = \frac{m(1-\cos\varphi\sec\psi)}{(m-n)\sin\varphi},$$

d. i.

$$\sin\varphi' = \frac{m(\cos\psi-\cos\varphi)}{(m-n)\sin\varphi\cos\psi},$$

oder nach bekannten trigonometrischen Formeln

$$\sin\varphi' = \frac{2m\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}{(m-n)\sin\varphi\cos\psi}.$$

Hat man auf diese Art φ' gefunden, so berechnet man den Hülfswinkel ψ' aus der Formel

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{n'}{m'}\operatorname{tang}\varphi',$$

und findet dann φ'' mittelst der Formel

$$\sin\varphi'' = \frac{2m'\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\psi')\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\psi')}{(m'-n')\sin\varphi'\cos\psi'}.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen und sich der oben durch Θ bezeichneten Gränze immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern kann, ist klar.

Wir wollen uns nun mit fernern den vorhergehenden ähnlichen Untersuchungen über die in (4.) betrachteten bestimmten Integrale der Beschränktheit des Raumes wegen nicht weiter beschäftigen, sondern bloß noch in der Kürze die Anwendung des Vorhergehenden auf die Rectification der Ellipse zeigen.

6. Die Gleichung der Ellipse aus dem Mittelpunkte ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Setzen wir nun

$$\frac{x}{a} = \sin\varphi;$$

so ist offenbar

$$\frac{y}{b} = \cos\varphi$$

und wir haben folglich

$$x = a\sin\varphi,\ y = b\cos\varphi;$$
$$\partial x = a\cos\varphi\,\partial\varphi,\ \partial y = -b\sin\varphi\,\partial\varphi.$$

Also ist, wenn wir den den Coordinaten x, y entsprechenden, vom Scheitel der kleinen Axe an gerechneten Bogen der Ellipse durch s bezeichnen,

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial\varphi\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2};$$

$$s = \int_0^{\varphi} \partial\varphi \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2};$$

oder

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{(a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{a^2 - (a^2 - b^2)\sin\varphi^2}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}} \partial\varphi,$$

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{(a^2 - b^2)\cos\varphi^2 + b^2}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}} \partial\varphi;$$

also

$$2s = \int_0^{\varphi} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}} \partial\varphi + \int_0^{\varphi} \frac{(a^2 - b^2)(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}} \partial\varphi,$$

oder

$$s = \frac{a^2+b^2}{2} \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}} + \frac{a^2-b^2}{2} \int_0^{\varphi} \frac{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)\,\partial\varphi}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}}.$$

Da man nun nach dem Vorhergehenden die beiden Integrale auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens immer mit jedem beliebigem Grade der Annäherung berechnen kann; so ist durch das Vorhergehende zugleich die sogenannte bestimmte und unbestimmte Rectification der Ellipse gefunden. Für den elliptischen Quadranten muß man natürlich $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzen.

7. In diesen Artikel gehörende Beispiele der annähernden Berechnung von Integralen bietet vorzüglich auch der Artikel Elliptische Functionen. XIV. XV. XVI. i. d. Z. dar. Auf den Artikel Quadratur im vierten Theile ist schon oben verwiesen worden, wo man die vorzüglichsten allgemeinen Methoden zur annähernden Berechnung der Integrale zusammengestellt findet. Außerdem verweisen wir noch auf eine die berühmte Gaußische allgemeine Annäherungsmethode betreffende Abhandlung von C. G. J. Jacobi in Crelles Journ. B. I. S. 301., und auf eine sich allgemein über diesen Gegenstand verbreitende Abhandlung von Dirksen in den Schriften der Berliner Academie der Wissenschaften, die auch (Berlin. 1832.) besonders gedruckt erschienen ist. Auch v. Ettingshausen hat in der Wiener Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. VII. S. 429. eine Abhandlung über die Gaußische Näherungsmethode geliefert. Endlich sehe man auch noch außer den im Artikel Quadratur angeführten Schriften Legendre's Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes. T. II. Paris. 1826. p. 572. und Crelles Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen. Bd. I. Berlin. 1821., wo man S. 218 — 277. dreizehn verschiedene Näherungsmethoden zusammengestellt findet. Ueber die annähernde Berech-

nung der Werthe doppelter Integrale s. m. einen Aufsatz von Minding in Crelles Journal B. VI. S. 91.

Integration der Differentialgleichungen.

Wir werden uns in diesem Artikel, durch welchen der Artikel Integralgleichung im zweiten Theile dieses Wörterbuchs einigermaßen ergänzt werden soll, bloß mit der Integration einiger besonders wichtigen Differentialgleichungen beschäftigen.

I. Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny = 0,$$

wo A, B, C, ... L, N constante Größen bezeichnen.

1. Für $y = ce^{\lambda x}$ hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = c\lambda e^{\lambda x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\lambda^2 e^{\lambda x},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = c\lambda^3 e^{\lambda x},\ \ldots\ \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = c\lambda^n e^{\lambda x},$$

und folglich

$$ce^{\lambda x}(A\lambda^n + B\lambda^{n-1} + C\lambda^{n-2} + \ldots + L\lambda + N) = 0,$$

oder

$$1.\quad A\lambda^n + B\lambda^{n-1} + C\lambda^{n-2} + \ldots + L\lambda + N = 0,$$

so daß also, wenn λ_1 eine Wurzel dieser Gleichung, c_1 eine ganz willkührliche Constante bezeichnet, $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 x}$ jederzeit ein Integral unserer Differentialgleichung ist, aber bloß ein partikuläres Integral, weil dasselbe bloß eine willkührliche Constante enthält, da im Gegentheil das vollständige Integral unserer Differentialgleichung n willkührliche Constanten enthalten müßte. Bezeichnen jetzt aber $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ die n Wurzeln der Gleichung (1.); so sind

$$2.\ y_1 = c_1 e^{\lambda_1 x},\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 x},\ y_3 = c_3 e^{\lambda_3 x},\ \ldots\ y_n = c_n e^{\lambda_n x},$$

wo $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$ sämmtlich ganz willkührliche Constanten bezeichnen, n partikuläre Integrale unserer Differentialgleichung, und man kann nun beweisen, daß auch jederzeit

$$3.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x},$$

oder

$$4.\quad y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n$$

ein Integral derselben ist, woraus dann von selbst folgt, daß dieses Integral, weil dasselbe n willkührliche Constanten enthält, im Allgemeinen jederzeit das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung ist. Der Beweis aber, daß

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n$$

ein Integral dieser Differentialgleichung ist, kann sehr leicht auf folgende Art geführt werden. Es ist nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + \ldots + \frac{\partial^3 y_n}{\partial x^3},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + \frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + \frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial^n y_n}{\partial x^n}.$$

Also ist

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny$$

$$= A\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ny_1$$

$$+ A\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ny_2$$

$$+ A\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ny_3$$

. . . . . .

$$+ A\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_n}{\partial x} + Ny_n.$$

Weil nun aber $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ sämmtlich partikuläre Integrale der gegebenen Differentialgleichung sind; so ist

$$A\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ny_1 = 0,$$

$$A\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ny_2 = 0,$$

$$A\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ny_3 = 0,$$

. . . . . .

$$A\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y_n}{\partial x} + Ny_n = 0,$$

und folglich, für

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n,$$

auch

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny = 0,$$

wie bewiesen werden sollte.

Diese allgemeinen Betrachtungen auf einige specielle Fälle anzuwenden, ist hier um so nöthiger, weil bei denselben noch einige wichtige Bemerkungen zu machen sind, die sich aber an

specielle Fälle besser anknüpfen lassen, als an die obigen ganz allgemeinen Betrachtungen.

2. Die gegebene Gleichung sey zuerst

$$5.\quad A\frac{\partial y}{\partial x} + By = 0\,.$$

Ist nun λ_1 die Wurzel der Gleichung

$$6.\quad A\lambda + B = 0\,;$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$7.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x}\,,$$

oder, weil $\lambda_1 = -\frac{B}{A}$ ist,

$$8.\quad y = c_1 e^{-\frac{B}{A}x}$$

das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Ist ferner

$$9.\quad A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = 0$$

die gegebene Gleichung; so ist, wenn λ_1, λ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$10.\quad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

sind, im Allgemeinen

$$11.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

das gesuchte vollständige Integral, wo nun aber die folgenden Fälle besonders zu betrachten sind.

Die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung (10.) können nämlich entweder beide reell und ungleich, oder beide reell und einander gleich, oder auch beide imaginär seyn.

I. Im ersten Falle, wenn λ_1, λ_2 beide reell und ungleich sind, ist in der That

$$11^*.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung, und dieses Integral auch, weil es reell ist, keiner weitern Umformung fähig.

II. Wenn aber λ_1, λ_2 beide reell und einander gleich sind; so ist

$$y = (c_1 + c_2) e^{\lambda_1 x}\,,$$

und enthält also in der That nur die eine willkührliche Constante $c_1 + c_2$, kann folglich auch nicht das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung seyn. In diesem Falle betrachte man zuerst λ_1 und λ_2 nicht als einander gleich, sondern lasse

dieselben, indem man $\lambda_2 = \lambda_1 + \Theta$ setzt, um die unendlich kleine Größe Θ unterschieden seyn; so ist

$$y = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 e^{\Theta x})$$
$$= e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_2\left(1 + \frac{\Theta x}{1} + \frac{\Theta^2 x^2}{1.2} + \frac{\Theta^3 x^3}{1.2.3} + \cdots\right)\right\},$$

oder, wenn man

$$c_1 + c_2 = C_1, \quad c_2 \Theta = C_2$$

setzt,

$$y = e^{\lambda_1 x}\left\{C_1 + C_2 x\left(1 + \frac{\Theta x}{2} + \frac{\Theta^2 x^2}{2.3} + \cdots\right)\right\},$$

und folglich, wenn man nun $\Theta = 0$ setzt,

$$12. \quad y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung. Uebrigens kann man sich nun auch leicht a posteriori von der Richtigkeit dieses Resultats überzeugen. Es ist nämlich, wie man leicht findet,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (C_1 + C_2 x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (C_1 + C_2 x)\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2 C_2 \lambda_1 e^{\lambda_1 x}.$$

Also ist

$$e^{-\lambda_1 x}\left(A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy\right)$$
$$= A\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1^2 + 2 C_2 \lambda_1\} + B\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1 + C_2\}$$
$$+ C(C_1 + C_2 x).$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

erhält man aber

$$\lambda = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

und folglich

$$\lambda_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$
$$\lambda_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Weil aber $\lambda_1 = \lambda_2$ ist; so ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{B}{2A}$$

und

$$B^2 - 4AC = 0, \quad C = \frac{B^2}{4A}.$$

Führt man nun diese Werthe von λ_1 und C in die obige Gleichung ein; so findet man, daß

$$A\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1^2 + 2C_2\lambda_1\} + B\{(C_1 + C_2 x)\lambda_1 + C_2\} + C(C_1 + C_2 x) = 0,$$

und folglich auch

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = 0,$$

also

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x),$$

wo C_1, C_2 zwei ganz willkührliche Constanten sind, das richtige vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung ist.

III. Wenn λ_1 und λ_2 beide imaginär sind; so ist bekanntlich

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

wo nach dem Vorhergehenden

$$\alpha = -\frac{B}{2A},\ \beta = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

ist. Also ist

$$c_1 e^{\lambda_1 x} = c_1 e^{\alpha x}.e^{\beta x\sqrt{-1}} = c_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

$$c_2 e^{\lambda_2 x} = c_2 e^{\alpha x}.e^{-\beta x\sqrt{-1}} = c_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1});$$

folglich

$$y = e^{\alpha x}\{(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 - c_2)\sin\beta x.\sqrt{-1}\},$$

oder, wenn man

$$c_1 + c_2 = E_1,\ (c_1 - c_2)\sqrt{-1} = E_2$$

setzt,

$$13.\quad y = e^{\alpha x}(E_1\cos\beta x + E_2\sin\beta x).$$

Ferner sey

$$14.\quad A\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + B\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C\frac{\partial y}{\partial x} + Dy = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, und λ_1, λ_2, λ_3 seyen die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0;$$

so ist im Allgemeinen

$$15.\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

das vollständige Integral der Gleichung (14.), wo nun aber wieder die folgenden Fälle besonders zu betrachten sind.

I. Wenn die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 alle drei reell und sämmtlich unter einander ungleich sind; so ist

$$15^*. \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

das vollständige Integral unserer Differentialgleichung.

II. Wenn die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 alle drei reell, aber zwei derselben, z. B. λ_1 und λ_2, einander gleich sind; so ist

$$y = (c_1 + c_2) e^{\lambda_1 x} + c_3 e^{\lambda_3 x},$$

und dieses Integral enthält also bloß zwei willkührliche Constanstanten $c_1 + c_2$ und c_3, und kann also nicht das vollständige Integral unserer Differentialgleichung seyn. In diesem Falle setze man zuerst $\lambda_2 = \lambda_1 + \Theta$, wo Θ eine unendlich kleine Größe bezeichnet; so ist

$$y = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 e^{\Theta x}) + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_2\left(1 + \frac{\Theta x}{1} + \frac{\Theta^2 x^2}{1.2} + \frac{\Theta^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\right)\right\} + c_3 e^{\lambda_3 x},$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{C_1 + C_2 x\left(1 + \frac{\Theta x}{2} + \frac{\Theta^2 x^2}{2.3} + \ldots\right)\right\} + C_3 e^{\lambda_3 x},$$

wenn man

$$c_1 + c_2 = C_1, \quad c_2 \Theta = C_2, \quad c_3 = C_3$$

setzt. Setzt man nun $\Theta = 0$, so ergiebt sich

$$16. \quad y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{\lambda_3 x}$$

als vollständiges Integral unserer Differentialgleichung, von dessen Richtigkeit man sich auch leicht wieder a posteriori überzeugen kann.

III. Wenn die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 alle drei reell und sämmtlich unter einander gleich sind; so hat man zuerst $\lambda_3 = \lambda_1 + \Theta = \lambda_2 + \Theta$, wo Θ wieder eine unendlich kleine Größe bezeichnet. Dann ist nach (16.)

$$y = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x + c_3 e^{\Theta x}),$$

wenn man jetzt wieder c_1, c_2, c_3 für C_1, C_2, C_3 setzt, d. i.

$$y = e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_2 x + c_3\left(1 + \frac{\Theta x}{1} + \frac{\Theta^2 x^2}{1.2} + \ldots.\right)\right\}$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{c_1 + c_3 + (c_2 + c_3\Theta)x + \tfrac{1}{2} c_3 \Theta^2 x^2\left(1 + \frac{\Theta x}{3} + \ldots.\right)\right\}$$

$$= e^{\lambda_1 x}\left\{C_1 + C_2 x + C_3 x^2\left(1 + \frac{\Theta x}{3} + \frac{\Theta^2 x^2}{3.4} + \ldots.\right)\right\},$$

wenn wir

$$c_1 + c_3 = C_1, \; c_2 + c_3\Theta = C_2, \; \tfrac{1}{2} c_3 \Theta^2 = C_3$$

setzen, und folglich, wenn wir nun $\Theta = 0$ setzen,

$$17. \quad y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$$

das vollständige Integral unserer Differentialgleichung, von dessen Richtigkeit man sich auch leicht a posteriori überzeugen kann.

IV. Sind endlich die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0$$

imaginär, die dritte λ_3 aber reell; so ist bekanntlich

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

und folglich auf ganz ähnliche Art wie oben

$$18.\quad y = e^{\alpha x}(E_1 \cos\beta x + E_2 \sin\beta x) + E_3 e^{\lambda_3 x}$$

das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Aus dem Vorhergehenden erhellet nun schon deutlich genug, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann.

II. Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny = X,$$

wo A, B, C, ... L, N constante Größen bezeichnen, X eine beliebige Function von x ist.

2. Bevor wir zur Integration dieser Gleichung übergehen, wollen wir zuerst in der Kürze das Integral der Gleichung

$$19.\quad \frac{\partial y}{\partial x} + Py = Q,$$

wo P und Q Functionen von x sind, entwickeln, obgleich von dieser Gleichung auch schon Thl. II. S. 891. die Rede gewesen ist. Man setze $y = uz$, wo u und z Functionen von x sind, von denen man die eine sich offenbar immer willkührlich angenommen denken kann; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial x},$$

und folglich

$$20.\quad u\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + Pu\right)z = Q.$$

Denkt man sich nun u so bestimmt, daß

$$21.\quad \frac{\partial u}{\partial x} + Pu = 0$$

ist, so ist

$$22.\quad u\frac{\partial z}{\partial x} = Q.$$

Aus der Gleichung (21.) folgt

$$23.\quad \frac{\partial u}{u} = -P\partial x;$$

also, wenn man integrirt,

$$24.\quad \ln u = -\int P\partial x + C$$

oder

$$25.\quad u = e^{-\int P\partial x + C} = e^{C}.e^{-\int P\partial x} = ae^{-\int P\partial x}.$$

Führt man dies in die Gleichung (22.) ein, so erhält man

$$26.\quad a\partial z = Qe^{\int P\partial x}\partial x,$$

und folglich

$$27.\quad az = \int Qe^{\int P\partial x}\partial x + C.$$

Aber

$$z = \frac{y}{u} = \frac{1}{a}ye^{\int P\partial x}.$$

Also ist

$$28.\quad y = e^{-\int P\partial x}.\left\{\int Qe^{\int P\partial x}\partial x + C\right\},$$

wodurch folglich das Integral unserer Differentialgleichung gefunden ist.

3. Sey nun

$$29.\quad A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = X$$

die gegebene Differentialgleichung. Um diese Differentialgleichung zu integriren, setze man $y = Yz$; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x}z,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}z,$$

und folglich

$$30.\quad \left(A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz\right)Y + 2A\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(A\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + B\frac{\partial Y}{\partial x}\right)z = X.$$

Bestimmt man nun z so, daß

$$31.\quad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz = 0$$

ist, welches nach I. immer möglich ist; so ist

$$32.\quad 2A\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(A\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + B\frac{\partial Y}{\partial x}\right)z = X,$$

oder, wenn wir

$$33.\quad \frac{\partial Y}{\partial x} = Y',$$

setzen,

$$34.\quad Az\frac{\partial Y'}{\partial x}+\left(Bz+2A\frac{\partial z}{\partial x}\right)Y'=X\,,$$

oder

$$35.\quad \frac{\partial Y'}{\partial x}+\left(\frac{B}{A}+\frac{2\partial z}{z\partial x}\right)Y'=\frac{X}{Az}\,,$$

oder, wenn wir

$$36.\quad \frac{B}{A}+\frac{2\partial z}{z\partial x}=P,\quad \frac{X}{Az}=Q$$

setzen, wo P und Q bekannte Functionen von x sind,

$$37.\quad \frac{\partial Y'}{\partial x}+PY'=Q.$$

Aus dieser Gleichung findet man Y' nach (28.), und hat dann

$$38.\quad Y=\int Y'\partial x+c,\ y=z(\int Y'\partial x+c)\,,$$

wodurch also y, da z bekannt ist, gefunden ist.

Um nun völlig entwickelte Formeln zu erhalten, wollen wir wieder die folgenden Fälle unterscheiden.

I. Wenn die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0$$

beide reell und ungleich sind; so kann man, wie aus dem Obigen hervorgeht,

$$z=e^{\lambda_1 x},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\lambda_1 e^{\lambda_1 x}$$

setzen. Nach der Theorie der quadratischen Gleichungen ist

$$\frac{B}{A}=-\lambda_1-\lambda_2\,.$$

Also ist nach (36.)

$$P=-\lambda_1-\lambda_2+\frac{2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1 x}}=\lambda_1-\lambda_2\,,$$

und

$$Q=\frac{X}{Ae^{\lambda_1 x}}\,.$$

Ferner ist

$$\int P\partial x=\int(\lambda_1-\lambda_2)\partial x=(\lambda_1-\lambda_2)x\,.$$

Deshalb ist nach (28.)

$$\begin{aligned}Y'&=e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.\left\{\int\frac{Xe^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{Ae^{\lambda_1 x}}\partial x+c_1\right\}\\&=e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.\left\{\frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x+c_1\right\}\\&=\frac{1}{A}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x+c_1e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int Y'\partial x = \frac{1}{A}\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x \int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x + c_1\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$= \frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x \cdot \int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$- \frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x \int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$+ c_1\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\partial x$$

$$= -\frac{1}{A(\lambda_1-\lambda_2)}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x$$

$$+ \frac{1}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - \frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}$$

$$= \frac{\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x}{A(\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{c_1 e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und daher nach (38.)

39. $$y = ce^{\lambda_1 x} - \frac{c_1 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{e^{\lambda_1 x}\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x - e^{\lambda_2 x}\int Xe^{-\lambda_2 x}\partial x}{A(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

II. Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

beide reell, aber einander gleich sind; so ist nach (12.)

$$z = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

das vollständige Integral, und wir können also, da C_1, C_2 ganz willkührliche Constanten sind, wieder

$$z = e^{\lambda_1 x},\ \frac{\partial z}{\partial x} = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$$

setzen. Weil in diesem Falle

$$\frac{B}{A} = -2\lambda_1$$

ist; so ist, wie man leicht findet,

$$P = 0,\ \int P\partial x = 0.$$

Also ist nach (28.)

$$Y' = \int Q\partial x + c_1,$$

d. i.

$$Y' = \frac{1}{A}\int Xe^{-\lambda_1 x}\partial x + c_1$$

und folglich

$$\int Y\,\partial x = \frac{1}{A}\int \partial x \int X e^{-\lambda_1 x}\partial x + c_1 x$$

$$= \frac{x}{A}\int X e^{-\lambda_1 x}\partial x - \frac{1}{A}\int X e^{-\lambda_1 x} x\,\partial x + c_1 x\,.$$

Also ist in diesem Falle

40. $$y = \frac{e^{\lambda_1 x}}{A}\{x\int X e^{-\lambda_1 x}\partial x - \int X e^{-\lambda_1 x} x\,\partial x\} + e^{\lambda_1 x}(c + c_1 x).$$

III. Sind endlich die Wurzeln der Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

beide imaginär, nämlich $= \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; so hat man in der Formel (39.)

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},\quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\beta\sqrt{-1}$$

zu setzen. Dadurch erhält man

$$e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}.e^{\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

$$e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}.e^{-\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

und folglich

$$y = c\,e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}) - \frac{c_1 e^{\alpha x}}{2\beta\sqrt{-1}}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1})\int X e^{-\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})\,\partial x \\ -e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1})\int X e^{-\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1})\,\partial x \end{array}\right\}}{2A\beta\sqrt{-1}},$$

woraus nach leichter Rechnung

41. $$y = e^{\alpha x}\left\{\left(c - \frac{c_1}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\cos\beta x + \left(c + \frac{c_1}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\sin\beta x.\sqrt{-1}\right\}$$

$$+\frac{e^{\alpha x}}{A\beta}\left(\sin\beta x\int X e^{-\alpha x}\cos\beta x\,\partial x - \cos\beta x\int X e^{-\alpha x}\sin\beta x\,\partial x\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$c - \frac{c_1}{2\beta\sqrt{-1}} = C,\quad c\sqrt{-1} + \frac{c_1}{2\beta} = C_1$$

setzt,

42. $$y = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + C_1\sin\beta x)$$

$$+\frac{e^{\alpha x}}{A\beta}(\sin\beta x\int X e^{-\alpha x}\cos\beta x\,\partial x - \cos\beta x\int X e^{-\alpha x}\sin\beta x\,\partial x).$$

4. Durch ein anderes Verfahren wie das vorher bei der Integration der Gleichung (29.) angewandte läßt sich nun aber ganz im Allgemeinen zeigen, daß die Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + B\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + C\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + L\frac{\partial y}{\partial x} + Ny = X$$

immer auf die Integration einer Gleichung von derselben Form, in welcher aber der höchste vorkommende Differentialquotient von y nur von der $(n-1)$sten Ordnung ist, zurückgeführt werden kann. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir dies bloß an der Gleichung

$$43.\quad A\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D\frac{\partial y}{\partial x} + Ey = X$$

zeigen. Man multiplicire diese Gleichung auf beiden Seiten mit $e^{\lambda x}\partial x$, wo λ eine ganz unbestimmte Größe bezeichnet, so erhält man

$$44.\quad Xe^{\lambda x}\partial x = e^{\lambda x}\left(A\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D\frac{\partial y}{\partial x} + Ey\right)\partial x,$$

und suche nun λ und die constanten Coefficienten A_1, B_1, C_1, D_1 so zu bestimmen, daß

$$45.\quad \int Xe^{\lambda x}\partial x = e^{\lambda x}\left(A_1\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + B_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C_1\frac{\partial y}{\partial x} + D_1 y\right)$$

ist. Differentiirt man zu dem Ende diese Gleichung; so erhält man

$$46.\quad e^{\lambda x}\partial x\left\{\begin{array}{l} A_1\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B_1\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D_1\frac{\partial y}{\partial x} \\ \qquad + \lambda A_1\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \lambda B_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda C_1\frac{\partial y}{\partial x} + \lambda D_1 y \end{array}\right\}$$
$$= e^{\lambda x}\partial x\left(A\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + B\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + D\frac{\partial y}{\partial x} + Ey\right),$$

und folglich

$$47.\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = A \\ B_1 + \lambda A_1 = B \\ C_1 + \lambda B_1 = C \\ D_1 + \lambda C_1 = D \\ \lambda D_1 = E \end{array}\right. \qquad 48.\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = A \\ B_1 = B - \lambda A_1 \\ C_1 = C - \lambda B_1 \\ D_1 = D - \lambda C_1 \\ \lambda D_1 = E \end{array}\right.$$

Hieraus sieht man, daß, wenn λ bestimmt wäre, durch die vier ersten der Gleichungen (48.) die Coefficienten A_1, B_1, C_1, D_1 vollkommen bestimmt seyn würden. Nun hat man aber noch die Gleichung $\lambda D_1 = E$, welche offenbar zur Bestimmung von λ führen wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} D_1 &= D - \lambda C_1 \\ &= D - C\lambda + \lambda^2 B_1 \\ &= D - C\lambda + B\lambda^2 - \lambda^3 A_1 \\ &= D - C\lambda + B\lambda^2 - A\lambda^3 ; \end{aligned}$$

also

$$\lambda D_1 = D\lambda - C\lambda^2 + B\lambda^3 - A\lambda^4 ,$$

oder

$$A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + \lambda D_1 = 0,$$

d. i.

$$49.\quad A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + E = 0,$$

so daß also für λ jede Wurzel dieser Gleichung gesetzt werden kann. Hat man aber auf diese Art einen Werth von λ gefunden; so sind, wie schon bemerkt worden ist, auch A_1, B_1, C_1, D_1 bekannt, und die Bestimmung von y ist folglich auf die Integration der Gleichung (45.), oder, wenn wir

$$50.\quad \frac{\int X e^{\lambda x}\partial x}{e^{\lambda x}} = X_1$$

setzen, auf die Integration der Gleichung

$$51.\quad A_1\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + B_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C_1\frac{\partial y}{\partial x} + D_1 y = X_1$$

zurückgeführt.

Bestimmen wir nun ferner λ_1 aus der Gleichung

$$52.\quad A_1\lambda_1^3 - B_1\lambda_1^2 + C_1\lambda_1 - D_1 = 0,$$

und setzen

$$53.\quad \begin{cases} A_2 = A_1 \\ B_2 = B_1 - \lambda_1 A_2 \\ C_2 = C_1 - \lambda_1 B_2 \end{cases},$$

so wie

$$54.\quad \frac{\int X_1 e^{\lambda_1 x}\partial x}{e^{\lambda_1 x}} = X_2;$$

so hat man zur Bestimmung von y die Gleichung

$$55.\quad A_2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B_2\frac{\partial y}{\partial x} + C_2 y = X_2,$$

welche rücksichtlich ihrer Form völlig mit der oben schon vollständig integrirten Gleichung (29.) übereinstimmt, und daher auch intetegrirt, y also gefunden werden kann. Man könnte aber auch λ_2 aus der Gleichung

$$56.\quad A_2\lambda_2^2 - B_2\lambda_2 + C_2 = 0$$

bestimmen, und

$$57.\quad \begin{cases} A_3 = A_2 \\ B_3 = B_2 - \lambda_2 A_3, \end{cases}$$

so wie

$$58.\quad \frac{\int X_2 e^{\lambda_2 x}\partial x}{e^{\lambda_2 x}} = X_3$$

setzen, und hätte zur Bestimmung von y die Gleichung

$$59.\quad A_3\frac{\partial y}{\partial x} + B_3 y = X_3\,,$$

welche wie die Gleichung (19.) integrirt werden kann. Indeß könnte man auch λ_3 aus der Gleichung

$$60.\quad A_3\lambda_3 - B_3 = 0$$

bestimmen, und

$$61.\quad A_4 = A_3\,,\quad 62.\quad \frac{\int X_3 e^{\lambda_3 x}\partial x}{e^{\lambda_3 x}} = X_4$$

setzen. Dann hätte man zur Bestimmung von y die Gleichung

$$63.\quad A_4 y = X_4\,,$$

woraus sich

$$64.\quad y = \frac{X_4}{A_4}$$

ergiebt.

Fernere Entwickelungen über diesen Gegenstand würden uns hier zu weit führen.

III. Ueber die Integration der Gleichungen

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy = 0\,,$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy = X\,,$$

wo P, Q, ... T, U, X Functionen von x bezeichnen.

5. Zuerst bemerken wir, daß die erste der beiden obigen Gleichungen, nämlich die Gleichung

$$65.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy = 0$$

durch die Substitution

$$y = e^{\int t\partial x}$$

immer auf eine Differentialgleichung der $(n-1)$sten Ordnung zurückgeführt werden kann, welches an ein Paar Beispielen zu zeigen hier hinreichend seyn wird. Hat man nämlich die Gleichung

$$66.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0$$

und setzt

$$y = e^{\int t\partial x}\,;$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{\int t\partial x} t = yt\,,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^{\int t\partial x}\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right) = y\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right),$$

und folglich nach gehöriger Substitution und Division durch y:

$$67.\quad \frac{\partial t}{\partial x} + t^2 + Pt + Q = 0\,,$$

welche Gleichung bloß von der ersten Ordnung ist. Hat man ferner die Gleichung

$$68.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0\,,$$

und setzt wieder

$$y = e^{\int t\partial x}\,;$$

so wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{\int t\partial x} t = yt\,,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^{\int t\partial x}\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right) = y\left(t^2 + \frac{\partial t}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = e^{\int t\partial x}\left(t^3 + 3t\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right) = y\left(t^3 + 3t\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right),$$

und folglich

$$69.\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + (3t + P)\frac{\partial t}{\partial x} + t^3 + Pt^2 + Qt + R = 0\,,$$

eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Man wird hierdurch die oben ausgesprochene allgemeine Behauptung hinreichend gerechtfertigt finden.

6. Die Gleichung

$$70.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0$$

läßt sich, wenn **P** und **Q** constante Größen sind, wie wir aus dem Obigen wissen, immer; wenn **P** und **Q**, wie wir hier voraussetzen, Functionen von x sind, dagegen nur in seltenen Fällen integriren. Um ein einfaches Beispiel zu geben, habe man die Gleichung

$$71.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{A}{a + bx}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{By}{(a + bx)^2} = 0\,.$$

Für $y = e^{\int t\partial x}$ geht diese Gleichung nach (67.) über in:

$$72.\quad \frac{\partial t}{\partial x} + t^2 + \frac{At}{a + bx} + \frac{B}{(a + bx)_2} = 0\,.$$

Setzt man nun

$$73.\quad (a + bx)t = u\,;$$

so wird die Gleichung (72.)

$$74.\quad (a+bx)\frac{\partial u}{\partial x} + u^2 + (A-b)u + B = 0\,.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn man u so bestimmt, daß

$$75.\quad u^2 + (A-b)u + B = 0$$

ist, weil dann u eine Constante, und folglich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ist. Bezeichnen wir nun die beiden Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + (A-b)u + B = 0$$

durch u' und u''; so hat man für t die beiden folgenden Ausdrücke

$$76.\quad t = \frac{u'}{a+bx}, \qquad 77.\quad t = \frac{u''}{a+bx}\,.$$

Weil nun

$$y = e^{\int t\,\partial x}$$

ist; so ist

$$78.\quad y = e^{\int \frac{u'\partial x}{a+bx}} = (a+bx)^{\frac{u'}{b}}$$

oder

$$79.\quad y = e^{\int \frac{u''\partial x}{a+bx}} = (a+bx)^{\frac{u''}{b}}\,,$$

und folglich, wie unmittelbar aus dem Satze hervorgeht, den wir sogleich in der folgenden Nummer beweisen werden,

$$80.\quad y = C(a+bx)^{\frac{u'}{b}} + C'(a+bx)^{\frac{u''}{b}}\,,$$

wo C und C′ zwei willkührliche Constanten sind, das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung (71.).

7. Der Satz, auf welchen wir uns so eben bezogen haben, ist folgender.

Wenn $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$ n partikuläre Integrale der Differentialgleichung (65.) sind; so ist jederzeit

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 + \ldots + C_ny_n\,,$$

wo $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots C_n$ n willkührliche Constanten bezeichnen, das vollständige Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung.

Es ist nämlich

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \ldots + c_ny_n\,,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} + C_3 \frac{\partial y_3}{\partial x} + \ldots + C_n \frac{\partial y_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + C_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \ldots + C_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = C_1 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + C_2 \frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + C_3 \frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + \ldots + C_n \frac{\partial^n y_n}{\partial x^n},$$

und folglich

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy$$

$$= C_1\left\{\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_1\right\}$$

$$+ C_2\left\{\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_2\right\}$$

$$+ C_3\left\{\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_3\right\}$$

. . . . . .

$$+ C_n\left\{\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_n\right\}.$$

Weil aber nach der Voraussetzung $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ partikuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy = 0$$

sind; so ist

$$\frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^n y_3}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_3}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_3}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_3 = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} + \ldots + Uy_n = 0,$$

und folglich, für den Werth

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n$$

von y, auch

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy = 0,$$

so daß also auch

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n$$

ein Integral der Gleichung (65.), und weil dieses Integral n willkührliche Constanten enthält, im Allgemeinen offenbar das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist.

8. Merkwürdig ist es, daß das vollständige Integral der Gleichung

$$81.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + Q\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + Uy = X$$

jederzeit gefunden werden kann, wenn man n partikuläre Integrale der Gleichung (65.) kennt. Um dies zu zeigen, wollen wir der Kürze wegen bloß die Gleichung

$$82.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = X$$

betrachten, und wollen annehmen, daß y_1, y_2, y_3 drei partikuläre Integrale der Gleichung

$$83.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

sind. Man setze nun

$$84.\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3\,;$$

wo jetzt aber C_1, C_2, C_3 keine constanten Größen, sondern Functionen von x bezeichnen sollen, und suche diese Functionen so zu bestimmen, daß durch den obigen Ausdruck von y der Gleichung (82.) genügt wird. Zu dem Ende differentiire man die Gleichung (84.); so ergiebt sich

$$85.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial y_2}{\partial x} + C_3\frac{\partial y_3}{\partial x} + y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} + y_3\frac{\partial C_3}{\partial x}\,.$$

Denkt man sich aber die Functionen C_1, C_2, C_3 so bestimmt, daß

$$86.\quad y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} + y_3\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0$$

ist; so ist

$$87.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial y_2}{\partial x} + C_3\frac{\partial y_3}{\partial x}\,.$$

Differentiirt man diese Gleichung von Neuem; so erhält man

$$88.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} =$$

$$C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + C_3\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x}\frac{\partial C_3}{\partial x}\,,$$

wo man sich nun aber die drei Functionen C_1, C_2, C_3 wieder so bestimmt denken kann, daß, außer der Gleichung (86.), auch zugleich noch der Gleichung

$$89.\quad \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x}\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0$$

genügt wird. Dann erhält man für den zweiten Differentialquotienten von y den folgenden einfachern Ausdruck:

$$90.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + C_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2},$$

und erhält aus dieser Gleichung endlich

$$91.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} =$$

$$C_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + C_3 \frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} \frac{\partial C_3}{\partial x}.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

in die Gleichung (82.) ein; so ergiebt sich:

$$92.\quad \left.\begin{aligned} &C_1\left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1\right) \\ &+ C_2\left(\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ry_2\right) \\ &+ C_3\left(\frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ry_3\right) \\ &+ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}\frac{\partial C_3}{\partial x} \end{aligned}\right\} = X.$$

Weil aber nach der Voraussetzung y_1, y_2, y_3 partikuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

sind; so ist

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ry_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_3}{\partial x} + Ry_3 = 0,$$

und folglich

$$93.\quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}\frac{\partial C_3}{\partial x} = X;$$

so daß also, wenn durch

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

der Gleichung (82.) genügt werden soll, die Größen C_1, C_2, C_3 so bestimmt werden müssen, daß sie den drei Gleichungen

$$94.\quad \left\{\begin{aligned} &y_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\frac{\partial C_2}{\partial x} + y_3\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_3}{\partial x}\frac{\partial C_3}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}\frac{\partial C_3}{\partial x} = X \end{aligned}\right.$$

oder

$$95. \quad \begin{cases} y_1 \partial C_1 + y_2 \partial C_2 + y_3 \partial C_3 = 0, \\ \partial y_1 \partial C_1 + \partial y_2 \partial C_2 + \partial y_3 \partial C_3 = 0, \\ \partial^2 y_1 \partial C_1 + \partial^2 y_2 \partial C_2 + \partial^2 y_3 \partial C_3 = X \partial x^2 \end{cases}$$

genügen, welches offenbar immer möglich seyn wird, indem man nämlich, wenn man

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x}$$

aus den Gleichungen (94.) durch gewöhnliche algebraische Elimination entwickelt, für diese Differentialquotienten Ausdrücke von der Form

$$96. \quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = V_1, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = V_2, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = V_3,$$

wo V_1, V_2, V_3 gegebene Functionen von x sind, oder

$$97. \quad \partial C_1 = V_1 \partial x, \quad \partial C_2 = V_2 \partial x, \quad \partial C_3 = V_3 \partial x$$

erhält. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber auf der Stelle

$$98. \quad C_1 = \int V_1 \partial x + c_1, \quad C_2 = \int V_2 \partial x + c_2, \quad C_3 = \int V_3 \partial x + c_3,$$

und nach dem Obigen ist also die drei, willkührliche Constanten c_1, c_2, c_3 enthaltende Größe

$$99. \quad y = y_1 \left(\int V_1 \partial x + c_1 \right) + y_2 \left(\int V_2 \partial x + c_2 \right) + y_3 \left(\int V_3 \partial x + c_3 \right)$$

das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q \frac{\partial y}{\partial x} + Ry = X.$$

Es kann auch der Fall vorkommen, daß man bloß zwei partikuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q \frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

kennt. In diesem Falle setze man, wenn y_1 und y_2 die beiden in Rede stehenden partikulären Integrale sind,

$$100. \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

wo C_1 und C_2 wieder Functionen von x bezeichnen. Durch Differentiation der Gleichung (100.) ergiebt sich

$$101. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} + y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x},$$

und folglich, wenn man sich C_1 und C_2 so bestimmt denkt, daß der Gleichung

$$102. \quad y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0$$

genügt wird,

$$103. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2 \frac{\partial y_2}{\partial x}.$$

Differentiirt man diese Gleichung zwei Mal nach einander; so kommt

$$104.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x},$$

$$105.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2};$$

also, wenn man die gefundenen Ausdrücke von

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

in die Gleichung (82.) einführt,

$$106.\quad \left.\begin{aligned} &C_1\left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1\right) \\ &+ C_2\left(\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_2}{\partial x} + Ry_2\right) \\ &+ \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} \\ &+ P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + P\frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} \end{aligned}\right\} = X.$$

Weil nun aber y_1 und y_2 Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

sind; so ist

$$107.\quad \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + P\frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} = X,$$

und man hat also zur Bestimmung von C_1 und C_2 die beiden Gleichungen:

$$108.\quad \begin{cases} y_1\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + y_2\dfrac{\partial C_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x}\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x}\dfrac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + 2\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\dfrac{\partial C_2}{\partial x} \\ \quad + P\dfrac{\partial y_1}{\partial x}\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + P\dfrac{\partial y_2}{\partial x}\dfrac{\partial C_2}{\partial x} = X; \end{cases}$$

oder

$$109.\quad \begin{cases} y_1\partial C_1 + y_2\partial C_2 = 0, \\ \partial y_1\partial^2 C_1 + \partial y_2\partial^2 C_2 + 2\partial^2 y_1\partial C_1 + 2\partial^2 y_2\partial C_2 \\ \quad + P\partial y_1\partial C_1\partial x + P\partial y_2\partial C_2\partial x = X\partial x^3. \end{cases}$$

Mittelst der ersten der beiden Gleichungen (108.) kann man aus der zweiten $\frac{\partial C_2}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2}$ eliminiren, und wird dann zur Bestimmung von C_1 eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung erhalten, welche offenbar bloß $\frac{\partial C_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}$, nicht C_1 selbst, enthalten wird. Eine solche Differentialgleichung läßt sich aber immer, wie leicht erhellen wird, durch eine einfache Substitution in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung transformiren.

Hat man endlich bloß ein partikuläres Integral y_1 der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0;$$

so setze man

$$110.\quad y = C_1 y_1,$$

und erhält hieraus durch Differentiation leicht:

$$111.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = C_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + y_1\frac{\partial C_1}{\partial x},$$

$$112.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + y_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2},$$

$$113.\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C_1\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + 3\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + y_1\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3}.$$

Setzt man nun diese Ausdrücke von

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

in die Gleichung (82.); so erhält man:

$$114.\quad \left.\begin{aligned} &C_1\left(\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry_1\right)\\ &+ y_1\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + 3\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x}\\ &+ Py_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 2P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + Qy_1\frac{\partial C_1}{\partial x}\end{aligned}\right\} = X,$$

oder, weil nach der Voraussetzung y_1 der Gleichung

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y}{\partial x} + Ry = 0$$

genügt, und folglich

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Q\frac{\partial y_1}{\partial x} + Ry = 0$$

ist,

$$115.\quad \left.\begin{aligned} y_1\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + 3\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} \\ + Py_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 2P\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} \\ + Qy_1\frac{\partial C_1}{\partial x} \end{aligned}\right\} = X$$

oder

$$116.\quad \left.\begin{aligned} y_1\partial^3 C_1 + 3\partial y_1\partial^2 C_1 + 3\partial^2 y_1\partial C_1 \\ + Py_1\partial^2 C_1\partial x + 2P\partial y_1\partial C_1\partial x \\ + Qy_1\partial C_1\partial x^2 \end{aligned}\right\} = X\partial x^3 ,$$

und man hat also jetzt zur Bestimmung von C_1 eine Differentialgleichung der dritten Ordnung, die sich aber, weil bloß $\frac{\partial C_1}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3}$ in ihr enthalten sind, durch eine einfache Substitution immer leicht in eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung transformiren läßt.

Daß sich die obigen Betrachtungen leicht zu völliger Allgemeinheit erheben lassen würden, fällt auf der Stelle in die Augen, und bedarf hier keiner weitern Erläuterung.

IV. Riccati's Gleichung, durch Reihen integrirt.

9. Riccati's Gleichung ist bekanntlich (Thl. II. S. 895.) die Gleichung

$$117.\quad \frac{\partial z}{\partial x} + az^2 + bx^n = 0 .$$

Setzt man aber

$$118.\quad z = \frac{\partial y}{ay\partial x},\quad ayz = \frac{\partial y}{\partial x} ;$$

so erhält man durch Differentiation

$$ay\frac{\partial z}{\partial x} + az\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ,$$

oder

$$ay\frac{\partial z}{\partial x} + a^2 yz^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten $abx^n y$ addirt,

$$ay\left(\frac{\partial z}{\partial x} + az^2 + bx^n\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + abx^n y ,$$

d. i. nach (117.)

$$119.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + abx^n y = 0 ,$$

oder, wenn wir jetzt a für ab schreiben,

$$120.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax^n y = 0 .$$

In dieser Form ist die Gleichung zur Integration durch Reihen geschickter als in der Form (117.). Um nun diese Gleichung durch Reihen zu integriren, setze man

$$y = x^\lambda (A + Bx^{n+2} + Cx^{2n+4} + Dx^{3n+6} + Ex^{4n+8} + \ldots.) ;$$

so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lambda A x^{\lambda-1} + (\lambda + n + 2) B x^{\lambda+n+1} + (\lambda + 2n + 4) C x^{\lambda+2n+3} + (\lambda + 3n + 6) D x^{\lambda+3n+5} + \ldots.,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \lambda(\lambda-1) A x^{\lambda-2} + (\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) B x^{\lambda+n} + (\lambda + 2n + 4)(\lambda + 2n + 3) C x^{\lambda+2n+2} + (\lambda + 3n + 6)(\lambda + 3n + 5) D x^{\lambda+3n+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und folglich nach (120.)

$$0 = \lambda(\lambda-1) A x^{\lambda-2} + \{(\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) B + aA\} x^{\lambda+n} + \{(\lambda + 2n + 4)(\lambda + 2n + 3) C + aB\} x^{\lambda+2n+2} + \{(\lambda + 3n + 6)(\lambda + 3n + 5) D + aC\} x^{\lambda+3n+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Also ist

$$121. \quad \begin{cases} \lambda(\lambda-1) A = 0 , \\ (\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) B + aA = 0 , \\ (\lambda + 2n + 4)(\lambda + 2n + 3) C + aB = 0 , \\ (\lambda + 3n + 6)(\lambda + 3n + 5) D + aC = 0 , \\ \text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Größe λ ist hierbei eine ganz unbestimmte Größe, die nun bestimmt werden muß. Die erste der vorhergehenden Gleichungen wird für jedes ganz beliebige A erfüllt für $\lambda = 0$ und für $\lambda = 1$. Für $\lambda = 0$ hat man die Gleichungen

$$122. \quad \begin{cases} (n + 2)(n + 1) B + aA = 0 , \\ (2n + 4)(2n + 3) C + aB = 0 , \\ (3n + 6)(3n + 5) D + aC = 0 , \\ (4n + 8)(4n + 7) E + aD = 0 , \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und für $\lambda = 1$ hat man, wenn man jetzt A', B', C', D', ... für A, B, C, D, ... schreibt, die Gleichungen:

$$123. \quad \begin{cases} (n + 3)(n + 2) B' + aA' = 0 , \\ (2n + 5)(2n + 4) C' + aB' = 0 , \\ (3n + 7)(3n + 6) D' + aC' = 0 , \\ (4n + 9)(4n + 8) E' + aD' = 0 , \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (122.) erhält man:

$$124.\quad \begin{cases} B = -\dfrac{aA}{(n+1)(n+2)}, \\ C = \dfrac{a^2A}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}, \\ D = -\dfrac{a^3A}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und aus (123.) ergiebt sich

$$125.\quad \begin{cases} B' = -\dfrac{aA'}{(n+2)(n+3)}, \\ C' = \dfrac{a^2A'}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}, \\ D' = -\dfrac{a^3A'}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Also sind offenbar

$$126.\quad y_1 = A\left\{1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} - \frac{a^3x^{3n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} + \ldots\right\}$$

und

$$127.\quad y_2 = A'x\left\{1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{a^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)} - \frac{a^3x^{3n+6}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)3n+6)(3n+7)} + \ldots\right\}.$$

wo **A** und **A'** zwei ganz willkührliche Constanten sind, zwei partikuläre Integrale der Gleichung (120.), und leicht wird man sich nun auch überzeugen, daß die Größe

$$128.\quad y = y_1 + y_2,$$

welche zwei willkührliche Constanten enthält, das vollständige Integral der in Rede stehenden Gleichung ist.

E. E. Kummer hat in einem schönen Aufsatze, der in Crelles Journal. B. **XII.** S. 144. abgedruckt ist, gezeigt, daß sich die beiden Reihen, durch welche das vollständige Integral der Riccatischen Gleichung dargestellt wird, durch bestimmte Integrale summiren lassen, und eine ähnliche Arbeit hatte früher Scherk in demselben Journal B. **X.** S. 92. über die Gleichung

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (\alpha + \beta x)y$$

geliefert, zu der sich auch noch eine Bemerkung von C. G. J. Jacobi in demselben Bande S. 279. findet. Die Beschränktheit des Raumes verbietet uns hier weitere Mittheilungen über diese interessanten Arbeiten zu machen.

Als die wichtigste Erweiterung der Lehre von der Integration der Differentialgleichungen ist ohne Widerrede die methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi zu betrachten, welche J. F. Pfaff in seiner eben so überschriebenen berühmten Abhandlung (Abhandlungen der mathematischen Klasse der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1814 — 1815. Berl. 1818. S. 76.) ausführlich entwickelt hat. Die Natur dieses Gegenstandes gestattet aber keine Mittheilung in diesem Wörterbuche, weil dazu ein zu großer Raum erforderlich seyn würde. Auch wird man auf jeden Fall diese schöne Methode, über die auch C. G. J. Jacobi in dem Crelleschen Journal. B. II. einige Aufsätze geliefert hat, am besten an der Quelle selbst studiren.

K.

Kegel. Ueber die Berechnung der Oberfläche des schiefen Kegels s. m. den Art. Cylinder (6.) i. d. Z.

Kegelschnitt. Zur Literatur kann noch bemerkt werden: Grüson die Kegelschnitte elem. abgeh. Berl. 1828. Schneider Lehre von den Kegelschnitten für Anfänger. Berl. 1824. Umpfenbach über die verschiedene Entstehung der Kegelschnitte. Gießen. 1821. Märtens der Konisector, ein Instrument die Kegelschnitte zu verzeichnen. Halberst. 1821. Auch ist es dem Verf. dieser Supplemente wohl erlaubt, seiner beiden Schriften über diesen Gegenstand hier Erwähnung zu thun, von denen die eine, welche die Lehre von den Kegelschnitten sehr ausführlich analytisch behandelt, Leipzig 1824. erschienen ist, die andere (Brandenburg. 1832.) den vierten Theil seines mathematischen Lehrbuchs für die obern Klassen höherer Lehranstalten ausmacht.

Keplers Aufgabe. In dem Artikel Bestimmtes Integral. (56.) i. d. Z. ist schon Bessels berühmte Auflösung dieses wichtigen Problems mitgetheilt worden. Hier wollen wir nun noch in der Kürze die schöne, wenn auch indirecte, Auflösung desselben entwickeln, welche Gauß in der Theoria motus corporum coelestium p. 10. gegeben hat.

Bekanntlich kommt es bei der Kepler'schen Aufgabe im Allgemeinen darauf an, aus einer Gleichung von der Form

$$\mu = u - e \sin u,$$

in welcher μ und e als bekannt angenommen werden, die Größe u zu bestimmen. Durch einige Versuche wird man immer leicht einen schon sehr genäherten Werth von u finden können, welchen wir durch Θ bezeichnen wollen. Ist nun x der in Secunden

ausgedrückte Fehler, so ist genau $u = \Theta + x$. Man berechne $e \sin \Theta$ in Secunden durch Logarithmen und notire zugleich aus den Tafeln die 1″ entsprechende Veränderung δ von $\log \sin \Theta$, so wie die einer Veränderung von einer Einheit in der Zahl $e \sin \Theta$ entsprechende Veränderung δ' von $\log . e \sin \Theta$. Dies vorausgesetzt, hat man nun im ersten Quadranten

$$\log . e \sin (\Theta + x) - \log . e \sin \Theta = \log \sin (\Theta + x) - \log \sin \Theta$$
$$= \{e \sin (\Theta + x) - e \sin \Theta\} \delta' ,$$
$$\log \sin (\Theta + x) - \log \sin \Theta = \delta x ;$$

also

$$\delta x = \{e \sin (\Theta + x) - e \sin \Theta\} \delta' ,$$

und folglich

$$e \sin (\Theta + x) = e \sin \Theta + \frac{\delta x}{\delta'} .$$

Im zweiten Quadranten ist

$$\log e \sin \Theta - \log . e \sin (\Theta + x) = \log \sin \Theta - \log \sin (\Theta + x)$$
$$= \{e \sin \Theta - e \sin (\Theta + x)\} \delta' ,$$
$$\log \sin \Theta - \log \sin (\Theta + x) = \delta x ;$$

also

$$\delta x = \{e \sin \Theta - e \sin (\Theta + x)\} \delta' ,$$

und folglich

$$e \sin (\Theta + x) = e \sin \Theta - \frac{\delta x}{\delta'} .$$

Im dritten Quadranten ist

$$\log . - e \sin (\Theta + x) - \log . - e \sin \Theta = \log . - \sin (\Theta + x) - \log . - \sin \Theta$$
$$= \{(- e \sin (\Theta + x)) - (- e \sin \Theta)\} \delta' ,$$
$$= \{e \sin \Theta - e \sin (\Theta + x)\} \delta' ,$$
$$\log . - \sin (\Theta + x) - \log . - \sin \Theta = \delta x ;$$

also

$$\delta x = \{e \sin \Theta - e \sin (\Theta + x)\} \delta'$$

und folglich

$$e \sin (\Theta + x) = e \sin \Theta - \frac{\delta x}{\delta'} .$$

Im vierten Quadranten ist

$$\log . - e \sin \Theta - \log . - e \sin (\Theta + x) = \log . - \sin \Theta - \log . - \sin (\Theta + x)$$
$$= \{(- e \sin \Theta) - (- e \sin (\Theta + x))\} \delta' ,$$
$$= \{e \sin (\Theta + x) - e \sin \Theta\} \delta' ,$$
$$\log . - \sin \Theta - \log . - \sin (\Theta + x) = \delta x ;$$

also

$$\delta x = \{e \sin (\Theta + x) - e \sin \Theta\} \delta' ,$$

und folglich

$$e \sin (\Theta + x) = e \sin \Theta + \frac{\delta x}{\delta'} ;$$

Also ist überhaupt

$$\text{esin}(\Theta + x) = \text{esin}\,\Theta \pm \frac{\delta x}{\delta'},$$

und das obere Zeichen gilt für den ersten und vierten, das untere für den zweiten und dritten Quadranten. Weil nun

$$u = \mu + \text{esin}\,u, \quad u = \Theta + x$$

ist; so ist

$$\Theta + x = \mu + \text{esin}(\Theta + x),$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Theta + x = \mu + \text{esin}\,\Theta \pm \frac{\delta x}{\delta'},$$

woraus sich leicht

$$x = \frac{\delta'}{\delta' \mp \delta}(\mu + \text{esin}\,\Theta - \Theta)$$

und folglich

$$u = \Theta + x = \Theta + \frac{\delta'}{\delta' \mp \delta}(\mu + \text{esin}\,\Theta - \Theta)$$

$$= \mu + \text{esin}\,\Theta \pm \frac{\delta}{\delta' \mp \delta}(\mu + \text{esin}\,\Theta - \Theta)$$

ergiebt. Dies ist ein zweiter genäherter Werth von u, von dem man ganz auf dieselbe Art zu einem dritten, von diesem zu einem vierten, u. s. w. übergehen kann. Um mit Leichtigkeit einen ersten genäherten Werth von u zu finden, kann man bemerken, daß u, wie sich aus der Gleichung

$$u = \mu + \text{esin}\,u$$

auf der Stelle ergiebt, immer zwischen den Gränzen μ und $u \pm e$ liegt, indem man für den ersten und zweiten Quadranten das obere, für den dritten und vierten Quadranten das untere Zeichen nimmt.

Ueber das Kepler'sche Problem s. m. auch noch **Mécanique céleste. T. I. Liv. II. n. 22. Schubert Traité d'Astronomie théorique. T. II. Petersb. 1822. p. 200. Pontécoulant Théorie analytique du système du monde. T. I. Paris. 1829. p. 255.** Eine ältere Dissertation von **Detmoldt** (Gött. 1798.) enthält bloß die Auflösung von **La Caille.**

Kettenbruch. Die Lehre von den Kettenbrüchen hat in neuerer Zeit mehrere wichtige Zusätze erhalten, von denen hier jedoch nur Einiges des Bemerkenswertheften mitgetheilt werden kann.

1. Eine Erweiterung der Elementarlehre von den Kettenbrüchen verdanken wir dem scharfsinnigen **Möbius**, welcher, gestützt auf eine Abhandlung von **Euler** (**Specimen algorithmi singularis. Nov. Comment. Petrop. T. IX.**), in einer in **Crelles Journal. B. VI. S. 215.** mitgetheilten schönen Abhandlung mehrere wichtige und interessante Sätze von dieser

merkwürdigen analytischen Größenform bewiesen hat. Möbius betrachtet in dieser Abhandlung überhaupt Kettenbrüche von der Form

$$\frac{1}{a-}\,\frac{1}{b-}\,\frac{1}{c-}\,\frac{1}{d-}\,\ldots\ldots,$$

auf welche sich, wie sogleich erhellen wird, jeder Kettenbruch leicht zurückführen läßt, und bezeichnet einen Kettenbruch von dieser Form, dessen letzter Nenner p ist, der Kürze wegen durch (a, b, c, d, ... p) oder auch bloß durch (a, ... p). Unmittelbar aus einer ganz einfachen Betrachtung des vorstehenden Kettenbruchs ergeben sich nun die Relationen:

$$1.\quad (a) = \frac{1}{a},\quad (a, b) = \frac{1}{a-(b)},\quad (a, b, c) = \frac{1}{a-(b, c)},\ \ldots\ldots,$$

oder auch umgekehrt

$$2.\quad a = \frac{1}{(a)},\quad a-(b) = \frac{1}{(a, b)},\quad a-(b, c) = \frac{1}{(a, b, c)},\ \ldots\ldots$$

Also ist allgemein

$$1^*.\quad (a) = \frac{1}{a},\quad (a, \ldots p) = \frac{1}{a-(b, \ldots p)};$$

$$2^*.\quad a = \frac{1}{(a)},\quad a-(b, \ldots p) = \frac{1}{(a, \ldots p)}.$$

Auch ist, wie auf der Stelle erhellet

$$\begin{aligned} 3.\quad (a, \ldots p) &= (a, b-(c, \ldots p)) \\ &= (a, b, c-(d, \ldots p)) \\ &= (a, b, c, d-(e, \ldots p)) \\ &= (a, b, c, d, e-(f, \ldots p)) \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$4.\quad (a, \ldots q, \infty) = (a, \ldots q),$$

$$5.\quad (a, \ldots q, 0) = (a, \ldots p),$$

wovon man sich eben so leicht wie von der Richtigkeit der vorhergehenden Relationen überzeugen wird.

2. Wir wollen nun annehmen, daß zwischen den veränderlichen Größen x, y und den Constanten a, b, c, ... p, q, r die Gleichung

$$x = (a, \ldots r, y)$$

gegeben sey, und wollen nun umgekehrt y durch dieselben Constanten und die Größe x auszudrücken suchen. Zu dem Ende haben wir nach (1*.)

$$x = \frac{1}{a-(b, \ldots r, y)},$$

und folglich

$$(b, \ldots r, y) = a - \frac{1}{x} = a - (x) ;$$

also nach (2*.)

$$(b, \ldots r, y) = \frac{1}{(a, x)} .$$

Ganz auf dieselbe Art ergiebt sich nun aus dieser Gleichung mittelst (1*.)

$$(c, \ldots r, y) = b - (a, x) ;$$

also nach (2*.)

$$(c, \ldots r, y) = \frac{1}{(b, a, x)} .$$

Hieraus erhält man ferner ganz auf ähnliche Art mittelst (1*.)

$$(d, \ldots r, y) = c - (b, a, x) ,$$

und folglich nach (2*.)

$$(d, \ldots r, y) = \frac{1}{(c, b, a, x)} .$$

Aus dieser Gleichung erhält man ferner auf ähnliche Art mittelst (1*.)

$$(e, \ldots r, y) = d - (c, b, a, x) ,$$

und folglich nach (2*.)

$$(e, \ldots r, y) = \frac{1}{(d, c, b, a, x)} .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Endlich wird man offenbar auf

$$(r, y) = \frac{1}{(q, \ldots a, x)}$$

kommen. Aus dieser Gleichung folgt aber nach (1*.)

$$(y) = r - (q, \ldots a, x) ,$$

und daher nach (2*.)

$$(y) = \frac{1}{(r, \ldots a, x)} .$$

Nun ist aber $(y) = \frac{1}{y}$; also ist

$$6. \quad y = (r, \ldots a, x) ,$$

und hiermit folglich unsere Aufgabe vollständig aufgelöst.

Aus der allgemeinen Gleichung

$$x = (a, \ldots r, y)$$

folgt also immer die Gleichung

$$y = (r, \ldots a, x) ,$$

wo, wie wohl nicht erst besonders erinnert zu werden braucht,

in der Reihe r, ... a die Elemente der Reihe a, ... r in umgekehrter Folge genommen sind.

3. Wegen der beiden Gleichungen

$$7.\quad x = (a, \ldots r, y)$$

$$8.\quad y = (r, \ldots a, x)$$

entspricht offenbar jedem Werthe von y nur ein Werth von x, und jedem Werthe von x nur ein Werth von y. Daher kann die zwischen x und y Statt findende gewöhnliche algebraische Gleichung bloß die allgemeine Form

$$9.\quad A + Bx + Cy + Dxy = 0 .$$

haben. Für $y = \infty$ wird wegen (7.) nach (4.)

$$x = (a, \ldots r) ,$$

und wegen (9.) offenbar

$$C + Dx = 0 ;$$

also, wenn man in diese Gleichung den gefundenen Werth von x einführt:

$$10.\quad \frac{C}{D} = -(a, \ldots r) .$$

Für $y = 0$ wird wegen (7.) nach (5.)

$$x = (a, \ldots q) ,$$

und wegen (9.)

$$A + Bx = 0 ;$$

also, wenn man in diese Gleichung den gefundenen Werth von x einführt:

$$11.\quad \frac{A}{B} = -(a, \ldots q) .$$

Für $x = \infty$ wird wegen (8.) nach (4.)

$$y = (r, \ldots a)$$

und wegen (9.)

$$B + Dy = 0 ;$$

also ist

$$12.\quad \frac{B}{D} = -(r, \ldots a) .$$

Für $x = 0$ ist wegen (8.) nach (5.)

$$y = (r, \ldots b)$$

und wegen (9.)

$$A + Cy = 0 ;$$

also ist

$$12.\quad \frac{A}{C} = -(r, \ldots b) .$$

Aus (10.) und (13) erhält man durch Multiplication

$$\frac{A}{D} = (a, \ldots r)(r, \ldots b),$$

und eben so ergiebt sich aus (11.) und (12.)

$$\frac{A}{D} = (r, \ldots a)(a, \ldots q).$$

Also ist

14. $(a, \ldots r)(r, \ldots b) = (r, \ldots a)(a, \ldots q)$,

oder

15. $(a, \ldots r)(r, \ldots b) - (r, \ldots a)(a, \ldots q) = 0$,

eine ganz allgemeine, offenbar sehr merkwürdige Gleichung.

Bringt man die Gleichung (9.) auf die Form

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D}x + \frac{C}{D}y + xy = 0,$$

und setzt für $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ ihre vorher gefundenen Werthe; so erhält man

16. $\begin{cases} (a, \ldots r)(r, \ldots b) - (r, \ldots a)x - (a, \ldots r)y + xy = 0, \\ (r, \ldots a)(a, \ldots q) - (r, \ldots a)x - (a, \ldots r)y + xy = 0, \end{cases}$

oder, wie man durch leichte Rechnung findet,

17. $\{x - (a, \ldots r)\}\{y - (r, \ldots a)\}$
$= (a, \ldots r)\{(r, \ldots a) - (r, \ldots b)\}$
$= (r, \ldots a)\{(a, \ldots r) - (a, \ldots q)\}$.

Weil nun nach (7.)

$$x = (a, \ldots r, y)$$

und nach (2*.)

$$y - (r, \ldots a) = \frac{1}{(y, r, \ldots a)}$$

ist; so erhält man aus (17.) die identische Gleichung

18. $\frac{(a, \ldots r, y) - (a, \ldots r)}{(y, r, \ldots a)} = (a, \ldots r)\{(r, \ldots a) - (r, \ldots b)\}$
$= (r, \ldots a)\{(a, \ldots r) - (a, \ldots q)\}$.

Schreibt man in dieser Gleichung s für y und bezeichnet der Kürze wegen die Differenzen

$(a, \ldots s) - (a, \ldots r)$, $(a, \ldots r) - (a, \ldots q)$, u. s. w.

durch $\Delta(a, \ldots r)$, $\Delta(a, \ldots q)$, u. s. w.; so kann man die in Rede stehende Gleichung auch auf folgenden Ausdruck bringen:

19. $\Delta(a, \ldots r) = (s, \ldots a)(r, \ldots a)\Delta(a, \ldots q)$,

und es ist also

$$20.\quad \begin{cases} \Delta(a,b) = (c,b,a)(b,a)\Delta(a)\,, \\ \Delta(a,b,c) = (d,c,b,a)(c,b,a)\Delta(a,b)\,, \\ \Delta(a,b,c,d) = (e,d,c,b,a)(d,c,b,a)\Delta(a,b,c), \\ \text{u. f. w.} \qquad\qquad \text{u. f. w.} \end{cases}$$

Weil nun

$$\Delta(a) = (a,b) - (a) = \frac{1}{a - \frac{1}{b}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a(ab-1)}$$

$$= \frac{a}{ab-1}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b - \frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a^2} = (b,a)(a)^2$$

ist; so ist

$$21.\quad \begin{cases} \Delta(a) = (b,a)(a)^2\,, \\ \Delta(a,b) = (c,b,a)(b,a)^2(a)^2\,, \\ \Delta(a,b,c) = (d,c,b,a)(c,b,a)^2(b,a)^2(a)^2\,, \\ \Delta(a,b,c,d) = (e,d,c,b,a)(d,c,b,a)^2(c,b,a)^2(b,a)^2(a)^2\,, \\ \text{u. f. w.} \qquad\qquad \text{u. f. w.} \end{cases}$$

Daher kann man die Gleichung (17.) offenbar auch auf folgende Art darstellen:

$$22.\quad \{x - (a,\ldots r)\}\{y - (r,\ldots a)\}$$
$$= (r,\ldots a)^2(q,\ldots a)^2\ldots(c,b,a)^2(b,a)^2(a)^2\,,$$

welches offenbar eine sehr merkwürdige Form dieser Gleichung ist. Zugleich sieht man, daß das Product

$$\{x - (a,\ldots r)\}\{y - (r,\ldots a)\}$$

stets positiv ist, und zieht daher hieraus leicht den folgenden Schluß:

Wenn zwei veränderliche Größen x, y auf eine solche Art von einander abhängen, daß $x = (a,\ldots r,y)$, und nach dem Obigen folglich $y = (r,\ldots a,x)$ ist; so ist, wenn x größer oder kleiner als die Größe $(a,\ldots r)$ ist, jederzeit y respective größer oder kleiner als die Größe $(r,\ldots a)$.

Nach (17.) sind die beiden Producte

$$(r,\ldots a)\{(a,\ldots r) - (a,\ldots q)\}\,,$$
$$(a,\ldots r)\{(r,\ldots a) - (r,\ldots b)\}$$

einander gleich, und das zweite entsteht aus dem ersten, wenn man die Größen a, b, c, ... r nach der Ordnung mit den Größen r, ... c, b, a vertauscht. Daher ändert die Differenz

$$(r,\ldots a)\{(a,\ldots r) - (a,\ldots q)\}$$

ihren Werth nicht, wenn man für die Größen a, b, c, ... r respective die Größen r, ... c, b, a setzt. Weil nun nach (21.)

$$(r,\ldots a)\{(a,\ldots r) - (a,\ldots q)\}$$
$$= (r,\ldots a)^2(q,\ldots a)^2\ldots(c,b,a)^2(b,a)^2(a)^2$$

ist; so ändert auch das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichen seinen Werth nicht, wenn man die Größen a, b, c, ... r mit den Größen r, ... c, b, a vertauscht, und es ist folglich

$$(r, \ldots a)^2 (q, \ldots a)^2 \ldots\ldots (b, a)^2 (a)^2$$
$$= (a, \ldots r)^2 (b, \ldots r)^2 \ldots\ldots (q, r)^2 (r)^2 ,$$

oder nach Ausziehung der Quadratwurzel auf beiden Seiten:

$$23. \quad (r, \ldots a)\{(q, \ldots a) \ldots (b, a)(a)\}$$
$$= \pm (a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r) ,$$

wo nun noch eine Bestimmung wegen des Vorzeichens nöthig ist. Man kann diese Gleichung aber noch auf eine andere Art aus dem Obigen ableiten, und diese zweite Art der Ableitung hat den wesentlichen Vorzug vor der vorhergehenden, daß sie das Zeichen nicht unbestimmt läßt, weshalb wir dieselbe hier nun ebenfalls noch mittheilen wollen. Nach (14.) ist nämlich

$$(a, \ldots r)(r, \ldots b) = (r, \ldots a)(a, \ldots q) ,$$
$$(b, \ldots r)(r, \ldots c) = (r, \ldots b)(b, \ldots q) ,$$
$$(c, \ldots r)(r, \ldots d) = (r, \ldots c)(c, \ldots q) ,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$(p, q, r)(r, q) = (r, q, p)(p, q) ,$$
$$(q, r)(r) = (r, q)(q) ,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$(a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots\ldots (q, r)(r)$$
$$= (r, \ldots a)(a, \ldots q)(b, \ldots q) \ldots (p, q)(q) .$$

Setzen wir nun mit Möbius

$$24. \quad \frac{1}{(a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r)} = \{a, \ldots r\} ;$$

so ist

$$\frac{1}{\{a, \ldots r\}} = \frac{(r, \ldots a)}{\{a, \ldots q\}} ,$$

und durch mehrfache Anwendung dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{1}{\{a, \ldots r\}} = \frac{(r, \ldots a)}{\{a, \ldots q\}} ,$$
$$\frac{1}{\{a, \ldots q\}} = \frac{(q, \ldots a)}{\{a, \ldots p\}} ,$$
$$\frac{1}{\{a, \ldots p\}} = \frac{(p, \ldots a)}{\{a, \ldots o\}} ,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\frac{1}{\{a, b, c\}} = \frac{(c, b, a)}{\{a, b\}} ,$$
$$\frac{1}{\{a, b\}} = \frac{(b, a)}{\{a\}} ,$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten, hebt auf, was sich aufheben läßt, und überlegt, daß offenbar $\frac{1}{\{a\}} = (a)$ ist; so erhält man

$$\frac{1}{\{a, \ldots r\}} = (r, \ldots a)(q, \ldots a) \ldots (b, a)(a) ,$$

d. i.

$$25. \quad (a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r) = (r, \ldots a)(q, \ldots a) \ldots (b, a)(a) ,$$

oder in der eingeführten Bezeichnung

$$26. \quad \{a, \ldots r\} = \{r, \ldots a\} .$$

Diese Gleichung ist offenbar mit der Gleichung (23.), wenn man in derselben das obere Zeichen nimmt, identisch, so daß also hieraus zugleich erhellet, daß man in der Gleichung (23.) jederzeit das obere Zeichen nehmen muß. Möbius rechtfertigt dies auf eine andere Art; es scheint uns aber das obige Verfahren Vorzüge zu haben.

4. Die Function $\{a, \ldots r\}$ spielt in der Lehre von den Kettenbrüchen eine sehr wichtige Rolle, weshalb wir hier auf die Haupteigenschaften derselben besonders aufmerksam machen wollen:

a. Der Werth dieser Function ändert nach (26.) sich nicht, wenn ihre Elemente in umgekehrter Folge genommen werden.

b. Nach (24.) ist

$$\frac{1}{(a, \ldots r)(b, \ldots r) \ldots (q, r)(r)} = \{a, \ldots r\} ,$$

$$\frac{1}{(b, \ldots r)(c, \ldots r) \ldots (q, r)(r)} = \{b, \ldots r\} ;$$

also durch Division

$$27. \quad (a, \ldots r) = \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}} .$$

Man kann also den Kettenbruch $(a, \ldots r)$ jederzeit als einen Quotienten zweier solchen Functionen mit Klammern darstellen. Auch ist nach (26.)

$$28. \quad (a, \ldots r) = \frac{\{r, \ldots b\}}{\{r, \ldots a\}} .$$

Eben so ist

$$29. \quad (r, \ldots a) = \frac{\{q, \ldots a\}}{\{r, \ldots a\}} = \frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots r\}} .$$

c. Nach (1*.) und (29.) ist

$$(r, \ldots a) = \frac{1}{r - (q, \ldots a)} = \frac{1}{r - \frac{\{a, \ldots p\}}{\{a, \ldots q\}}} = \frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots q\} r - \{a, \ldots p\}} ,$$

und folglich nach (29.)

$$\frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots q\}r - \{a, \ldots p\}} = \frac{\{a, \ldots q\}}{\{a, \ldots r\}}.$$

Dies giebt die Relation

$$30.\quad \{a, \ldots r\} = \{a, \ldots q\}r - \{a, \ldots p\}.$$

Also hat man z. B.

$$\{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d\}e - \{a, b, c\},$$
$$\{a, b, c, d\} = \{a, b, c\}d - \{a, b\},$$
$$\{a, b, c\} = \{a, b\}c - \{a\},$$

und folglich

$$\{a, a, c, d, e\} = \{a, b, c\}(de - 1) - \{a, b\}e$$
$$= \{a, b\}(c(de - 1) - e) - \{a\}(de - 1).$$

Weil nun

$$\{a, b\} = \frac{1}{(a, b)(b)} = ab - 1, \quad \{a\} = \frac{1}{(a)} = a$$

ist; so ist offenbar die Function $\{a, b, c, d, e\}$ eine ganze rationale Function ihrer Elemente. Daß dies allgemein, und folglich überhaupt die Function $\{a, \ldots r\}$ jederzeit eine ganze rationale Function ihrer Elemente ist, wird leicht erhellen. Nach dem Obigen läßt sich also der Kettenbruch $(a, \ldots r)$ immer als ein gemeiner Bruch darstellen, dessen Zähler und Nenner ganze rationale Functionen der Elemente a, b, c, d ... r sind.

d. Nach (21.) und (29.) ist

$$\Delta(a, \ldots q) = (r, \ldots a)(q, \ldots a)^2 \ldots (c, b, a)^2 (b, a)^2 (a)^2$$
$$= \frac{(r, \ldots a)}{\{q, \ldots a\}^2} = \frac{1}{\{q, \ldots a\}\{r, \ldots a\}},$$

oder nach (26.)

$$\Delta(a, \ldots q) = \frac{1}{\{a, \ldots q\}\{a, \ldots r\}},$$

d. i.

$$\frac{1}{\{a, \ldots q\}\{a, \ldots r\}} = (a, \ldots r) - (a, \ldots q)$$
$$= \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}} - \frac{\{b, \ldots q\}}{\{a, \ldots q\}};$$

folglich, wenn man mit dem Nenner des Bruchs auf der linken Seite multiplicirt,

$$31.\quad \{a, \ldots q\}\{b, \ldots r\} - \{a, \ldots r\}\{b, \ldots q\} = 1,$$

welches eine ebenfalls sehr merkwürdige Gleichung ist.

c. Der Gleichung (22.) kann man auch die sehr einfache Form

32. $$\left|x-(a,\dots r)\right|\left|y-(r,\dots a)\right| = \frac{1}{|a,\dots r|^2}$$

geben, oder, wenn man die Kettenbrüche durch Functionen mit Klammern ausdrückt, und (31.) berücksichtigt:

33. $$\left|a,\dots r\right|xy - \left|a,\dots q\right|x - \left|b,\dots r\right|y + \left|b,\dots q\right| = 0 .$$

5. Wir wollen nun

34. $$x = (a, b, \dots q, r, s, a', b', \dots q', r', y)$$

setzen, d. h. uns die Elemente, aus denen der, der Größe x gleiche Kettenbruch besteht, in zwei Gruppen zerlegt denken; so ist, wenn wir

35. $$w = (a', \dots r', y)$$

setzen,

36. $$x = (a, \dots r, s - w) ,$$

oder

37. $$x = (a, \dots r, v) ,$$

wenn wir

38. $$s - w = v, \quad s = v + w$$

setzen. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$(a, \dots r) = \alpha, \quad (r, \dots a) = \beta, \quad 1 : \left|a, \dots r\right| = \gamma ;$$
$$(a', \dots r') = \alpha', \quad (r', \dots a') = \beta', \quad 1 : \left|a', \dots r'\right| = \gamma' ;$$

so ist wegen (37.) und (35.) nach (32.)

39. $$(x - \alpha)(v - \beta) = \gamma^2 ,$$

40. $$(w - \alpha')(y - \beta') = \gamma'^2 ,$$

und folglich, wenn man aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung (38.) die Größen v, w eliminirt:

41. $$\frac{\gamma^2}{x - \alpha} + \frac{\gamma'^2}{y - \beta'} = \delta ,$$

für

42. $$\delta = s - \beta - \alpha' .$$

Ferner ist, wenn wir der Kürze wegen

$$(a, \dots r') = \alpha'', \quad (r', \dots a) = \beta'', \quad 1 : \left|a, \dots r'\right| = \gamma''$$

setzen, wegen der Gleichung (34.) nach (32.)

43. $$(x - \alpha'')(y - \beta'') = \gamma''^2 .$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, daß $y = \infty$ für $x = \alpha''$, und $x = \infty$ für $y = \beta''$ ist. Setzt man diese zusammengehörenden Werthe von x und y in die Gleichung (41.); so erhält man:

44. $$\gamma^2 = (\alpha'' - \alpha)\delta , \quad 45. \quad \gamma'^2 = (\beta'' - \beta')\delta .$$

Da ferner wegen der Gleichung (41.) offenbar auch α und β' zwei zusammengehörende Werthe von x und y sind; so erhält man nach (43.) auf der Stelle die Gleichung

$$46.\quad (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'') = \gamma''^2 .$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen erhält man sehr leicht:

$$47.\quad (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad 48.\quad (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad 49.\quad \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2};$$

folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$50.\quad \alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad 51.\quad \beta'' - \beta' = \pm\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma},\quad 52.\quad \delta = \pm\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}.$$

Daß in diesen drei Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen sind, läßt sich leicht auf folgende Art übersehen. Wäre nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \beta' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma};$$

so wäre

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}\cdot\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma} = -\gamma''^2,$$

da doch nach (46.) offenbar

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

ist. Wäre ferner mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'},\quad \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};$$

so wäre

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = -\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}\cdot\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2,$$

da doch nach (44.)

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

ist. Also sind in den Gleichungen (50.), (51.), (52.) die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen. Die Frage aber, welche Zeichen in diesen Gleichungen zu nehmen sind, läßt sich, wie es uns scheint, am Besten auf folgende Art beantworten. Setzt man nämlich in die Gleichung (50.) für α, α'', γ, γ', γ'' ihre Werthe aus dem Obigen; so erhält man

$$(a, \ldots r') - (a, \ldots r) = \pm\frac{\{a', \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}},$$

oder nach (27.)

$$\pm\frac{\{a' \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a, \ldots r'\}} = \frac{\{b, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r'\}} - \frac{\{b, \ldots r\}}{\{a, \ldots r\}};$$

folglich

$$53. \quad \pm\left\{a', \ldots r'\right\}$$
$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}.$$

Nun ist aber nach (30.)

$$\text{I.} \quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$- \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a' + \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}a' - \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}a'$$
$$= a' (31.) = \left\{a'\right\}.$$

Ferner ist nach (30.)

$$\text{II.} \quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\} - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\}$$
$$- \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b' + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}b' - \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}b'$$
$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots s\right\} + \left\{a, \ldots s\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= a'b' - 1 (\text{I. } 31.) = \left\{a', b'\right\}.$$

Ferner ist nach (30.)

$$\text{III.} \quad \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots c'\right\} - \left\{a, \ldots c'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\}$$
$$- \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c' + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots b'\right\}c' - \left\{a, \ldots b'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}c'$$
$$- \left\{a, \ldots r\right\}\left\{b, \ldots a'\right\} + \left\{a, \ldots a'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$
$$= \left\{a', b'\right\}c' - \left\{a'\right\} (\text{II. I.}) = \left\{a', b', c'\right\} (30.).$$

Ferner ist nach (30.)

$$\text{IV.} \quad \left\{a \ldots r\right\}\left\{b, \ldots d'\right\} - \left\{a, \ldots d'\right\}\left\{b, \ldots r\right\}$$

$$= \left\{a, \dots r\right\}\left\{b, \dots c'\right\}d' - \left\{a, \dots r\right\}\left\{b, \dots b'\right\}$$
$$- \left\{a, \dots c'\right\}\left\{b, \dots r\right\}d' + \left\{a, \dots b'\right\}\left\{b, \dots r\right\}$$
$$= \left\{a, \dots r\right\}\left\{b, \dots c'\right\}d' - \left\{a, \dots c'\right\}\left\{b, \dots r\right\}d'$$
$$- \left\{a, \dots r\right\}\left\{b, \dots b'\right\} + \left\{a, \dots b'\right\}\left\{b, \dots r\right\}$$
$$= \left\{a', b', c'\right\}d' - \left\{a', b'\right\} \text{ (III. II.)} = \left\{a', b', c', d'\right\} \text{ (30.)}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich in völliger Allgemeinheit:

$$54. \quad \left\{a', \dots r'\right\}$$
$$= \left\{a, \dots r\right\}\left\{b, \dots r'\right\} - \left\{a, \dots r'\right\}\left\{b, \dots r\right\}.$$

Folglich muß man in der Gleichung (53.), und daher offenbar auch in jeder der Gleichungen (50.), (51.), (52.) das obere Zeichen nehmen, so daß also

$$55. \quad \alpha'' - \alpha = \frac{\gamma\gamma''}{\gamma'}, \quad 56. \quad \beta'' - \beta' = \frac{\gamma'\gamma''}{\gamma}, \quad 57. \quad \delta = \frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}$$

ist. Führt man nun auch in die Gleichungen (56.) und (57.) für β', β'', γ, γ', γ'' und δ ihre Werthe aus dem Obigen ein; so erhält man:

$$58. \quad (r', \dots a) - (r', \dots a') = \frac{\{a, \dots r\}}{\{a, \dots r'\}\{a', \dots r'\}},$$

$$59. \quad s - (r, \dots a) - (a', \dots r') = \frac{\{a, \dots r'\}}{\{a, \dots r\}\{a', \dots r'\}}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$(r, \dots a) = \frac{\{a, \dots q\}}{\{a, \dots r\}}, \quad (a', \dots r') = \frac{\{b', \dots r'\}}{\{a', \dots r'\}}.$$

Also giebt die Gleichung (59.) nach leichter Rechnung

$$60. \quad \left\{a, \dots r\right\}\left\{a' \dots r'\right\}s - \left\{a, \dots r'\right\}$$
$$= \left\{a, \dots q\right\}\left\{a', \dots r'\right\} + \left\{a, \dots r\right\}\left\{b', \dots r'\right\},$$

oder auch, weil nach (30.)

$$\left\{a, \dots r\right\}s - \left\{a, \dots q\right\} = \left\{a, \dots s\right\}$$

ist,

$$61. \quad \left\{a, \dots s\right\}\left\{a', \dots r'\right\} = \left\{a, \dots r'\right\} + \left\{a, \dots r\right\}\left\{b', \dots r'\right\}.$$

6. Möbius hat a. a. O. noch mehrere andere merkwürdige Relationen entwickelt. Der Raum gestattet uns hier aber bloß noch, die Anwendung der vorhergehenden Sätze bei der Trans-

formation der Kettenbrüche in der Kürze zu zeigen. Zu dem Ende wollen wir wieder annehmen, daß x durch mehrere constante Elemente und die Größe y mittelst eines Kettenbruchs von der hier immer zum Grunde gelegten Form ausgedrückt sey, und wollen uns nun die constanten Elemente in mehrere einzelne Gruppen, hier z. B. in vier, getheilt denken. Sey also

62. $x = (a, \ldots r, s, a', \ldots r', s', a'', \ldots r'', s'', a''', \ldots r''', y)$

und

$$x' = (a', \ldots r', s', a'', \ldots y),$$
$$x'' = (a'', \ldots r'', s'', a''', \ldots y),$$
$$x''' = (a''', \ldots r''', y);$$

so ist

$$x = (a, \ldots r, s' - x'),$$
$$x' = (a', \ldots r', s' - x''),$$
$$x'' = (a'', \ldots r'', s'' - x'''),$$
$$x''' = (a''', \ldots r''', y).$$

Setzen wir nun

$$(a, \ldots r) = \alpha, \quad (r, \ldots a) = \beta, \quad 1 : \left|a, \ldots r\right| = \gamma;$$
$$(a', \ldots r') = \alpha', \quad (r', \ldots a') = \beta', \quad 1 : \left|a', \ldots r'\right| = \gamma';$$
$$(a'', \ldots r'') = \alpha'', \quad (r'', \ldots a'') = \beta'', 1 : \left|a'', \ldots r''\right| = \gamma'';$$
$$(a''', \ldots r''') = \alpha''', (r''', \ldots a''') = \beta''', 1 : \left|a''', \ldots r'''\right| = \gamma''';$$

so ist nach (32.)

$$(x - \alpha)(s - x' - \beta) = \gamma^2,$$
$$(x' - \alpha')(s' - x'' - \beta') = \gamma'^2,$$
$$(x'' - \alpha'')(s'' - x''' - \beta'') = \gamma''^2,$$
$$(x''' - \alpha''')(y - \beta''') = \gamma'''^2;$$

also ist

$$x = \alpha + \frac{\gamma^2}{s - \beta - x'},$$
$$x' = \alpha' + \frac{\gamma'^2}{s' - \beta' - x''},$$
$$x'' = \alpha'' + \frac{\gamma''^2}{s'' - \beta'' - x'''},$$
$$x''' = \alpha''' + \frac{\gamma'''^2}{y - \beta'''},$$

und folglich:

63. $$x = \alpha + \frac{\gamma^2}{s - \beta - \alpha'} - \frac{\gamma'^2}{s' - \beta' - \alpha''} - \frac{\gamma''^2}{s'' - \beta'' - \alpha'''} - \frac{\gamma'''^2}{y - \beta'''}.$$

Dieser Kettenbruch enthält nur vier, d. i. immer bloß so viel

Glieder, als in wie viel Gruppen man die Elemente des gegebenen Kettenbruchs getheilt hat.

Man kann aber diesen Kettenbruch noch auf eine andere für die Rechnung bequemere Form bringen. Setzt man nämlich

$$x - \alpha = z,\quad x' - \alpha' = z',\quad x'' - \alpha'' = z'',\quad x''' - \alpha''' = z''';$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$64.\quad \begin{cases} z(s - \beta - \alpha' - z') = \gamma^2, \\ z'(s' - \beta' - \alpha'' - z'') = \gamma'^2, \\ z''(s'' - \beta'' - \alpha''' - z''') = \gamma''^2, \\ z'''(y - \beta''') = \gamma'''^2. \end{cases}$$

Es ist aber nach (59.)

$$s - \beta - \alpha' = s - (r, \ldots a) - (a', \ldots r') = \frac{\{a, \ldots r'\}}{\{a, \ldots r\}\{a', \ldots r'\}},$$

$$s' - \beta' - \alpha'' = s' - (r', \ldots a') - (a'', \ldots r'') = \frac{\{a', \ldots r''\}}{\{a', \ldots r'\}\{a'', \ldots r''\}},$$

$$s'' - \beta'' - \alpha''' = s'' - (r'', \ldots a'') - (a''', \ldots r''') = \frac{\{a'', \ldots r'''\}}{\{a'', \ldots r''\}\{a''', \ldots r'''\}};$$

und nach (29.)

$$y - \beta''' = y - (r''', \ldots a''') = y - \frac{\{a''', \ldots q'''\}}{\{a''', \ldots r'''\}}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\left\{a, \ldots r\right\} z = v,\quad \left\{a', \ldots r'\right\} z' = v',\quad \left\{a'', \ldots r''\right\} z'' = v'',$$

$$\left\{a''', \ldots r'''\right\} r''' = v''';$$

so werden die Gleichungen (64.):

$$v\left[\left\{a, \ldots r'\right\} - \left\{a, \ldots r\right\} v'\right] = \left\{a', \ldots r'\right\},$$

$$v'\left[\left\{a', \ldots r''\right\} - \left\{a', \ldots r\right\} v''\right] = \left\{a'', \ldots r''\right\},$$

$$v''\left[\left\{a'', \ldots r'''\right\} - \left\{a'', \ldots r''\right\} v'''\right] = \left\{a''', \ldots r'''\right\},$$

$$x'''\left[\left\{a''', \ldots r'''\right\} y - \left\{a''', \ldots q'''\right\}\right] = 1.$$

Endlich ist

$$x = \alpha + z = \frac{1}{\{a, \ldots r\}}\left[\left\{b, \ldots r\right\} + v\right],$$

und folglich, wenn man die aus den vorhergehenden Gleichungen sich ergebenden Ausdrücke von v, v', v'', v''' nach und nach substituirt:

65. $\{a, \ldots, r\}.x =$

$$\{b,\ldots r\}+\cfrac{\{a',\ldots r'\}}{\{a,\ldots r'\}-\cfrac{\{a,\ldots r\}\{a'',\ldots r''\}}{\{a',\ldots r''\}-\cfrac{\{a',\ldots r'\}\{a''',\ldots r'''\}}{\{a'',\ldots r'''\}-\cfrac{\{a'',\ldots r''\}}{\{a''',\ldots r'''\{y-\{a'',\ldots q'''\}}}}}}$$

Daß man diese Formel auch leicht verallgemeinern könnte, ist klar, und eben so leicht erhellet auch, daß die Anzahl der Glieder dieses Kettenbruchs immer der Anzahl der Gruppen gleich ist, in welche man die Elemente des gegebenen Kettenbruchs getheilt hat.

Wegen der weitern Ausführung dieses Gegenstandes verweisen wir auf die Abhandlung von Möbius selbst.

Viele Zusätze zu der Elementarlehre von den Kettenbrüchen bietet auch der Artikel Unbestimmte Analytik dar, auf welchen uns daher hier zu verweisen erlaubt seyn mag. Namentlich ist in diesem Artikel (36. ff.) von der Verwandlung der irrationalen Quadratwurzeln und dem periodischen Fortschreiten der durch diese Operation erhaltenen Kettenbrüche ausführlich gehandelt. Einen bemerkenswerthen Satz von den Kettenbrüchen, durch welche die Wurzeln einer quadratischen Gleichung dargestellt werden, s. m. sowohl in der Abhandlung von Möbius (§. 12.), als auch in einem besondern Aufsatze von Galois, welcher den in Rede stehenden Satz zuerst gefunden hat, in den Annales de Mathématiques. T. XIX. p. 294. Der für diesen Artikel noch übrige Raum soll der Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche gewidmet seyn.

7. Das meiste Verdienst um die Verwandlungen der Reihen in Kettenbrüche hat sich in neuerer Zeit unstreitig Gauß erworben, indem er in der berühmten Abhandlung: **Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.** eine sehr allgemeine Reihe, unter der viele andere Reihen als specielle Fälle enthalten sind, in einen nach einem sehr merkwürdigen Gesetze fortschreitenden Kettenbruch zu verwandeln gelehrt hat. Gauß bezeichnet nämlich a. a. O. die Reihe

$$1+\frac{\alpha}{1}.\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}.\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}.\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

und sucht nun zunächst den Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)},$$

den er der Kürze wegen durch

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

bezeichnet, in einen Kettenbruch umzugestalten. Dazu gelangt er auf folgende Art. Der Coefficient von x^n in

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

sey K; so ist

$$66.\quad K = \frac{\alpha(\alpha+1)..(\alpha+n-1)}{1.2.3...n} \cdot \frac{\beta(\beta+1)..(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)..(\gamma+n-1)}.$$

Der Coefficient von x^n in

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$$

sey K'; so ist

$$67.\quad K' = \frac{\alpha(\alpha+1)..(\alpha+n-1)}{1.2.3..,n} \cdot \frac{(\beta+1)(\beta+2)..(\beta+n)}{(\gamma+1)(\gamma+2)..(\gamma+n)}.$$

Also ist

$$68.\quad K' = K.\frac{\gamma(\beta+n)}{\beta(\gamma+n)}.$$

Bezeichnen wir nun den Coefficienten von x^n in der Differenz

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

durch K''; so ist

$$69.\quad K'' = K' - K = K.\frac{n(\gamma-\beta)}{\beta(\gamma+n)}.$$

Ferner sey K''' der Coefficient von x^n in

$$x.F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x);$$

so ist

$$70.\quad K''' = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{(\beta+1)(\beta+2)..(\beta+n-1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)..(\gamma+n)}$$

und folglich nach (66.)

$$71.\quad K''' = K.\frac{n\gamma(\gamma+1)}{\alpha\beta(\gamma+n)}.$$

Also ist nach (69.)

$$72.\quad K'' = K'''.\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)},$$

und es findet folglich offenbar die folgende Gleichung Statt:

$$73.\quad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x.F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x).$$

Dividirt man auf beiden Seiten diese Gleichung mit ihrem ersten Gliede; so ergiebt sich

$$74.\quad \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)} = 1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x. \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)},$$

oder

$$75.\quad \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}}.$$

Nun ist aber, wie sogleich erhellen wird,

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) = F(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x),$$
$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x) = F(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2, x).$$

Also ist

$$76.\quad \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot \frac{F(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2, x)}{F(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}},$$

d. i. in der oben eingeführten Bezeichnung:

$$77.\quad G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nun überhaupt die folgende Reihe von Gleichungen:

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)},$$

$$G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x) = \frac{1}{1 - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x \cdot G(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)},$$

$$G(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x) = \frac{1}{1 - \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} x \cdot G(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3, x)},$$

$$G(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3, x) = \frac{1}{1 - \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)} x \cdot G(\alpha+2, \beta+2, \gamma+4, x)},$$

u. s. w. u. s. w.

Setzt man also der Kürze wegen

$$a_1 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}; \qquad a_2 = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)};$$

$$a_3 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \quad a_4 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)};$$

$$a_5 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}, \quad a_6 = \frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)};$$

$$a_7 = \frac{(\alpha+3)(\gamma+3-\beta)}{(\gamma+6)(\gamma+7)}, \quad a_8 = \frac{(\beta+4)(\gamma+4-\alpha)}{(\gamma+7)(\gamma+8)};$$

u. s. w. u. s. w.

so ist

78. $$G(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{1}{1-\frac{a_1x}{1-\frac{a_2x}{1-\frac{a_3x}{1-\frac{a_4x}{1-\frac{a_5x}{1-\ldots.}}}}}}$$

Für $\beta=0$ ist

$$F(\alpha,0,\gamma,x)=1,$$

und folglich

$$G(\alpha,0,\gamma,x)=F(\alpha,1,\gamma+1,x)$$

oder

$$G(\alpha,0,\gamma-1,x)=F(\alpha,1,\gamma,x).$$

Setzt man also in der Gleichung (78.) $\beta=0$ und $\gamma-$ für γ; so erhält man

79. $$F(\alpha,1,\gamma,x)=\frac{1}{1-\frac{c_1x}{1-\frac{c_2x}{1-\frac{c_3x}{1-\frac{c_4x}{1-\frac{c_5x}{1-\ldots,}}}}}}$$

wo

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=1+\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots,$$

und

$$c_1=\frac{\alpha}{\gamma},\qquad c_2=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)};$$

$$c_3=\frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)},\qquad c_4=\frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)};$$

$$c_5=\frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},\qquad c_6=\frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)};$$

$$c_7=\frac{(\alpha+3)(\gamma+2)}{(\gamma+5)(\gamma+6)},\qquad c_8=\frac{4(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+6)(\gamma+7)},$$

u. s. w. u. s. w.

ist.

Mit der hier in einen Kettenbruch verwandelten Reihe lassen sich die meisten Reihen, welche sonst in der Analysis betrachtet zu werden pflegen, vergleichen. Setzt man z. B. $-\alpha$ für α, $-x$ für x, und $\gamma=1$; so geht dieselbe in die Binomial-Reihe über. Eben so ist

80. $$l(1+x)=xF(1,1,2,-x),$$

81. $$l\frac{1+x}{1-x}=2xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},x^2),$$

82. $$\text{Arc tang}\,x=xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},-x^2),$$

und auf ähnliche Art in andern Fällen. Mit Mehrerem s. m. die angeführte Abhandlung von Gauß, und vergleiche auch die

Theoria motus corporum coelestium. p. 97. p. 98. p. 113, Noch bemerken wir, daß, wenn man sich γ unendlich groß denkt.

$$83.\quad F\left(\frac{m}{n}, 1, \gamma, -n\gamma x\right) = 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{mx}{1 + \dfrac{nx}{1 + \dfrac{(m+n)x}{1 + \dfrac{2nx}{1 + \dfrac{(m+2n)x}{1 + \dfrac{3nx}{1 + \ldots}}}}}}}$$

ist.

8. In der Mécanique céleste. T. IV. p. 255. hat Laplace das in vieler Beziehung wichtige bestimmte Integral

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

in einen Kettenbruch entwickelt. Einen sehr schönen Beweis dieses Kettenbruchs hat neuerdings C. G. J. Jacobi in Crelles Journal. B. XII. S. 346. gegeben, welchen wir hier, weil er auch in anderer Beziehung, wovon nachher ausführlicher die Rede seyn wird, bemerkenswerth ist, noch mittheilen wollen. Man setze

$$84.\quad v = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

und differentiire; so erhält man

$$\partial v = e^{x^2}\partial\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x + 2xe^{x^2}\partial x\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

$$= 2xv\partial x + e^{x^2}\partial\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x.$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int e^{-x^2}\partial x = \varphi(x) + C;$$

so ist

$$\partial\varphi(x) = e^{-x^2}\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x = \varphi(\infty) - \varphi(x),$$

und folglich

$$\partial\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x = -\partial\varphi(x).$$

Also ist

$$\partial \int_x^\infty e^{-x^2} \partial x = - e^{-x^2} \partial x ;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\partial v = 2xv\partial x - \partial x ,$$

oder

$$85. \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xv - 1 .$$

Durch successive Differentiation dieser Gleichung ergiebt sich leicht:

$$86. \quad \frac{\partial^{n+1} v}{\partial x^{n+1}} = 2x \frac{\partial^n v}{\partial x^n} + 2n \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} ,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$87. \quad \frac{\partial^n v}{1.2.3..n\,\partial x^n} = v_n$$

setzt,

$$88. \quad v_1 = 2xv - 1, \quad (n+1)\, v_{n+1} = 2x v_n + 2v_{n-1} .$$

Setzt man nun ferner

$$89. \quad (-1)^n . 2x^{n+1} v_n = y_{n+1}, \quad q = \frac{1}{2x^2} ;$$

so ist

$$90. \quad 1 = y_1 + q y_2, \quad y_n = y_{n+1} + (n+1) q\, y_{n+2} ,$$

und folglich

$$\frac{1}{y_1} = 1 + q\frac{y_2}{y_1} = 1 + q : \frac{y_1}{y_2} ,$$

$$\frac{y_1}{y_2} = 1 + 2q\frac{y_3}{y_2} = 1 + 2q : \frac{y_2}{y_3} ,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = 1 + 3q\frac{y_4}{y_3} = 1 + 3q : \frac{y_3}{y_4} ,$$

$$\frac{y_3}{y_4} = 1 + 4q\frac{y_5}{y_4} = 1 + 4q : \frac{y_4}{y_5} ,$$

u. s. w. u. s. w.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = 1 + nq\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + nq : \frac{y_n}{y_{n+1}} ,$$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1) q\, y_{n+2}}{y_{n+1}} .$$

Also ist

$$91. \quad y_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{q}{1 + \dfrac{2q}{1 + \dfrac{3q}{1 + \cdots + \dfrac{nq}{1 + \dfrac{(n+1) q\, y_{n+2}}{y_{n+1}}}}}}} .$$

Da nun nach (89.)

$$y_1 = 2xv = 2xe^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}\partial x$$

ist; so ist

$$92.\quad \int_x^\infty e^{-x^2}\partial x =$$

$$\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{1}{1+\frac{q}{1+\frac{2q}{1+\frac{3q}{1+}}}}\cdots+\frac{nq}{1+\frac{(n+1)qy_{n+2}}{y_{n+1}}}.$$

q ist $= \frac{1}{2x^2}$, und folglich immer eine positive Größe. Ferner ist

$$y_{n+1} = (-1)^n.2x^{n+1}v_n = (-1)^n.2x^{n+1}\frac{\partial^n v}{1.2\ldots n\,\partial x^n}.$$

Man kann y_{n+1} aber noch auf eine andere Art durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Da nämlich

$$v = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-T^2}\partial T$$

ist; so ist, wenn wir

$$T = t + x$$

setzen, offenbar

$$v = e^{x^2}\int_0^\infty e^{-(t+x)^2}\partial t,$$

und folglich, wenn wir e^{x^2}, welches jetzt als constant zu betrachten ist, unter das Integralzeichen nehmen:

$$v = \int_0^\infty e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t.$$

Differentiiren wir nun nach x; so erhalten wir, wobei der Artikel Bestimmtes Integral (18.) i. d. Z. zu vergleichen ist,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_0^\infty(-2t)e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \int_0^\infty(-2t)^2e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \int_0^\infty(-2t)^3e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

u. s. w. u. s. w.

$$\frac{\partial^n v}{\partial x^n} = \int_0^\infty(-2t)^n e^{-t^2}e^{-2tx}\partial t,$$

und folglich nach (87.)

$$v_n = \frac{1}{1.2.3 \ldots n} \int_0^\infty (-2t)^n e^{-t^2} e^{-2tx} \partial t,$$

oder

$$v_n = \frac{e^{x^2}}{1.2.3 \ldots n} \int_0^\infty (-2t)^n e^{-(t+x)^2} \partial t,$$

oder, wenn man wieder $t + x = T$ setzt,

$$v_n = \frac{(-2)^n e^{x^2}}{1.2.3 \ldots n} \int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2} \partial T,$$

und daher nach (89.)

93. $$y_{n+1} = \frac{(2x)^{n+1} e^{x^2}}{1.2.3 \ldots n} \int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2} \partial T;$$

also

94. $$\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{2x}{n+1} \cdot \frac{\int_x^\infty (T-x)^{n+1} e^{-T^2} \partial T}{\int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2} \partial T};$$

folglich

95. $$\frac{(n+1)\, q\, y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\int_x^\infty (T-x)^{n+1} e^{-T^2} \partial T}{\int_x^\infty (T-x)^n e^{-T^2} \partial T}.$$

Ist nun x eine positive Größe; so ist die Größe

$$\frac{(n+1)\, q\, y_{n+2}}{y_{n+1}}$$

offenbar für jedes n positiv, woraus sich mittelst (92.) nach bekannten Elementarsätzen von den Kettenbrüchen ergiebt, daß, wenn man

93. $$\int_x^\infty e^{-x^2} \partial x = \frac{e^{-x^2}}{2x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \frac{4q}{1 + \ldots}}}}}$$

setzt, im Falle eines positiven x durch jede zwei auf einander folgende Partialwerthe dieses Kettenbruchs zwei Gränzen geliefert werden, zwischen denen das bestimmte Integral

$$\int_x^\infty e^{-x^2} \partial x$$

enthalten ist.

Das Integral $\int_0^x e^{-x^2} \partial x$ kann man im Falle eines posi-

tiven x auf folgende Art entwickeln. Es ist nach bekannten Sätzen von den bestimmten Integralen

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x = \int_0^x e^{-x^2}\partial x + \int_x^\infty e^{-x^2}\partial x .$$

Nach dem Artikel Bestimmtes Integral (24.) i. d. Z. ist aber

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x = \tfrac{1}{2}\Gamma\pi .$$

Also ist nach (93.) für jedes positive x:

$$94.\quad \int_0^x e^{-x^2}\partial x = \tfrac{1}{2}\Gamma\pi - \frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{1}{1+}\frac{q}{1+}\frac{2q}{1+}\frac{3q}{1+}\frac{4q}{1+}\ldots.$$

Auch erhellet leicht, daß

$$95.\quad \int_0^{-x} e^{-x^2}\partial x = -\int_0^x e^{-x^2}\partial x$$

ist, und daher auch immer mittelst (94.) gefunden werden kann.

Endlich ist

$$\int_{-x}^\infty e^{-x^2}\partial x = \int_{-x}^0 e^{-x^2}\partial x + \int_0^\infty e^{-x^2}\partial x$$
$$= \tfrac{1}{2}\Gamma\pi - \int_0^{-x} e^{-x^2}\partial x$$
$$= \tfrac{1}{2}\Gamma\pi + \int_0^x e^{-x^2}\partial x ,$$

und folglich nach (94.)

$$96.\quad \int_{-x}^\infty e^{-x^2}\partial x = \Gamma\pi - \frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{1}{1+}\frac{q}{1+}\frac{2q}{1+}\frac{3q}{1+}\frac{4q}{1+}\ldots.$$

Die hier mitgetheilte Darstellung von Jacobi scheint uns in jeder Beziehung, vorzüglich aber deshalb sehr bemerkenswerth zu seyn, weil man durch dieselbe zu einer genauen Kenntniß der Natur der Größe gelangt, welche man vernachlässigt, wenn man den Kettenbruch bei einem beliebigen Gliede abbricht. Kennt man auch nicht den bestimmten Werth dieser Größe; so zeigt doch der vorhergehende Beweis ganz unzweideutig, daß diese Größe für ein positives x jederzeit positiv ist, und daß also, wenn x positiv ist, jede zwei auf einander folgende Partialwerthe des Kettenbruchs in der That zwei Gränzen liefern, zwischen denen das durch den Kettenbruch darzustellende bestimmte Integral enthalten ist. Dieser schöne Beweis ist daher zugleich ein nicht unwichtiger Beitrag zu der

Lehre von der Convergenz der Kettenbrüche, welche bis jetzt von den Mathematikern fast noch gar nicht bearbeitet worden ist, und daher ihrer Aufmerksamkeit hier zugleich angelegentlich empfohlen werden mag. Das wenige Land, welches man in dieser wichtigen Lehre gewonnen hat, ist bis jetzt ziemlich unfruchtbar gewesen und überhaupt kaum der Beachtung werth.

Das ausführlichste, auch manches Neue enthaltende, in jeder Beziehung zu empfehlende Werk über die Theorie der Kettenbrüche und deren Anwendung in der Algebra und Analysis ist jetzt: **Theorie der Kettenbrüche von Stern. Berlin 1834.** In diesem Werke findet man alles Wichtige auf eine zweckmäßige Art zusammengestellt. Auch s. m. Eytelweins Grundlehren der höhern Analysis. Berlin. 1824. und vergleiche die Artikel Cyklometrie. IV. i. d. Z. und Quadratur (58.).

Knotenfurche, s. Einhüllende Curven und Flächen (11.) und Evolution (4.) i. d. Z.

Knotenkante, s. Einhüllende Curven und Flächen (11.) und Evolution (4.) i. d. Z.

Krümmungskreis. Die Zusätze, deren dieser Artikel in nicht geringer Anzahl bedurfte, sind mit dem Artikel Berührung i. d. Z. verschmolzen worden, welches hier nicht einer besondern Rechtfertigung bedürfen, sondern bei genauerer Ansicht des zuletzt genannten Artikels, auf den wir also hier in seiner ganzen Ausdehnung verweisen, sich von selbst als zweckmäßig und nothwendig bewähren wird. Ueber den sogenannten schiefen Krümmungshalbmesser s. m. den Art. Caustische Flächen und Linien (32.) i. d. Z.

L.

Lambertische Reihe. Der Beweis für diese Reihe ist in dem Artikel Reihe nicht, wohl aber in dem Artikel Umkehrung der Reihen (21.) gegeben worden.

Lexicographisch in der Combinationslehre, s. Combination (8.).

Linie und Ebene. Die analytische Theorie der geraden Linie und der Ebene ist für die ganze Mathematik so wichtig, die im dritten Theile dieses Wörterbuchs gelieferte Darstellung derselben dagegen so mangelhaft und so wenig den Anforderungen der neuern Mathematik entsprechend, daß uns eine neue Entwickelung der diese wichtige Theorie bildenden Gleichungen und Formeln unbedingt nothwendig zu seyn scheint.

I. Die gerade Linie in der Ebene.

1. In der Ebene, in welcher wir für jetzt alle Constructionen auszuführen uns vornehmen, denken wir uns zwei unter einem beliebigen Winkel sich schneidende gerade Linien gezogen, und nennen dieselben die Axen, ihren Durchschnittspunkt aber, der im Folgenden immer durch **O** bezeichnet werden mag, den Anfang. Die eine dieser beiden Axen, welche wir der Einfachheit wegen immer in horizontaler Lage annehmen wollen, heißt die Abscissenaxe; die andere wird die Ordinatenaxe genannt. Der Anfang **O** theilt jede der beiden Axen in zwei Theile, von denen wir den einen immer den positiven, den andern den negativen Theil der entsprechenden Axe nennen wollen, wobei es an sich willkührlich ist, welchen Theil man bei jeder Axe als den positiven, und welchen man als den negativen Theil annimmt. Da jedoch in dieser Beziehung eine bestimmte Uebereinkunft getroffen werden muß; so setzen wir hiermit fest, daß jederzeit der rechts vom Anfange **O** liegende Theil der Abscissenaxe als der positive, der links vom Anfange liegende Theil derselben dagegen als der negative Theil dieser Axe angenommen werden soll. Bei der Ordinatenaxe wollen wir immer den oberhalb der Abscissenaxe liegenden Theil als den positiven, den unterhalb der Abscissenaxe liegenden Theil dagegen als den negativen Theil annehmen. Auch soll immer die Seite einer jeden der beiden Axen, auf welcher der positive oder negative Theil der andern Axe liegt, respective die positive oder negative Seite der erstern Axe genannt werden.

2. Durch einen beliebigen Punkt **M** in der Ebene der beiden Axen denke man sich nun mit der Ordinatenaxe eine Parallellinie gezogen, welche die Abscissenaxe in dem Punkte **N** schneiden mag; so wird zwischen diesem Punkte und dem Anfange **O** ein gewisses Stück **ON** der Abscissenaxe liegen. Dieses Stück **ON** wird als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem es auf dem positiven oder negativen Theile der Abscissenaxe liegt, und dies durch Vorsetzung des Zeichens + oder — vor das Symbol **ON** bezeichnet. Eben so nimmt man auch **MN** als positiv oder negativ an, jenachdem diese Linie auf der positiven oder negativen Seite der Abscissenaxe liegt, und bezeichnet dies ebenfalls durch Vorsetzung des Zeichens + oder — vor das Symbol **MN**. Daher zeigt also $+\mathbf{ON}$ oder $-\mathbf{ON}$ an, daß im ersten Falle die Linie **ON** auf dem positiven, im zweiten dagegen auf dem negativen Theile der Abscissenaxe liegt, und eben so zeigt $+\mathbf{MN}$ und $-\mathbf{MN}$ an, daß im ersten Falle die Linie **MN** auf der positiven, im zweiten dagegen auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegt. Die Linien **ON** und **MN**, mit Rücksicht auf die Vorzeichen, welche ihnen nach dem Vorhergehenden zukommen, d. h. eigentlich die Ausdrücke oder Symbole $\pm\mathbf{ON}$ und $\pm\mathbf{MN}$, wo

keine Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander Statt findet, heißen die Coordinaten des Punktes M, und zwar heißt ± ON jederzeit die Abscisse, ± MN dagegen die Ordinate desselben.

3. Durch seine beiden Coordinaten ist die Lage des Punktes M in der Ebene der beiden Axen offenbar vollkommen bestimmt. Um den Anfang O herum liegen nämlich vier Winkel, welche von dem positiven Theile der Abscissenaxe und dem positiven Theile der Ordinatenaxe, von dem positiven Theile der Ordinatenaxe und dem negativen Theile der Abscissenaxe, von dem negativen Theile der Abscissenaxe und dem negativen Theile der Ordinatenaxe, von dem negativen Theile der Ordinatenaxe und dem positiven Theile der Abscissenaxe gebildet werden, und nach dieser Ordnung der erste, zweite, dritte und vierte Axenwinkel genannt werden sollen, wobei man auch zugleich merken kann, daß der erste Axenwinkel gewöhnlich der Coordinatenwinkel genannt wird, eine Benennung, die wir auch im Folgenden beibehalten wollen. Jenachdem nun der Punkt M im ersten, zweiten, dritten oder vierten Axenwinkel liegt, sind seine beiden Coordinaten offenbar:

$$+ON, +MN;$$
$$-ON, +MN;$$
$$-ON, -MN;$$
$$+ON, -MN;$$

und man wird hierdurch, auch ohne daß wir noch weitere Erläuterungen über diesen Gegenstand hinzuzufügen nöthig haben, die obige Behauptung, daß durch seine beiden Coordinaten die Lage des Punktes M in der Constructionsebene jederzeit vollständig bestimmt wird, gewiß auf der Stelle gerechtfertigt finden. Liegt der Punkt M in der Abscissenaxe, so ist seine Ordinate $= 0$; seine Abscisse kann aber positiv und negativ seyn, und kann jede beliebige absolute Größe haben. Das Umgekehrte findet Statt, wenn der in Rede stehende Punkt in der Ordinatenaxe liegt. Die Coordinaten des Anfangs sind jederzeit beide $= 0$.

4. Wir wollen uns nun zwei neue oder secundäre Axen denken, und wollen die neue oder secundäre Abscissenaxe mit der ersten oder primitiven Abscissenaxe zusammenfallen lassen, die neue oder secundäre Ordinatenaxe aber der ersten oder primitiven Ordinatenaxe parallel annehmen. Die positiven und negativen secundären Abscissen sollen vom secundären Anfangspunkte an nach denselben Seiten hin genommen werden, wie die positiven und negativen primitiven Abscissen vom primitiven Anfangspunkte an. Die primitive Abscisse und Ordinate des secundären Anfangs seyen a, 0; die primitiven und secundären Coordinaten des beliebigen Punktes M seyen respective x, y und x', y', wobei das Symbol der Abscisse immer voran geschrieben werden soll.

Stellen wir uns nun die Aufgabe, die primitiven Coordinaten x, y durch die secundären Coordinaten x', y' auszudrücken; so erhellet zuerst in völliger Allgemeinheit, daß jederzeit $y = y'$ ist. Um aber x durch x' auszudrücken, muß man folgende Fälle unterscheiden:

I. Wenn a positiv ist, so sey zuerst x' und folglich auch x positiv. Dann ist offenbar

$$x = a + x'.$$

Ist ferner in diesem Falle x' negativ und x positiv, so ist

$$x + (-x') = a, \quad x = a + x'.$$

Ist endlich x' negativ und auch x negativ, so ist

$$(-x') - (-x) = a, \quad x = a + x'.$$

Also ist immer $x = a + x'$, und zugleich wird man sich auch leicht überzeugen, daß diese Gleichung noch richtig bleibt, wenn eine der beiden Größen x, x' verschwindet.

II. Wenn a negativ ist; so sey zuerst x' und folglich auch x negativ. Dann ist offenbar

$$-x = (-a) + (-x'), \quad x = a + x'.$$

Ist ferner in diesem Falle x' positiv und x negativ, so ist

$$-x + x' = -a, \quad x = a + x'.$$

Ist endlich x' positiv und auch x positiv, so ist

$$x' - x = -a, \quad x = a + x'.$$

Also ist wieder immer $x = a + x'$, so daß wir folglich in völliger Allgemeinheit

$$1. \quad x = a + x', \quad y = y'$$

haben.

Lassen wir jetzt die secundäre Ordinatenaxe mit der primitiven Ordinatenaxe zusammenfallen, und nehmen die secundäre Abscissenaxe der primitiven Abscissenaxe parallel; so ist, wenn wir jetzt die primitiven Coordinaten des neuen Anfangs durch 0, b bezeichnen, offenbar ganz auf dieselbe Art wie vorher

$$2. \quad x = x', \quad y = b + y'.$$

Nehmen wir nun aber die beiden secundären Axen den beiden primitiven Axen bloß parallel an, nämlich die secundäre Abscissenaxe der primitiven Abscissenaxe, die secundäre Ordinatenaxe der primitiven Ordinatenaxe, und nehmen die positiven und negativen secundären Coordinaten von dem secundären Anfangspunkte an nach denselben Seiten hin, wie die entsprechenden positiven und negativen primitiven Coordinaten vom primitiven Anfangspuncte an; so ist, wenn wir die primitiven und secundären Coordinaten des beliebigen Punktes M wieder durch x, y und x', y', die primitiven Coordinaten des secundären Anfangs aber durch a, b bezeichnen, wie aus (1.) und (2.) auf der Stelle folgt, in völliger Allgemeinheit

$$3. \quad x = a + x', \quad y = b + y'.$$

5. Durch den Anfangspunkt **O** des primitiven Axensystems denke man sich jetzt eine beliebige gerade Linie gezogen; so kann dieselbe gegen die beiden Axen, deren positive Theile in den Figuren immer durch **Ox** und **Oy** bezeichnet werden sollen, offenbar bloß eine der beiden in Fig. 32. dargestellten Lagen haben. Denkt man sich nun durch beliebige Punkte $M, M_1, M_2, \ldots$; $M', M'_1, M'_2, \ldots$ dieser Linie Ordinaten gezogen; so ist in dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle:

$$\left.\begin{array}{l} +ON : +M'N \\ = +ON_1 : +M_1N_1 \\ = +ON_2 : +M_2N_2 \\ = +ON_3 : +M_3N_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -ON' : -M'N' \\ = -ON'_1 : -M'_1N'_1 \\ = -ON'_2 : -M'_2N'_2 \\ = -ON'_3 : -M'_3N'_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

und im zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist:

$$\left.\begin{array}{l} +ON : -MN \\ = +ON_1 : -M_1N_1 \\ = +ON_2 : -M_2N_2 \\ = +ON_3 : -M_3N_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -ON' : +M'N' \\ = -ON'_1 : +M'_1N'_1 \\ = -ON'_2 : +M'_2N'_2 \\ = -ON'_3 : +M'_3N'_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Hieraus sieht man, daß für jeden Punkt einer beliebigen durch den Anfang gehenden geraden Linie das Verhältniß der Abscisse zur Ordinate ein constantes Verhältniß ist. Setzen wir also dieses constante Verhältniß $= 1 : A$, und bezeichnen die beiden Coordinaten eines jeden Punktes einer durch den Anfang gehenden geraden Linie durch x, y; so ist in völliger Allgemeinheit

$$1 : A = x : y ,$$

d. i.

$$4. \quad y = Ax .$$

Diese Gleichung, durch welche die zwischen den beiden Coordinaten eines jeden Punktes einer durch den Anfang gehenden geraden Linie Statt findende allgemeine Relation analytisch dargestellt wird, nennt man daher die Gleichung einer durch den Anfang gehenden geraden Linie.

Aus dem Vorhergehenden erhellet auch, daß, wenn $y = Ax$ und $y = A'x$ die Gleichungen zweier durch den Anfang gehenden geraden Linien sind, welche den beiden in unserer Figur dargestellten Fällen entsprechen, die Größen **A** und **A'** jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen haben.

6. Um nun die Größe **A** in der Gleichung (4.) näher zu bestimmen, wollen wir den Coordinatenwinkel durch α, den zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel dagegen, welchen der oberhalb der Abscissenaxe liegende Theil der durch den Anfang gehenden geraden Linie mit dem positiven Theile der Abscissenaxe einschließt, durch φ bezeichnen. Dann ist in dem ersten der beiden

in Fig. 32. dargestellten Fälle nach einem sehr bekannten trigonometrischen Satze, wie auf der Stelle erhellen wird,

$$ON : MN = \sin(\alpha - \varphi) : \sin\varphi$$

oder

$$+ON : +MN = \sin(\alpha - \varphi) : \sin\varphi ,$$

oder

$$\frac{+MN}{+ON} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} ,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{+MN}{+ON} = A$$

ist,

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} .$$

In dem zweiten der beiden in Fig. 32. dargestellten Fälle ist dagegen offenbar

$$ON : MN = \sin(\varphi - \alpha) : \sin(180° - \varphi)$$

oder

$$+ON : -MN = \sin(\alpha - \varphi) : \sin\varphi ,$$

oder

$$\frac{-MN}{+ON} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} ,$$

und folglich, weil in diesem Falle

$$\frac{-MN}{+ON} = A$$

ist, wieder

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} .$$

Also ist immer

$$5. \quad A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}, \quad y = Ax = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} x .$$

Sind die beiden Axen auf einander senkrecht, d. i. der Coordinatenwinkel ein rechter; so ist $\alpha = 90°$, $\sin(\alpha - \varphi) = \cos\varphi$, und folglich

$$6. \quad A = \tang\varphi, \quad y = Ax = x \tang\varphi .$$

φ ist, was man wohl zu merken hat, immer der von dem oberhalb der Abscissenaxe liegenden Theile der durch den Anfang gehenden geraden Linie mit dem positiven Theile der Abscissenaxe eingeschlossene $180°$ nicht übersteigende Winkel.

Zu bemerken ist noch, daß, wenn die durch den Anfang gehende gerade Linie mit der Abscissenaxe zusammenfällt, $\varphi = 0$, und folglich $A = 0$ ist. Fällt dagegen die durch den Anfang

gehende gerade Linie mit der Ordinatenaxe zusammen; so ist $\varphi = \alpha$, und man erhält also für **A** den Ausdruck

$$A = \frac{\sin \alpha}{o},$$

d. h. das Symbol des Unendlichen. Daher ist auch umgekehrt jede durch den Anfang gehende gerade Linie, in deren Gleichung der constante Coefficient A durch das Symbol des Unendlichen dargestellt wird, als mit der Ordinatenaxe zusammenfallend zu betrachten.

7. Um nun auch die allgemeine Gleichung einer beliebigen nicht durch den Anfang gehenden geraden Linie zu finden, denke man sich durch einen beliebigen Punkt **O'** derselben zwei neue mit den primitiven parallele Axen gelegt, und bezeichne die Coordinaten in Bezug auf dieses neue Axensystem durch x', y', die primitiven Coordinaten des Punktes **O'** aber durch a, b; so ist nach (4.)

$$y' = Ax'.$$

Nach (3.) ist aber

$$x = a + x',\ y = b + y';\ x' = x - a,\ y' = y - b.$$

Also ist

$$7.\quad y - b = A(x - a),$$

oder

$$8.\quad y = Ax + b - Aa,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$9.\quad b - Aa = B$$

setzen,

$$10.\quad y = Ax + B$$

die gesuchte Gleichung jeder beliebigen geraden Linie. Für $x = o$ wird $y = B$, woraus man sieht, daß die Constante **B** jederzeit die Ordinate des Durchschnittspunkts der geraden Linie mit der Ordinatenaxe ist. Bezeichnet α wie vorher den Coordinatenwinkel für das primitive Axensystem; so ist α natürlich auch der Coordinatenwinkel für das secundäre Axensystem. Also ist nach (5.)

$$A = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)},$$

und der Winkel φ wird jederzeit erhalten, wenn man durch einen beliebigen Punkt der geraden Linie, deren Gleichung gesucht wird, zwei mit den primitiven parallele Axen legt, und den zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel nimmt, unter welchem der oberhalb der neuen Abscissenaxe liegende Theil der geraden Linie gegen den positiven Theil der Abscissenaxe geneigt ist. Zu dem Punkte der geraden Linie, deren Gleichung gesucht wird, durch welchen man die beiden neuen den primitiven parallelen Axen legt, wählt man gewöhnlich, und in der That auch am Einfachsten den Punkt, in welchem die gerade Linie die Abscis-

senaxe schneidet, vorausgesetzt nämlich, daß es einen solchen Durchschnittspunkt giebt und die gerade Linie also nicht mit der Abscissenaxe parallel ist. Für $\alpha = 90°$ ist $A = \text{tang}\,\varphi$. Die völlig entwickelte Gleichung jeder geraden Linie ist also für einen beliebigen Coordinatenwinkel

$$11.\quad y = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}x + B,$$

und, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist,

$$12.\quad y = x\,\text{tang}\,\varphi + B.$$

8. Für zwei gerade Linien, deren Gleichungen

$$y = Ax + B,\quad y = A'x + B'$$

sind, und

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)},\quad A' = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')}$$

ist, muß, wenn diese beiden geraden Linien einander parallel sind, offenbar $\varphi = \varphi'$, und folglich $A = A'$ seyn. Dies vorausgesetzt, kann man nun auch leicht die folgende Aufgabe auflösen:

Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes seyen nämlich x', y', und

$$y = Ax + B$$

sey die Gleichung der gegebenen geraden Linie. Ist nun

$$y = A'x + B'$$

die Gleichung der gesuchten geraden Linie, so muß wegen der Bedingungen der Aufgabe $A' = A$ seyn, so daß also hierdurch A' bestimmt ist. Zu der Bestimmung der Constante B' führt die zweite Bedingung der Aufgabe, daß nämlich die gesuchte gerade Linie durch den gegebenen Punkt $(x'y')$ gehen soll. Wegen dieser Bedingung muß nämlich

$$y' = A'x' + B',$$

oder, weil $A' = A$ ist,

$$y' = Ax' + B',$$

folglich

$$B' = y' - Ax'$$

seyn. Daher ist die gesuchte Gleichung

$$13.\quad y = Ax + y' - Ax'.$$

Noch etwas einfacher kann man die Rechnung bei dieser Auflösung auf folgende Art führen. Weil nämlich die gesuchte gerade Linie durch den Punkt $(x'y')$ gehen soll, so hat man die beiden Gleichungen

$$y = A'x + B',\quad y' = A'x' + B',$$

aus denen durch Subtraction auf der Stelle

$$y - y' = A'(x - x')$$

folgt. Weil nun ganz auf ähnliche Art wie vorher $A' = A$ seyn muß; so ist

$$14. \quad y - y' = A(x - x') .$$

Daß diese Gleichung mit der Gleichung (13.) identisch ist, fällt sogleich in die Augen.

9. Wir wollen nun den von zwei durch die Gleichungen

$$y = Ax + B, \quad y = A'x + B'$$

gegebenen geraden Linien eingeschlossenen Winkel Θ zu bestimmen suchen. Legt man durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der beiden in Rede stehenden geraden Linien zwei mit den primitiven Axen parallele Axen; so erhellet, wenn φ und φ' ihre vorige Bedeutung behalten, auf der Stelle, daß

$$\Theta = \pm(\varphi - \varphi') ,$$

und in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $\varphi > \varphi'$ oder $\varphi < \varphi'$ ist. Die Beurtheilung aber, ob das Erste oder das Zweite Statt findet, kann auf folgende Art angestellt werden, wobei man zu beachten hat, daß immer

$$A = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}, \quad A' = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')}$$

ist.

I. Zuerst wollen wir annehmen, daß A und A' gleiche Vorzeichen haben. Ist dann $A > A'$, so ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} > \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')} ,$$

und folglich in diesem Falle

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi} < \frac{\sin(\alpha - \varphi')}{\sin\varphi'} ,$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$\sin\alpha\cot\varphi - \cos\alpha < \sin\alpha\cot\varphi' - \cos\alpha ,$$

und folglich

$$\sin\alpha\cot\varphi < \sin\alpha\cot\varphi' ;$$

also, weil $\sin\alpha$ offenbar immer positiv ist, $\cot\varphi < \cot\varphi'$, und folglich, weil keiner der Winkel φ und φ' zwei rechte Winkel übersteigt, $\varphi > \varphi'$.

II. Ferner wollen wir annehmen, daß A und A' ungleiche Vorzeichen haben. Ist dann $A > A'$, so ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} > \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha - \varphi')} ,$$

und folglich in diesem Falle

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} > \frac{\sin(\alpha-\varphi')}{\sin\varphi'},$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$\sin\alpha\cot\varphi - \cos\alpha > \sin\alpha\cot\varphi' - \cos\alpha,$$

oder

$$\sin\alpha\cot\varphi > \sin\alpha\cot\varphi',$$

und folglich, weil $\sin\alpha$ immer positiv ist, $\cot\varphi > \cot\varphi'$; also, weil keiner der Winkel φ, φ' zwei rechte Winkel übersteigt, $\varphi < \varphi'$.

Man sieht also, daß, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}'$ gleiche Vorzeichen haben, und $\mathbf{A} \gtrless \mathbf{A}'$ ist, jederzeit auch $\varphi \gtrless \varphi'$ ist. Haben aber $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}'$ ungleiche Vorzeichen, so ist, wenn $\mathbf{A} \gtrless \mathbf{A}'$ ist, jederzeit $\varphi \lessgtr \varphi'$. In jedem Falle wird man aber demnach immer leicht beurtheilen können, ob man in der Gleichung

$$\Theta = \pm(\varphi - \varphi')$$

das obere oder das untere Zeichen zu nehmen hat.

Da nun

$$\mathbf{A} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}, \quad \mathbf{A}' = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\alpha-\varphi')}$$

ist; so ist

$$\mathbf{A} = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tang}\varphi}, \quad \mathbf{A}' = \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tang}\varphi'},$$

und folglich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathbf{A}\sin\alpha}{1+\mathbf{A}\cos\alpha}, \quad \operatorname{tang}\varphi' = \frac{\mathbf{A}'\sin\alpha}{1+\mathbf{A}'\cos\alpha}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\operatorname{tang}(\varphi-\varphi') = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi'}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'}$$

ist; so ist, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\operatorname{tang}(\varphi-\varphi') = \frac{(\mathbf{A}-\mathbf{A}')\sin\alpha}{1+(\mathbf{A}+\mathbf{A}')\cos\alpha+\mathbf{A}\mathbf{A}'}.$$

Also ist

$$15.\quad \operatorname{tang}\Theta = \pm\frac{(\mathbf{A}-\mathbf{A}')\sin\alpha}{1+(\mathbf{A}+\mathbf{A}')\cos\alpha+\mathbf{A}\mathbf{A}'}.$$

Haben $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}'$ gleiche Vorzeichen; so hat man, wie aus dem Obigen hervorgeht, in dieser Gleichung das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $\mathbf{A} >$ oder $<$ als $\mathbf{A}'$ ist. Haben aber $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}'$ entgegengesetzte Vorzeichen; so hat man das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $\mathbf{A} <$ oder $>$ als $\mathbf{A}'$ ist.

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter Winkel, so ist $\alpha = 90°$, und folglich in diesem Falle

$$16.\quad \text{tang}\,\Theta = \pm\frac{A - A'}{1 + AA'}.$$

Die Regel wegen der Vorzeichen bleibt dieselbe wie vorher.

10. Nun ist es auch leicht, die Bedingung zu finden, unter der zwei durch die Gleichungen

$$y = Ax + B,\quad y = A'x + B'$$

gegebene gerade Linien auf einander senkrecht stehen. Sollen nämlich diese beiden Linien auf einander senkrecht stehen; so muß $\Theta = 90°$, $\cot\Theta = 0$, also nach (15.)

$$17.\quad 1 + (A + A')\cos\alpha + AA' = 0,$$

und folglich, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter Winkel ist,

$$18.\quad 1 + AA' = 0,\quad AA' = -1$$

seyn.

Soll man nun die Gleichung einer geraden Linie finden, welche durch den gegebenen Punkt $(x'y')$ geht, und auf der durch die Gleichung

$$y = Ax + B$$

gegebenen geraden Linien senkrecht steht;

so sey $y = A'x + B'$ die gesuchte Gleichung. Weil nun die dieser Gleichung entsprechende Linie durch den Punkt $(x'y')$ gehen soll; so muß $y' = A'x' + B'$ seyn, und man erhält folglich auf der Stelle durch Subtraction

$$y - y' = A'(x - x').$$

Nach dem Obigen muß aber auch

$$1 + (A + A')\cos\alpha + AA' = 0,$$

d. i.

$$A' = -\frac{1 + A\cos\alpha}{A + \cos\alpha}$$

seyn. Also ist die Gleichung des gesuchten Perpendikels

$$19.\quad y - y' = -\frac{1 + A\cos\alpha}{A + \cos\alpha}(x - x'),$$

oder für $\alpha = 90°$:

$$20.\quad y - y' = -\frac{1}{A}(x - x').$$

11. Seyen nun die beiden Punkte $(x'y')$ und $(x''y'')$ gegeben. Man soll auf der diese beiden Punkte verbindenden geraden Linie von dem Punkte $(x'y')$ aus ein Stück abschneiden, welches $\frac{n}{m}$ der ganzen die beiden gegebenen Punkte verbindenden Linie beträgt.

Die Coordinaten des Endpunkts des abzuschneidenden Stücks seyen x, y. Legt man durch diesen Punkt zwei mit den primitiven Axen parallele Axen, und bezeichnet die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte in Bezug auf diese beiden Axen durch X', Y' und X'', Y''; so ist nach (3.)

$$x' = x + X',\ y' = y + Y';\ x'' = x + X'',\ y'' = y + Y'';$$
$$X' = x' - x,\ Y' = y' - y;\ X'' = x'' - x,\ Y'' = y'' - y.$$

Nun ist aber, wie sogleich aus den bekannten Sätzen von der Aehnlichkeit der Dreiecke erhellen wird,

$$-X' : X'' = n : m - n,$$
$$-Y' : Y'' = n : m - n;$$

d. i.

$$(m - n)X' + nX'' = 0,\ (m - n)Y' + nY'' = 0;$$

folglich

$$(m - n)(x' - x) + n(x'' - x) = 0,$$
$$(m - n)(y' - y) + n(y'' - y) = 0;$$

und hieraus

$$21.\quad \begin{cases} x = \dfrac{(m-n)x' + nx''}{m}, \\ y = \dfrac{(m-n)y' + ny''}{m}. \end{cases}$$

Sind x, y die Coordinaten des Mittelpunktes der die beiden gegebenen Punkte mit einander verbindenden geraden Linie; so ist

$$22.\quad x = \tfrac{1}{2}(x' + x''),\ y = \tfrac{1}{2}(y' + y'').$$

12. Die Entfernung e der beiden Punkte (xy) und (x'y') von einander zu finden.

Durch den Punkt (xy) lege man zwei den primitiven parallele Axen, und bezeichne die Coordinaten des Punktes (x' y') in Bezug auf diese neuen Axen durch X', Y'; so ist nach bekannten trigonometrischen Sätzen, wenn X' und Y' gleiche Vorzeichen haben,

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 - 2X'Y'\cos(180^\circ - \alpha)$$
$$= X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha;$$

und, wenn X' und Y' ungleiche Vorzeichen haben, ist:

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha.$$

Also ist immer

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha,$$

oder, indem man die Quadratwurzel stets positiv nimmt,

$$e = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + 2X'Y'\cos\alpha}.$$

Nun ist aber nach (3.)

$$x' = x + X',\ y' = y + Y'.$$

Also ist

$$23.\quad e = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(y-y')\cos\alpha},$$

und folglich für $\alpha = 90^\circ$

$$24.\quad e = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

13. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier durch die Gleichungen

$$y = Ax + B,\quad y = A'x + B'$$

gegebenen geraden Linien zu finden.

Weil der Durchschnittspunkt zweier geraden Linien ein diesen beiden geraden Linien gemeinschaftlicher Punkt ist; so müssen die Coordinaten desselben den Gleichungen der beiden geraden Linien zugleich genügen, und man wird diese Coordinaten also offenbar erhalten, wenn man x und y aus den beiden Gleichungen

$$y = Ax + B,\quad y = A'x + B'$$

durch gewöhnliche algebraische Elimination bestimmt. Das Resultat der sehr einfachen Rechnung ist

$$25.\quad x = -\frac{B-B'}{A-A'},\quad y = \frac{AB' - A'B}{A-A'}.$$

14. Die Entfernung eines durch seine Coordinaten gegebenen Punktes $(x'y')$ von einer durch die Gleichung $y = Ax + B$ gegebenen geraden Linie zu finden, wenn wir den Coordinatenwinkel der Einfachheit wegen $= 90^\circ$ setzen.

Die Gleichung des von dem gegebenen Punkte auf die gegebene gerade Linie gefällten Perpendikels ist nach (20.)

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x - x'),$$

oder

$$y = -\frac{1}{A}x + \frac{Ay' + x'}{A}.$$

Folglich erhält man nach (25.) für die Coordinaten des Durchschnittspunktes der gegebenen geraden Linien und des auf sie gefällten Perpendikels:

$$x = \frac{Ay' + x' - AB}{1 + A^2},\quad y = \frac{A(Ay' + x') + B}{1 + A^2}.$$

Also ist

$$x - x' = -\frac{A(Ax' - y' + B)}{1 + A^2},\quad y - y' = \frac{Ax' - y' + B}{1 + A^2},$$

und folglich nach (24.), wenn wir die Länge des gesuchten Perpendikels $= p$ setzen,

$$p^2 = \frac{(Ax' - y' + B)^2}{1 + A^2},$$

oder

$$26. \quad p = \pm \frac{Ax' - y' + B}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Hat die Gleichung der gegebenen geraden Linie die Form

$$Ay + Bx + C = 0;$$

so ist, wie man leicht findet,

$$26^*. \quad p = \pm \frac{Ay' + Bx' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Da p seiner Natur nach eine positive Größe ist; so ist, wenn man die Quadratwurzel im Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung 26. stets positiv nimmt, in dieser Gleichung jederzeit das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die Größe $Ax' - y' + B$ positiv oder negativ ist.

14. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch die beiden durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte $(x'\,y')$ und $(x''\,y'')$ geht.

Ist $y = Ax + B$ die gesuchte Gleichung; so hat man, weil die derselben entsprechende Linie durch die beiden Punkte $(x'\,y')$, $(x''\,y'')$ gehen soll, zur Bestimmung der Constanten A und B die beiden Gleichungen

$$y' = Ax' + B, \quad y'' = Ax'' + B.$$

Entwickelt man A und B aus diesen beiden Gleichungen durch gewöhnliche algebraische Elimination; so erhält man

$$27. \quad A = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}.$$

Also ist die gesuchte Gleichung

$$28. \quad y = \frac{y' - y''}{x' - x''}x + \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''},$$

oder

$$29. \quad y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

oder

$$30. \quad (x' - x'')y - (y' - y'')x - x'y'' + y'x'' = 0,$$

oder

$$31. \quad (x' - x'')(y - y') = (y' - y')(x - x'),$$

oder

$$32. \quad (x' - x')(y - y') - (y' - y'')(x - x') = 0,$$

oder

$$33. \quad \frac{x' - x''}{y' - y''} = \frac{x - x'}{y - y'}.$$

II. Die gerade Linie im Raume.

15. Wir denken uns jetzt drei durch einen Punkt **O** gehende auf einander senkrechte gerade Linien, und nennen dieselben die Axen, nämlich die eine die Axe der x, die andere die Axe der y, und die dritte die Axe der z. Jede dieser Axen wird durch den Punkt **O**, den Anfang, in zwei Theile getheilt, von denen wir bei jeder der drei Axen den einen als den positiven, den andern als den negativen Theil annehmen. Die positiven Theile der drei Axen wollen wir uns immer durch **Ox**, **Oy**, **Oz** bezeichnet denken. Die drei Axen bestimmen drei auf einander senkrechte Ebenen, welche die Coordinatenebenen genannt werden, und zwar heißen diese Ebenen, jenachdem sie von den Axen der x und y, der x und z, der y und z bestimmt werden, respective die Ebenen der xy, xz, yz. Jeder der drei Coordinatenebenen legt man eine positive und eine negative Seite bei, und nennt jederzeit die Seite die positive oder die negative, auf welcher der positive oder negative Theil der Axe liegt, welche auf der in Rede stehenden Coordinatenebene senkrecht ist, also nicht in dieser Coordinatenebene liegt. Fällt man von einem beliebigen Punkte im Raume auf eine der drei Coordinatenebenen ein Perpendikel; so wird dasselbe jederzeit als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem es auf der positiven oder negativen Seite der in Rede stehenden Coordinatenebene liegt. Die drei von einem beliebigen Punkte im Raume auf die drei Coordinatenebenen gefällten Perpendikel, mit Rücksicht auf die Zeichen, welche ihnen nach dem Vorhergehenden zukommen, werden die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes genannt, und durch x, y, z bezeichnet, jenachdem sie respective auf den Ebenen der yz, xz, xy senkrecht sind. Daß durch seine drei Coordinaten die Lage eines Punktes im Raume vollständig bestimmt wird, bedarf keiner weitern Erläuterung. Auch erhellet auf der Stelle, daß, wenn x, y, z und x′, y′, z′ die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf zwei Systeme einander paralleler Coordinatenebenen, und a, b, c die Coordinaten des neuen Anfangs in Bezug auf das primitive System sind, jederzeit

$$34.\quad x = a + x',\quad y = b + y',\quad z = c + z'$$

ist. Der Beweis kann auf ganz ähnliche Art wie in (4.) geführt werden. Auch kann man den Artikel Coordinaten (3.) i. d. Z. vergleichen.

16. Wenn man von einem Punkte im Raume auf eine beliebige Ebene ein Perpendikel fällt; so heißt der Fußpunkt dieses Perpendikels die Projection des gegebenen Punktes im Raume auf der in Rede stehenden Ebene. Die stetige Folge der Projectionen aller Punkte einer beliebigen geraden oder krummen Linie im Raume auf einer beliebigen Ebene heißt die Projection dieser Linie auf der in Rede stehenden Ebene, wobei

auf der Stelle erhellet, daß die Projection einer geraden Linie jederzeit selbst eine gerade Linie ist. Sind nun x, y, z wieder die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume; so erhellet auf der Stelle, daß die Coordinaten der drei Projectionen desselben auf der Ebene der xy, xz, yz respective x, y, 0; x, 0, z; 0, y, z sind. Hieraus und aus (10.) ergiebt sich nun unmittelbar, daß, wenn x, y, z die drei Coordinaten jedes beliebigen Punktes einer geraden Linie im Raume bezeichnen, die Gleichungen der drei Projectionen dieser geraden Linie auf den drei Coordinatenebenen

$$35.\quad y = Ax + a,\quad x = Bz + b,\quad z = Cy + c$$

sind, und daß also auch zwischen den drei Coordinaten eines jeden Punktes einer geraden Linie im Raume immer drei Gleichungen von dieser Form Statt finden. Hieraus erhellet auch, daß die sechs constanten Größen A, B, C, a, b, c nicht ganz von einander unabhängig sind. Eliminirt man nämlich aus den beiden ersten Gleichungen die Größe x; so erhält man

$$y = ABz + Ab + a,$$

und hat folglich die beiden für jedes y und z Statt findenden Gleichungen

$$y = ABz + Ab + a,\quad y = \frac{1}{C}z - \frac{c}{C},$$

woraus, da diese beiden Gleichungen für jedes y und z gelten, auf der Stelle

$$36.\quad \begin{cases} ABC = 1 \\ ACb + Ca + c = 0 \end{cases}$$

folgt, so daß also, wenn vier der Größen A, B, C, a, b, c gegeben sind, die beiden andern mittelst dieser Gleichungen jederzeit gefunden werden können. Bezeichnet man die drei Winkel, welche die drei Projectionen der gegebenen Linie im Raume auf den Ebenen der xy, xz, yz mit den Axen der x, z, y, einschließen, durch φ, φ', φ''; so ist bekanntlich

$$37.\quad A = \text{tang}\,\varphi,\quad B = \text{tang}\,\varphi',\quad C = \text{tang}\,\varphi'',$$

und folglich nach (36.) immer

$$38.\quad \text{tang}\varphi\,\text{tang}\varphi'\,\text{tang}\varphi'' = 1.$$

Aus den vorhergehenden analytischen, und auch durch einfache geometrische Betrachtungen erhellet, daß die Gleichungen zweier Projectionen einer geraden Linie im Raume zur vollständigen Bestimmung derselben hinreichen. Im Folgenden wollen wir hierzu immer die Projectionen auf den Ebenen der xz und yz wählen, und wollen deren Gleichungen von jetzt an immer unter der Form

$$39.\quad x = Az + a,\quad y = Bz + b$$

darstellen. Diese beiden Gleichungen nennt man gewöhnlich überhaupt die Gleichungen der geraden Linie im Raume.

17. Sind zwei gerade Linien im Raume, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

sind, einander parallel; so sind, wie aus den einfachsten stereometrischen Sätzen erhellet, jederzeit auch die Projectionen derselben auf den Ebenen der xz und yz einander parallel, und es ist folglich nach dem Obigen für die beiden in Rede stehenden einander parallelen Linien jederzeit

$$40. \quad A = A', \quad B = B'.$$

Hierdurch sind wir nun in den Stand gesetzt, die folgende Aufgabe aufzulösen:

Wenn die Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

einer geraden Linie im Raume und die Coordinaten x', y', z' eines Punktes gegeben sind; die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche durch den gegebenen Punkt geht, und der gegebenen geraden Linie parallel ist.

Die Gleichungen der gesuchten geraden Linie seyen

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'.$$

Weil diese Linie durch den Punkt $(x'y'z')$ gehen soll; so ist

$$x' = A'z' + a', \quad y' = B'z' + b',$$

und folglich durch Subtraction

$$x - x' = A'(z - z'), \quad y - y' = B'(z - z').$$

Weil ferner die gesuchte Linie der gegebenen parallel seyn soll; so ist nach (40.)

$$A' = A, \quad B' = B,$$

und folglich sind

$$41. \quad \begin{cases} x - x' = A(z - z') \\ y - y' = B(z - z') \end{cases}$$

die gesuchten Gleichungen.

18. Die Entfernung der beiden durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ von einander zu finden.

Man lege durch den Punkt (xyz) drei mit den primitiven parallele Coordinatenebenen und bezeichne die Coordinaten des Punktes $(x'y'z')$ in Bezug auf diese drei neuen Coordinatenebenen durch X', Y', Z'; so ist nach (34.)

$$x' = x + X', \quad y' = y + Y', \quad z' = z + Z';$$

oder

$$X' = x' - x, \quad Y' = y' - y, \quad Z' = z' - z.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung der Projection des Punktes $(x'y'z')$ auf der Ebene der (XY) von dem Punkte (xyz), welcher der Anfang des neuen Systems ist, durch E; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$e^2 = E^2 + Z'^2,$$

und, wie eben so leicht erhellet, oder auch nach (24.),

$$E^2 = X'^2 + Y'^2.$$

Also ist

$$e^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2,$$

oder nach dem Obigen

$$e^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

oder auch

$$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

und folglich

$$42. \quad e = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

wo man die Quadratwurzel immer positiv zu nehmen hat.

19. Unter dem von zwei geraden Linien im Raume, auch wenn dieselben sich nicht wirklich schneiden, eingeschlossenen Winkel wollen wir im Folgenden den Winkel verstehen, welchen zwei durch den Anfang mit den in Rede stehenden Linien parallel gezogene Linien mit einander einschließen, und legen uns nun, dies vorausgesetzt, die folgende Aufgabe vor:

Wenn die Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

zweier geraden Linien im Raume gegeben sind, den von diesen beiden Linien eingeschlossenen Winkel V zu bestimmen.

Die Gleichungen der durch den Anfang, dessen Coordinaten alle drei $= 0$ sind, mit den beiden gegebenen Linien parallel gezogenen Linien sind nach (41.)

$$x = Az, \quad y = Bz$$

und

$$x = A'z, \quad y = B'z.$$

Schneiden wir nun auf diesen beiden Linien von dem Anfange aus zwei beliebige Stücke Θ, Θ' ab, und bezeichnen deren Endpunkte durch (xyz) und $(x'y'z')$, die Entfernung dieser beiden Punkte von einander aber durch e; so ist nach einer sehr bekannten trigonometrischen Formel

$$e^2 = \Theta^2 + \Theta'^2 - 2\Theta\Theta' \cos V.$$

Nun ist aber nach (42.)

$$\Theta^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \Theta'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$
$$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Also ist

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)} \cdot \cos V,$$

und folglich nach leichter Rechnung

$$43. \quad \cos V = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)}},$$

wobei aber zu bemerken ist, daß man die Quadratwurzel im Nenner positiv und negativ nehmen kann, wodurch V zwei Werthe erhält, die sich zu 180° ergänzen, wie es seyn muß, da jede zwei sich schneidende Linien im Allgemeinen zwei von einander verschiedene Winkel einschließen. Nun ist aber offenbar

$$x = Az, \; y = Bz; \; x' = A'z', \; y' = B'z';$$

also ist

$$\cos V = \frac{(1 + AA' + BB')zz'}{z\sqrt{1 + A^2 + B^2} \cdot z'\sqrt{1 + A'^2 + B'^2}},$$

d. i.

$$44. \quad \cos V = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A'^2 + B'^2)}},$$

die Quadratwurzel immer positiv und negativ genommen. Leicht ergiebt sich hieraus auch ferner

$$45. \quad \sin V = \frac{\sqrt{(A - A')^2 + (B - B')^2 + (AB' - A'B)^2}}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A' + B'^2)}},$$

$$46. \quad \operatorname{tang} V = \frac{\sqrt{(A - A')^2 + (B - B')^2 + (AB' - A'B)^2}}{1 + AA' + BB'},$$

$$47. \quad \cot V = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(A - A')^2 + (B - B')^2 + (AB' - A'B)^2}}.$$

Soll der von zwei geraden Linien im Raume, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \; y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a', \; y = B'z + b'$$

sind, eingeschlossene Winkel ein rechter Winkel seyn; so muß $V = 90°$, $\cos V = 0$, also

$$48. \quad 1 + AA' + BB' = 0$$

seyn.

20. Wir wollen uns jetzt zwei beliebige von dem Anfange ausgehende gerade Linien denken, und den von denselben eingeschlossenen zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel durch V bezeichnen. Nehmen wir nun in diesen beiden Linien wieder

zwei beliebige Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ an, und bezeichnen deren Entfernung von einander durch e, ihre Entfernungen von dem Anfange aber durch Θ und Θ'; so ist

$$e^2 = \Theta^2 + \Theta'^2 - 2\Theta\Theta'\cos V.$$

Bezeichnen wir ferner die von den beiden in Rede stehenden geraden Linien mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden, Winkel durch α, β, γ und α', β', γ'; so ist, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit

$$x = \Theta\cos\alpha,\quad y = \Theta\cos\beta,\quad z = \Theta\cos\gamma;$$
$$x' = \Theta'\cos\alpha',\quad y' = \Theta'\cos\beta',\quad z' = \Theta'\cos\gamma'.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\Theta^2 = x^2 + y^2 + z^2,\quad \Theta'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$
$$e^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Also ist

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\Theta\Theta'\cos V,$$

oder

$$xx' + yy' + zz' = \Theta\Theta'\cos V,$$

und folglich

$$\Theta\Theta'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = \Theta\Theta'\cos V,$$

oder

$$49.\quad \cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

ein ebenfalls sehr merkwürdiger Ausdruck.

Läßt man die beiden vom Anfange ausgehenden geraden Linien zusammenfallen; so wird $V = 0$, $\cos V = 1$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, und folglich

$$50.\quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

welche Gleichung also immer Statt findet, wenn α, β, γ die von einer beliebigen vom Anfange ausgehenden geraden Linie mit den positiven Theilen der drei Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden, Winkel bezeichnen.

21. Seyen jetzt wieder

$$x = Az + a,\quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a,\quad y = B'z + b'$$

die Gleichungen zweier geraden Linien im Raume. Schneiden sich nun diese geraden Linien in einem gewissen Punkte, dessen Coordinaten x', y', z' sind; so finden zwischen diesen Coordinaten die vier Gleichungen

$$x' = Az' + a,\quad y' = Bz' + b;$$
$$x' = A'z' + a',\quad y' = B'z' + b'$$

Statt. Aus diesen vier Gleichungen folgt durch Subtraction

$$0 = (A - A')z' + a - a',$$
$$0 = (B - B')z' + b - b'.$$

Ist nun $z' = 0$, so ist

$$a - a' = 0, \quad b - b' = 0,$$

und folglich

$$(A-A')(b-b') - (B-B')(a-a') = 0.$$

Ist aber z' nicht $= 0$, so hat man wegen der beiden obigen Gleichungen

$$-(A - A')z' = a - a'$$
$$b - b' = -(B-B')z',$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt,

$$(A-A')(b-b')z' = (B-B')(a-a')z';$$

also, weil z' nicht $= 0$ ist,

$$(A-A')(b-b') = (B-B')(a-a'),$$

oder

$$(A-A')(b-b') - (B-B')(a-a') = 0.$$

Wenn also die beiden geraden Linien im Raume, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

und

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

sind, sich schneiden; so ist immer

$$51. \quad (A-A')(b-b') - (B-B')(a-a') = 0.$$

22. Es seyen die Coordinaten eines beliebigen Punktes $(x'y'z')$ im Raume und die Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

einer geraden Linie im Raume gegeben; man soll die Gleichungen des von dem gegebenen Punkte auf diese Linie gefällten Perpendikels finden.

Die gesuchten Gleichungen seyen

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b';$$

so hat man, weil das Perpendikel durch den Punkt $(x'y'z')$ gehen soll, und nach (48.) und (51.), zur Bestimmung von A', B', a', b' folgende Gleichungen:

$$x' = A'z' + a', \quad y' = B'z' + b';$$
$$1 + AA' + BB' = 0;$$
$$(A-A')(b-b') - (B-B')(a-a') = 0.$$

Durch Subtraction der beiden ersten Gleichungen von den Gleichungen

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

erhält man

$$x-x'=A'(z-z'),\quad y-y'=B'(z-z')$$

oder

$$A'=\frac{x-x'}{z-z'},\quad B'=\frac{y-y'}{z-z'},$$

und folglich

$$1+A\frac{x-x'}{z-z'}+B\frac{y-y'}{z-z'}=0,$$

oder

$$A(x-x')+B(y-y')+z-z'=0.$$

Ferner ist

$$a'=x'-A'z',\quad b'=y'-B'z',$$

und folglich wegen der dritten der drei obigen Hauptgleichungen

$$\left.\begin{matrix}(A-A')(b-y'+B'z')\\-(B-B')(a-x'+A'z')\end{matrix}\right\}=0;$$

also

$$\left.\begin{matrix}\left\{A-\frac{x-x'}{z-z'}\right\}\left\{b-y'+\frac{y-y'}{z-z'}z'\right\}\\-\left\{B-\frac{y-y'}{z-z'}\right\}\left\{a-x'+\frac{x-x'}{z-z'}z'\right\}\end{matrix}\right\}=0,$$

oder

$$\begin{aligned}&(x-x')(b-y'+Bz')-(y-y')(a-x'+Az')\\&+(z-z')\{B(a-x')-A(b-y')\}=0.\end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen

$$52.\quad\begin{cases}A(x-x')+B(y-y')+z-z'=0,\\(b-y'+Bz')(x-x')-(a-x'+Az')(y-y')\\\quad+\{B(a-x')-A(b-y')\}(z-z')=0,\end{cases}$$

bei deren weiteren Entwickelung wir uns jetzt nicht aufhalten wollen, können als die beiden Gleichungen des von dem gegebenen Punkte auf die gegebene gerade Linie gefällten Perpendikels angesehen werden.

23. Seyen die beiden Punkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$ durch ihre Coordinaten gegeben; man soll auf der diese beiden Punkte verbindenden geraden Linie von dem Punkte $(x'y'z')$ aus ein Stück abschneiden, welches $\frac{n}{m}$ der ganzen die beiden gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie beträgt.

Sind x, y, z die drei Coordinaten des Endpunktes des gesuchten Stücks; so erhellet, wenn man sich die, die beiden gegebenen Punkte verbindende gerade Linie nur in den drei durch sie gelegten auf den drei Coordinatenebenen senkrechten Ebenen liegend

vorstellt, aus (21.) auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Ausdrücke:

$$53.\quad \begin{cases} x = \dfrac{(m-n)x' + nx''}{m} \\ y = \dfrac{(m-n)y' + ny''}{m} \\ z = \dfrac{(m-n)z' + nz''}{m} \end{cases}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes der die beiden gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie sind:

$$54.\quad x = \tfrac{1}{2}(x' + x''),\quad y = \tfrac{1}{2}(y' + y''),\quad z = \tfrac{1}{2}(z' + z'').$$

24. Die beiden Punkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$ im Raume sind gegeben; man soll die Gleichungen der durch diese beiden Punkte gehenden geraden Linie finden.

Die gesuchten Gleichungen seyen

$$x = Az + a,\quad y = Bz + b;$$

so ist, weil die diesen Gleichungen entsprechende gerade Linie durch die beiden Punkte $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$ gehen soll,

$$x' = Az' + a,\quad y' = Bz' + b;$$
$$x'' = Az'' + a,\quad y'' = Bz'' + b;$$

folglich

$$x' - x'' = A(z' - z''),\quad y' - y'' = B(z' - z'');$$
$$A = \frac{x' - x''}{z' - z''},\quad B = \frac{y' - y''}{z' - z''}.$$

Ferner ist

$$x - x' = A(z - z'),\quad y - y' = B(z - z'),$$

und die gesuchten Gleichungen sind also:

$$54.\quad \begin{cases} x - x' = \dfrac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \\ y - y' = \dfrac{y' - y''}{z' - z''}(z - z'). \end{cases}$$

III. Die Ebene.

25. Die allgemeine Gleichung der Ebene in Bezug auf drei rechtwinklige Coordinatenebenen kann nach verschiedenen Methoden entwickelt werden, jenachdem man sich dieselbe auf die eine oder die andere Art entstanden denkt. Hier wird es genügen, auf zwei dieser Methoden hinzuweisen, mittelst welcher man, wie es uns scheint, mit vorzüglicher Leichtigkeit zu dem gesuchten Resultate gelangt.

Der ersten dieser beiden Methoden liegt die Bemerkung zum Grunde, daß eine gerade Linie, welche sich um einen Punkt

einer andern geraden Linie herum bewegt, indem sie gegen die letztere gerade Linie fortwährend unter einem rechten Winkel geneigt ist, bei ihrer Bewegung jederzeit eine Ebene beschreibt. Denken wir uns also durch einen beliebigen, aber bestimmten Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ, seyn mögen, in der Ebene, deren Gleichung gesucht wird, auf dieselbe ein Perpendikel errichtet. Die Gleichungen dieses Perpendikels seyen

$$X = GZ + g, \quad Y = HZ + h.$$

Die Coordinaten eines ganz beliebigen Punktes der in Rede stehenden Ebene seyen x, y, z, und

$$X = G'Z + g', \quad Y = H'Z + h'$$

seyen die Gleichungen der geraden Linie, welche die Punkte (xyz) und $(\alpha\beta\gamma)$ mit einander verbindet; so ist nach (54*.)

$$G' = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad H' = \frac{y-\beta}{z-\gamma}.$$

Nach (48.) ist aber

$$1 + GG' + HH' = 0,$$

und es findet also zwischen den Coordinaten x, y, z eines jeden Punktes in der in Rede stehenden Ebene die Gleichung

$$1 + G\frac{x-\alpha}{z-\gamma} + H\frac{y-\beta}{z-\gamma} = 0,$$

in welcher α, β, γ, G, H constante Größen, d. h. für alle x, y, z dieselben sind, Statt. Diese Gleichung, welche sich auch leicht auf die Form

$$G(x-\alpha) + H(y-\beta) + z - \gamma = 0,$$

oder

$$Gx + Hy + z - G\alpha - H\beta - \gamma = 0$$

bringen läßt, ist also die Gleichung der Ebene. Da man aber auf beiden Seiten dieser Gleichung noch mit einer beliebigen constanten Größe multipliciren kann; so ist klar, daß die allgemeine Gleichung der Ebene die Form

$$55. \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

hat.

Die zweite Methode, mittelst welcher man zu dieser allgemeinen Gleichung gelangen kann, beruhet auf der Bemerkung, daß, wenn man durch den Mittelpunkt einer, zwei beliebige Punkte im Raume mit einander verbindenden geraden Linie eine auf derselben senkrechte Ebene legt, jeder Punkt dieser Ebene von den beiden in Rede stehenden Punkten im Raume gleich weit entfernt ist, so daß man also eine Ebene auch als die stetige Folge von Punkten betrachten kann, deren jeder von zwei bestimmten Punkten im Raume gleich weit entfernt ist. Man denke sich nun wieder eine beliebige Ebene, nehme in derselben einen beliebigen Punkt an, errichte durch diesen Punkt auf die Ebene ein Perpendikel, und

schneide auf demselben von der Ebene an auf beiden Seiten derselben zwei beliebige, aber einander gleiche, Stücke ab, deren Endpunkte durch die Coordinaten α, β, γ und α', β', γ', welche im Folgenden als constante Größen zu betrachten sind, bestimmt seyn mögen. Sind nun x, y, z die Coordinaten eines ganz beliebigen Punktes in der Ebene; so sind nach (42.)

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

und

$$\sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2}$$

die Entfernungen dieses Punktes von den beiden Punkten $(\alpha\beta\gamma)$ und $(\alpha'\beta'\gamma')$, und nach der Natur der Ebene ist also für jeden Punkt (x y z) in ihr

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2},$$

oder

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2,$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l} 2(\alpha-\alpha')x + 2(\beta-\beta')y + 2(\gamma-\gamma')z \\ -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \end{array}\right\} = 0,$$

wodurch man folglich wieder unmittelbar zu der allgemeinen Gleichung

$$55. \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

der Ebene geführt wird.

Bemerkt muß endlich noch werden, daß man sich die Ebene auch entstanden denken kann, indem sich eine, sich stets parallel bleibende, gerade Linie so bewegt, daß sie fortwährend über eine andere gegebene gerade Linie hin gleitet. Auch diese Vorstellung führt zu der obigen allgemeinen Gleichung der Ebene, welches wir aber der Beschränktheit des Raumes wegen hier nicht weiter entwickeln.

26. Die Gleichungen der Durchschnittslinien einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ist, mit den Ebenen der xy, xz, yz erhält man offenbar, wenn man in der obigen Gleichung respective $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ setzt. Dadurch erhält man für die in Rede stehenden Durchschnittslinien auf der Stelle die Gleichungen:

$$56. \quad \begin{cases} Ax + By + D = 0, \\ Cz + Ax + D = 0, \\ By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Um aber die Gleichungen des gemeinschaftlichen Durchschnitts zweier Ebenen, deren Gleichungen

$$57. \quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{cases}$$

sind, zu finden, muß man aus diesen beiden Gleichungen offenbar zuerst y, dann x eliminiren. Dadurch erhält man als Gleichungen der in Rede stehenden Durchschnittslinie:

$$58.\quad \begin{cases} (AB' - A'B)x + (B'C - BC')z + B'D - BD' = 0, \\ (AB' - A'B)y + (A'C' - A'C)z + AD' - A'D = 0. \end{cases}$$

27. Die Bedingungen zu finden, unter denen zwei Ebenen, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

sind, einander parallel sind.

Zu diesen Bedingungen gelangt man sehr leicht durch die Bemerkung, daß die beiden Durchschnitte zweier parallelen Ebenen mit jeder der drei Coordinatenebenen einander parallel sind. Nach (56.) sind nun die Gleichungen dieser Durchschnittslinien

$$Ax + By + D = 0, \quad A'x + B'y + D' = 0;$$
$$By + Cz + D = 0, \quad B'y + C'z + D' = 0;$$
$$Cz + Ax + D = 0, \quad C'z + A'x + D' = 0;$$

oder

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}, \quad y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{D'}{B'};$$
$$z = -\frac{B}{C}y - \frac{D}{C}, \quad z = -\frac{B'}{C'}y - \frac{D'}{C'};$$
$$x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}, \quad x = -\frac{C'}{A'}z - \frac{D'}{A'}.$$

Sollen also die beiden Ebenen einander parallel seyn; so muß nach (8.)

$$69.\quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}, \quad \frac{C}{A} = \frac{C'}{A'},$$

oder

$$60.\quad AB' - BA' = 0, \quad BC' - CB' = 0, \quad CA' - AC' = 0$$

seyn. Daß, wie man sogleich übersieht, jede dieser drei Bedingungsgleichungen eine unmittelbare Folge aus den beiden andern ist, liegt ganz in der Natur der Sache, indem zwei Ebenen schon einander parallel sind, wenn nur ihre Durchschnittslinien mit zweien der drei Coordinatenebenen einander parallel sind.

Nun kann man auch leicht die folgende Aufgabe auflösen:

Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und einer gegebenen Ebene parallel ist.

Die Gleichungen der gegebenen und gesuchten Ebene seyen

$$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

und

$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0,$$

indem leicht erhellet, daß die Gleichung jeder Ebene durch Division mit ihrem letzten Gliede auf diese Form gebracht werden kann. Die Coordinaten des gegebenen Punktes seyen x', y', z'. Weil nun die gesuchte Ebene durch diesen Punkt gehen soll; so hat man die Gleichung

$$A'x' + B'y' + C'z' + 1 = 0 ;$$

und nach (60.) hat man, weil die gesuchte Ebene der gegebenen parallel seyn soll, die beiden Gleichungen

$$AC' - CA' = 0, \quad BC' - CB' = 0 .$$

Folglich hat man nun genug Gleichungen, um die drei unbekannten Größen A', B', C' bestimmen zu können.

28. Die Bedingungen zu finden, unter denen eine gerade Linie mit einer Ebene parallel ist.

Die Gleichungen der geraden Linie seyen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b ;$$

die Gleichung der Ebene sey

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 .$$

Durch den Anfang denke man sich eine gerade Linie und eine Ebene gelegt, deren erstere der gegebenen geraden Linie, letztere der gegebenen Ebene parallel ist. Die Gleichungen der durch den Anfang gelegten geraden Linie sind nach (40.)

$$x = Az, \quad y = Bz ,$$

indem die constanten Theile in diesen Gleichungen offenbar beide $= 0$ sind, da für $z = 0$ sowohl $x = 0$, als auch $y = 0$ ist. Die Gleichung der durch den Anfang gelegten Ebene, die der gegebenen Ebene parallel ist, sey

$$ax + by + z = 0 ,$$

indem sich die in Rede stehende Gleichung offenbar auf diese Form bringen läßt; so ist nach (59.)

$$a = \frac{A'}{C'}, \quad b = \frac{B'}{C'} ,$$

und folglich

$$A'x + B'y + C'z = 0$$

die Gleichung der durch den Anfang gelegten, der gegebenen parallelen Ebene. Sind nun die gegebene Ebene und die gegebene gerade Linie einander parallel, so muß offenbar die durch den Anfang gelegte gerade Linie ganz in die durch den Anfang gelegte Ebene hinein fallen, und es müssen also zwischen den Coordinaten jedes Punktes der durch den Anfang gelegten geraden Linie die drei Gleichungen

$$x = Az, \quad y = Bz, \quad A'x + B'y + C'z = 0$$

Statt finden, woraus sich, wenn man die Werthe von x und

y aus den beiden ersten Gleichungen in die dritte Gleichung für x und y setzt, auf der Stelle die gesuchte Bedingungsgleichung

$$61.\quad AA' + BB' + C' = 0$$

ergiebt.

Soll man nun durch einen gegebenen Punkt, dessen Coordinaten x', y', z' sind, eine der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegebenen Ebene parallele gerade Linie legen;

so hat man, wenn

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b'$$

die Gleichungen der gesuchten geraden Linie sind, zur Bestimmung der vier unbekannten Größen A', B', a', b' die drei Gleichungen

$$x' = A'z' + a', \quad y' = B'z' + b', \quad AA' + BB' + C = 0.$$

Daß, wie man hieraus sieht, eine der vier unbekannten Größen A', B', a', b' jederzeit unbestimmt bleibt, ist ganz der Natur der Sache gemäß, weil durch jeden Punkt unendlich viele einer gegebenen Ebene parallele gerade Linien gelegt werden können.

29. Die Bedingungen zu finden, unter denen eine gerade Linie, deren Gleichungen

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

sind, und eine Ebene, deren Gleichung

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

ist, auf einander senkrecht stehen.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht steht; so sind, wie aus bekannten stereometrischen Sätzen leicht erhellet, die Projectionen der geraden Linie auf den drei Coordinatenebenen auf den Durchschnitten der Ebene mit den entsprechenden Coordinatenebenen senkrecht. Die Gleichungen der Durchschnitte der gegebenen Ebene mit den Ebenen der xy, xz, yz sind:

$$A'x + B'y + D' = 0,$$
$$C'z + A'x + D' = 0,$$
$$B'y + C'z + D' = 0,$$

oder

$$y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{D'}{B'},$$
$$x = -\frac{C'}{A'}z - \frac{D'}{A'},$$
$$y = -\frac{C'}{B'}z - \frac{D'}{B'}.$$

Die Gleichungen der Projectionen der gegebenen geraden Linie auf den drei Coordinatenebenen sind

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B}, \quad x = Az + a, \quad y = Bz + b,$$

oder

$$y = \frac{B}{A}x - \frac{Ba}{A} + b, \quad x = Az + a, \quad y = Bz + b.$$

Also ist nach (18.)

$$62. \quad \frac{A'B}{B'A} = 1, \quad \frac{AC'}{A'} = 1, \quad \frac{BC'}{B'} = 1;$$

oder

$$63. \quad AB' = BA', \quad AC' = A', \quad BC' = B',$$

und dies sind die gesuchten Bedingungsgleichungen. Jede dieser drei Gleichungen ist eine Folge aus den beiden andern, wovon der Grund leicht erhellet.

30. Die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Die Coordinaten des gegebenen Punktes seyen $x', y' z'$; die Gleichung der gegebenen Ebene sey

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Die Gleichungen der gesuchten geraden Linie seyen

$$x = A'z + a', \quad y = B'z + b';$$

so ist, weil diese Linie durch den Punkt $(x' y' z')$ geht,

$$x' = A'z' + a', \quad y' = B'z' + b';$$

folglich

$$x - x' = A'(z - z'), \quad y - y' = B'(z - z').$$

Ferner ist nach (63.)

$$A'C = A, \quad B'C = B,$$

oder

$$A' = \frac{A}{C}, \quad B' = \frac{B}{C};$$

also sind

$$64. \quad \begin{cases} x - x' = \frac{A}{C}(z - z') \\ y - y' = \frac{B}{C}(z - z') \end{cases}$$

die gesuchten Gleichungen.

Bezeichnen jetzt x, y, z die Coordinaten des Punktes, in welchem die gegebene Ebene von dem auf sie von dem Punkte $(x' y' z')$ gefällten Perpendikel geschnitten wird; so hat man zur Bestimmung von x, y, z die drei Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

Setzen wir nun die bekannte Größe

$$Ax' + By' + Cz' + D = \Delta;$$

so ist

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = -\Delta$$

oder

$$A^2(z - z') + B^2(z - z') + C^2(z - z') = -C\Delta.$$

Bestimmt man hieraus $z - z'$, und dann auch die Größen $x - x'$ und $y - y'$; so erhält man

$$65. \quad \begin{cases} x - x' = -\dfrac{A\Delta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y - y' = -\dfrac{B\Delta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z - z' = -\dfrac{C\Delta}{A^2 + B^2 + C^2}; \end{cases}$$

oder

$$66. \quad \begin{cases} x = x' - \dfrac{A\Delta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y = y' - \dfrac{B\Delta}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z = z' - \dfrac{C\Delta}{A^2 + B^2 + C^2}; \end{cases}$$

oder

$$67. \quad \begin{cases} x = x' - \dfrac{A(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y = y' - \dfrac{B(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z = z' - \dfrac{C(Ax' + By' + Cz' + D)}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{cases}$$

Bezeichnet nun p die Entfernung des Punktes $(x'\,y'\,z')$ von der gegebenen Ebene; so ist nach (42.)

$$p = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

die Quadratwurzel positiv genommen. Also ist

$$68. \quad p = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

oder

$$69. \quad p = \pm \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo man, wenn man die Quadratwurzel im Nenner immer po-

sitiv nimmt, da p seiner Natur nach stets positiv ist, das obere oder untere Zeichen nehmen muß, jenachdem die Größe

$$\Delta = Ax' + By' + Cz' + D$$

positiv oder negativ ist. Ist $(x'\ y'\ z')$ der Anfang, d. i. $x' = y' = z' = 0$; so ist $\Delta = D$, folglich

$$70.\quad p = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und in dieser Formel das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem **D** positiv oder negativ ist.

31. Den von zwei durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gegebenen Ebenen eingeschlossenen Winkel V zu finden.

Errichtet man auf jede der beiden Ebenen ein Perpendikel; so ist klar, daß diese beiden Perpendikel, deren Gleichungen

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta$$

und

$$x = a'z + \alpha',\quad y = b'z + \beta'$$

seyn mögen, dieselben Winkel mit einander einschließen, wie die beiden gegebenen Ebenen. Also ist nach (44.)

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Nach (63.) ist aber

$$aC = A,\ bC = B;\quad a'C' = A',\ b'C' = B'.$$

Also ist

$$1 + aa' + bb' = \frac{AA' + BB' + CC'}{CC'},$$

und

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2},\quad 1 + a'^2 + b'^2 = \frac{A'^2 + B'^2 + C'^2}{C'^2}.$$

Folglich ist

$$71.\quad \cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

und in dieser Formel die Quadratwurzel sowohl positiv, als auch negativ zu nehmen, weil zwei Ebenen im Allgemeinen jederzeit zwei, einander zu 180° ergänzende, Winkel mit einander einschließen.

Sind die beiden Ebenen auf einander senkrecht, so ist $V = 90°$, $\cos V = 0$; folglich

$$72.\quad AA' + BB' + CC' = 0,$$

welches die Bedingung ist, daß zwei durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gegebene Ebenen auf einander senkrecht stehen.

Die Winkel, unter denen die Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ist, gegen die Ebenen der xy, xz, yz geneigt ist, seyen V', V'', V'''; und eben so seyen W', W'', W''' die von der Ebene, deren Gleichung

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

ist, mit den Ebenen der xy, xz, yz eingeschlossenen Winkel.

Da nun

$$z = 0,\ y = 0,\ x = 0$$

die Gleichungen der Ebenen der xy, xz, yz sind; so ist

$$73.\quad \begin{cases} \cos V' = \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos V'' = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos V''' = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \end{cases}$$

und eben so

$$74.\quad \begin{cases} \cos W' = \dfrac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \\ \cos W'' = \dfrac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \\ \cos W''' = \dfrac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \end{cases}$$

Also ist auch

$$75.\quad \begin{cases} \cos V'^2 + \cos V''^2 + \cos V'''^2 = 1, \\ \cos W'^2 + \cos W''^2 + \cos W'''^2 = 1. \end{cases}$$

Bezeichnet man durch (V'), (V''), (V'''); (W'), (W'') (W''') die Werthe von V', V'', V'''; W', W'', W''', für welche man in den Formeln (73.) und (74.) die Quadratwurzeln in den Nennern sämmtlich positiv nehmen muß; so ist

$$\cos(V')\cos(W') + \cos(V'')\cos(W'') + \cos(V''')\cos(W''') = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Bezeichnet nun (V) den Werth von V, für welchen man in der Formel (71.) die Quadratwurzel im Nenner positiv nehmen muß; so ist offenbar

$$76.\quad \cos(V) = \cos(V')\cos(W') + \cos(V'')\cos(W'') + \cos(V''')\cos(W''').$$

32. Den Winkel V zu finden, unter welchem eine durch die Gleichungen

$$x = Az + a,\quad y = Bz + b$$

gegebene gerade Linie gegen eine durch die Gleichung

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gegebene Ebene geneigt ist.

Der Winkel einer geraden Linie mit einer Ebene ist der von dieser Linie mit ihrer Projection auf der Ebene eingeschlossene Winkel. Bezeichnen wir also den von einem auf die Ebene errichteten Perpendikel mit der gegebenen geraden Linie eingeschlossenen Winkel durch V_1; so ist offenbar $\sin V$ dem absoluten Werthe von $\cos V'$ gleich. Sind nun

$$x = A_1 z + a_1,\quad y = B_1 z + b_1$$

die Gleichungen des in Rede stehenden Perpendikels; so ist nach (44.)

$$\cos V_1 = \frac{1 + AA_1 + BB_1}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A_1^2 + B_1^2)}}.$$

Nach (63.) ist aber

$$A_1 C' = A',\quad B_1 C' = B'.$$

Also ist

$$\cos V_1 = \frac{AA' + BB' + C'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

und folglich $\sin V$ dem absoluten Werthe von

$$\frac{AA' + BB' + C'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

gleich, d. h.

$$77.\quad \sin V = \frac{AA' + BB' + C'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

unter der Bedingung, daß man die Quadratwurzel im Nenner dieses Bruchs positiv oder negativ nimmt, jenachdem der Zähler desselben respective positiv oder negativ ist.

33. Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch drei gegebene Punkte geht, deren Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' sind.

Ist

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene; so hat man zur Bestimmung von

$$\frac{A}{D} = A',\quad \frac{B}{D} = B',\quad \frac{C}{D} = C',$$

weil die gesuchte Ebene durch die drei gegebenen Punkte gehen soll, die drei folgenden Gleichungen:

$$A'x' + B'y' + C'z' + 1 = 0,$$
$$A'x'' + B'y'' + C'z'' + 1 = 0,$$
$$A'x''' + B'y''' + C'z''' + 1 = 0.$$

Bestimmt man nun A', B', C' aus diesen drei Gleichungen durch gewöhnliche algebraische Elimination; so erhält man:

$$A' = \frac{z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')},$$

$$B' = \frac{x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')},$$

$$C' = \frac{y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')},$$

und es ist also offenbar verstattet,

$$A = z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y''),$$
$$B = x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z''),$$
$$C = y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'),$$
$$D = x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')$$

zu setzen.

34. Zum Schluß bemerken wir hier noch, daß man der allgemeinen Gleichung der Ebene immer auch leicht die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

geben kann, welches oft zur Erleichterung der Rechnung dienen kann. Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

so ist offenbar

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Eben so kann man immer auch der allgemeinen Gleichung der geraden Linie in der Ebene die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

geben, woraus, wenn man dies mit der allgemeinen Gleichung

$$y = Ax + B$$

vergleicht,

$$a = -\frac{B}{A}, \quad b = B$$

folgt. Eine ähnliche Bemerkung ist auch über die allgemeinen Gleichungen der geraden Linie im Raume zu machen.

Anwendungen der im Obigen entwickelten allgemeinen Formeln zur Auflösung geometrischer Aufgaben gehören jetzt nicht hierher, indem schon der Artikel Anwendung der Analysis auf die Geometrie i. d. Z. viele Anwendungen dieser Art enthält, so

daß uns also hier auf diesen Artikel, dessen Studium zweckmäßig mit dem Studium des gegenwärtigen Artikels verbunden werden wird, zu verweisen erlaubt seyn mag.

Logarithmus. Für die Exponential-Reihe sind in diesem Werke an verschiedenen Stellen mehrere Beweise gegeben worden, worüber man den Artikel Exponential-Größe nachsehen kann. Der einfachste und strengste Beweis, welcher sich für die logarithmische Reihe geben läßt, scheint uns folgender zu seyn. Für jedes reelle α und jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x ist nach dem binomischen Lehrsatze (m. s. diesen Artikel i. d. Z. 17.)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

Also ist, wie man leicht findet,

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} = x - (1-\alpha)\frac{x^2}{2} + (1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\frac{x^3}{3} - (1-\alpha)(1-\tfrac{1}{2}\alpha)(1-\tfrac{1}{3}\alpha)\frac{x^4}{4} + \ldots,$$

und folglich, wenn man α sich der Null nähern läßt und zu den Gränzen übergeht,

$$\text{Lim.}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$$

Nun ist aber, wenn wir die natürlichen Logarithmen durch l bezeichnen,

$$1 + x = e^{l(1+x)},$$

und folglich nach der Exponential-Reihe, die für jeden reellen Exponenten gilt,

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha l(1+x)} = 1 + \frac{\alpha l(1+x)}{1} + \frac{\alpha^2\{l(1+x)\}^2}{1.2} + \frac{\alpha^3\{l(1+x)\}^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Also

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} =$$

$$l(1+x) + \frac{\alpha}{1.2}\{l(1+x)\}^2 + \frac{\alpha^2}{1.2.3}\{l(1+x)\}^3 + \ldots\ldots$$

Läßt man nun α sich der Null nähern und geht zu den Gränzen über; so ergiebt sich auf der Stelle

$$\text{Lim}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} = l(1+x).$$

Dies, mit dem Obigen verglichen, giebt

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$$

für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x, welches die bekannte logarithmische Reihe ist.

Ist nun M der Modulus des Systems, in welchem die Logarithmen durch log bezeichnet werden; so ist bekanntlich $\log(1+x) = M\,l(1+x)$, und folglich

$$\log(1+x) = M(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.).$$

Einige Umformungen der logarithmischen Reihe s. m. im Artikel Umformung der Reihen (16. 28. 29.)

Die logarithmische Reihe ist vorher nur für zwischen -1 und $+1$ enthaltene x bewiesen worden. Weil aber die Reihe

$$1, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, +\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \ldots.,$$

wie im Artikel Convergenz der Reihen (15.) bewiesen worden ist, convergirt; so überzeugt man sich leicht, daß die logarithmische Reihe auch noch für $x = +1$ gilt, und folglich

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots.$$

ist. Daß die logarithmische Reihe auch für $x = -1$ gilt, läßt sich nicht behaupten, weil die Reihe

$$-1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \ldots..$$

nach dem Artikel Convergenz der Reihen (3.) divergirt.

Ueber die Berechnung der Logarithmen verbreitet sich der Artikel Logarithmus im dritten Theile schon so ausführlich, daß hier nichts weiter darüber beizubringen nöthig ist. Logarithmische Tafeln sind in neuerer Zeit mehrere erschienen, z. B. von Hahn (Berl. 1823.), Stampffer (Salzb. 1825.), Grüson (Berl. 1818.), Pasquich (Leipz. 1817.), Schultes (Erl. 1821.), Westphal (Königsb. 1821.), Prasse und Mollweide (Leipz. 1821.), Hantschl (Wien. 1833.), Ursin (Hafniae, 1824.). Vorzügliche Erwähnung verdient indeß, wegen des besondern Gebrauchs, zu dem sie bestimmt ist, Matthiessens Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Altona. 1817. Auch s. m. die zu demselben Gebrauche bestimmte Tafel von Gauß in der monatl. Correspondenz. November 1812. Ueber die Fehler beim Interpoliren s. m. zwei Aufsätze von Vincent und Bary in den Annales de Mathématiques. T. XVI. p. 19. und T. XXI. p. 281.

Logologarithmus, s. Integrallogarithmus i. d. Z.

M.

Maclaurin'sche Reihe, s. Taylors Lehrsatz (10.) i. d. Z.

Malfattis Aufgabe, s. Anwendung der Analysis auf die Geometrie (24.) i. d. Z.

Meniscus, s. Lunula.

Mittel oder Mittelgröße zwischen mehrern beliebigen positiven oder negativen Größen $a, a', a'', a''', a^{IV}, \ldots..$ heißt

jede Größe, welche nicht größer wie die größte und nicht kleiner wie die kleinste unter diesen Größen ist, und soll im Folgenden überhaupt durch

$$M(a, a', a'', a''', a^{IV}, \ldots)$$

bezeichnet werden. Man sieht hieraus, daß es zwischen Größen, die nicht sämmtlich unter einander gleich sind, jederzeit unendlich viele Mittelgrößen geben kann; sind aber die gegebenen Größen sämmtlich unter einander gleich, so giebt es zwischen denselben nur eine Mittelgröße, welche offenbar keine andere als jede der gegebenen Größen selbst ist. Wir wollen nun von den Mittelgrößen überhaupt im Folgenden mehrere Sätze beweisen, welche theils an sich merkwürdig sind, theils bei mathematischen Untersuchungen häufig mit besonderm Vortheil angewandt werden.

1. Zunächst ergiebt sich aus der vorhergehenden Definition unmittelbar der folgende Satz:

Jede Größe, welche zwischen zwei beliebigen der Größen $a, a', a'', a''', a^{IV}, \ldots$ eine Mittelgröße ist, ist eine Mittelgröße zwischen allen diesen Größen.

2. Wenn a, b zwei beliebige Größen sind, so ist das Product

$$\{a - M(a, b)\}\{M(a, b) - b\}$$

jederzeit positiv, wobei wir bemerken, daß dieses Product auch dann, wenn es verschwindet, als positiv betrachtet werden soll.

Wenn $a > b$ ist, so sind nach der allgemeinen Definition der Mittelgrößen die Differenzen

$$a - M(a, b),\quad M(a, b) - b$$

beide positiv, wobei immer Null als positiv betrachtet wird. Daher ist in diesem Falle das Product

$$\{a - M(a, b)\}\{M(a, b) - b\}$$

offenbar positiv. Ist also $a < b$, so ist das Product

$$\{b - M(a, b)\}\{M(a, b) - a\}$$

und folglich natürlich auch das Product

$$\{a - M(a, b)\}\{M(a, b) - b\}$$

positiv. Ist $a = b$, so sind die Differenzen

$$a - M(a, b),\quad M(a, b) - b$$

offenbar beide $= 0$, und ihr Product ist also wieder positiv.

3. Wenn das Product

$$(a - A)(A - b)$$

positiv ist; so ist A eine Mittelgröße zwischen a und b, oder es ist $A = M(a, b)$.

Ist das Product

$$(a - A)(A - b) = 0,$$

so ist entweder $A = a$ oder $A = b$, in beiden Fällen also nach der allgemeinen Definition der Mittelgrößen A eine Mittelgröße zwischen a und b. Ist dieses Product aber nicht $= 0$, so haben die Differenzen $a - A$, $A - b$, weil das in Rede stehende Produkt positiv ist, gleiche Vorzeichen. Ist also $a - A$ positiv, so ist auch $A - b$ positiv, d. h. wenn $A < a$ ist, so ist $A > b$, und folglich offenbar $A = M(a, b)$. Ist $a - A$ negativ, so ist auch $A - b$ negativ, d. h. wenn $A > a$ ist, so ist $A < b$, und folglich wieder offenbar $A = M(a, b)$. Im ersten Falle ist offenbar $a > b$, im zweiten dagegen $a < b$.

4. Wenn

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist; so ist für jedes positive oder negative r immer

$$rA = M(ra, ra', ra'', ra''', \ldots).$$

Die kleinste und größte unter den Größen a, a', a'', a''', ... seyen respective α und γ; so ist, weil nach der Voraussetzung A eine Mittelgröße zwischen a, a', a'', a''' ..... ist, nach der allgemeinen Definition der Mittelgrößen

$$A = M(\alpha, \gamma)$$

und folglich nach (2.) das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma)$$

positiv. Weil nun r^2 positiv ist, so ist auch das Product

$$r^2(\alpha - A)(A - \gamma),$$

d. i. das Product

$$r(\alpha - A) \cdot r(A - \gamma),$$

oder das Product

$$(r\alpha - rA)(rA - r\gamma)$$

positiv, und folglich nach (3.)

$$rA = M(r\alpha, r\gamma).$$

Weil aber $r\alpha$, $r\gamma$ offenbar zwei Glieder der Reihe

$$ra, ra', ra'', ra''', \ldots$$

sind; so ist nach (1.) auch

$$rA = M(ra, ra', ra'', ra''', \ldots).$$

5. Wenn

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist; so ist für jedes r, indem die obern und untern Zeichen in folgender Gleichung sich auf einander beziehen,

$$A \pm r = M(a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' \pm r, \ldots).$$

Die kleinste und größte unter den Größen a, a', a'', a''', ... seyen wieder respective α und γ; so ist wegen der Voraussetzung nach der allgemeinen Definition der Mitelgrößen

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Also ist nach (2.) das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma) ;$$

und folglich natürlich auch das Product

$$\{\alpha \pm r - (A \pm r)\}\{A \pm r - (\gamma \pm r)\}$$

positiv. Daher ist nach (3.)

$$A \pm r = M(\alpha \pm r, \gamma \pm r) ,$$

und folglich, weil $\alpha \pm r$, $\gamma \pm r$ offenbar zwei Glieder der Reihe

$$a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' \pm r, \ldots\ldots$$

sind, nach (1.) auch

$$A \pm r = M(a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' \pm r, \ldots\ldots) .$$

6. Wenn die Größen $a, a', a'', a''', \ldots$ sämmtlich positiv sind, und

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots) ,$$

also natürlich auch positiv ist; so ist für jedes r

$$A^r = M(a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots\ldots) .$$

Seyen wieder α und γ respective die kleinste und größte unter den Größen $a, a', a'', a''', \ldots\ldots$; so ist, weil nach der Voraussetzung

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist, offenbar

$$A = M(\alpha, \gamma) .$$

Ist nun A einer der beiden Größen α, γ gleich; so ist offenbar einer der beiden Factoren des Products

$$(\alpha^r - A^r)(A^r - \gamma^r)$$

$= 0$, dieses Product also selbst $= 0$, d. i. positiv. Ist aber A keiner der beiden Größen α, γ gleich; so ist

$$A > \alpha, \quad A < \gamma .$$

Ist nun r positiv, so ist nach dem Artikel Ungleich (8.), da die Größen A, α, γ positiv sind,

$$A^r > \alpha^r, \quad A^r < \gamma^r ,$$

oder die Differenzen

$$\alpha^r - A^r, \quad A^r - \gamma^r$$

sind beide negativ, und das Product

$$(\alpha^r - A^r)(A^r - \gamma^r)$$

ist also positiv. Ist dagegen r negativ, so ist nach dem angeführten Artikel

$$A^r < \alpha^r, \quad A^r > \gamma^r ,$$

die Differenzen

$$\alpha^r - A^r, \quad A^r - \gamma^r$$

sind beide positiv, und das Product

$$(\alpha^r - A^r)(A^r - \gamma^r)$$

ist folglich wieder positiv. Da also dieses Product stets positiv ist, so ist nach (3.)

$$A^r = M(\alpha^r, \gamma^r),$$

und folglich, weil α^r, γ^r offenbar Glieder der Reihe

$$a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots\ldots$$

sind, nach (1.)

$$A^r = M(a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots\ldots).$$

Für $r = \frac{1}{2}$ ist also z. B.

$$\sqrt{A} = M(\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}, \sqrt{a'''} \ldots\ldots).$$

7. Wenn a, a', a'', a''', ... beliebige Größen bezeichnen, r aber positiv und

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots\ldots)$$

ist; so ist immer

$$r^A = M(r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots\ldots).$$

Sind α und γ wieder respective die kleinste und größte unter den Größen a, a', a'', a''', ...; so ist

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Ist nun A einer der Größen α, γ gleich, so ist offenbar einer der Factoren des Products

$$(r^\alpha - r^A)(r^A - r^\gamma)$$

$= 0$, dieses Product also selbst $= 0$, d. i. positiv. Ist dagegen A keiner der Größen α, γ gleich; so ist

$$A > \alpha, \quad A < \gamma.$$

Weil nun nach der Voraussetzung r positiv ist, so ist nach dem Artikel Ungleich (9.)

$$r^A > r^\alpha, \quad r^A < r^\gamma$$

oder

$$r^A < r^\alpha, \quad r^A > r^\gamma,$$

jenachdem $r > 1$ oder $r < 1$ ist. Für $r = 1$ würde

$$r^A = r^\alpha, \quad r^A = r^\gamma$$

seyn. In allen Fällen haben folglich die Differenzen

$$r^\alpha - r^A, \quad r^A - r^\gamma$$

gleiche Vorzeichen, und das Product

$$(r^\alpha - r^A)(r^A - r^\gamma)$$

ist also positiv, d. i. nach (3.)

$$r^A = M(r^\alpha, r^\gamma);$$

folglich nach (1.), weil r^α, r^γ offenbar Glieder der Reihe

$$r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots\ldots$$

sind, auch

$$r^A = M(r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots.) .$$

Daß dieser Satz nicht gilt, wenn r negativ ist, läßt sich leicht an Beispielen zeigen. So ist z. B.

$$4 = M(2, 7.)$$

Es ist aber nicht

$$(-2)^4 = M\{(-2)^2, (-2)^7\} ,$$

d. i. nicht

$$2^4 = M(2^2, -2^7) ,$$

weil

$$2^4 > 2^2, \quad 2^4 > -2^7 ,$$

also 2^4 keine Mittelgröße zwischen 2^2 und -2^7 ist. Die Größen a, a', a'', a''', ... können aber beliebige positive oder negative Größen seyn.

8. Wenn a, a', a'', a''', ... positive Größen bezeichnen und

$$A = M(a, a', a'', a''', \ldots.) ,$$

also auch positiv ist; so ist für jedes logarithmische System

$$\log A = M(\log a, \log a', \log a'', \log a''', \ldots..)$$

Es bezeichne wieder α die kleinste, γ die größte unter den Größen a, a', a'', a''', ...; so ist nach der Voraussetzung

$$A = M(\alpha, \gamma) ,$$

und es haben folglich nach dem Artikel Ungleich (10.) die beiden Differenzen

$$\log\alpha - \log A, \quad \log A - \log\gamma$$

jederzeit einerlei Vorzeichen, so daß also das Product

$$\{\log\alpha - \log A\}\{\log A - \log\gamma\}$$

jederzeit positiv, und folglich nach (3.)

$$\log A = M(\log\alpha, \log\gamma) ,$$

also nach (1.) auch

$$\log A = M(\log a, \log a', \log a'', \log a''', \ldots.)$$

ist.

9. Wenn a, a', a'', a''', ... beliebige, dagegen b, b', b'', b''', ... sämmtlich Größen mit demselben Vorzeichen sind, deren Anzahl in beiden Reihen $= n$ seyn mag; so ist immer

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots.}{b + b' + b'' + b''' + \ldots.} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots.\right).$$

Sey α die kleinste, γ die größte unter den Größen

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\ldots;$$

so sind die Differenzen

$$\frac{a}{b} - \alpha, \frac{a'}{b'} - \alpha, \frac{a''}{b''} - \alpha, \frac{a'''}{b'''} - \alpha, \ldots\ldots;$$

$$\gamma - \frac{a}{b}, \gamma - \frac{a'}{b'}, \gamma - \frac{a''}{b''}, \gamma - \frac{a'''}{b'''}, \ldots\ldots$$

sämmtlich positiv. Da nun nach der Voraussetzung die Größen $b, b', b'', b''', \ldots$ alle gleiche Vorzeichen haben; so haben auch die Producte

$$b\left(\frac{a}{b} - \alpha\right), b'\left(\frac{a'}{b'} - \alpha\right), b''\left(\frac{a''}{b''} - \alpha\right), b'''\left(\frac{a'''}{b'''} - \alpha\right), \ldots;$$

$$b\left(\gamma - \frac{a}{b}\right), b'\left(\gamma - \frac{a'}{b'}\right), b''\left(\gamma - \frac{a''}{b''}\right), b'''\left(\gamma - \frac{a'''}{b'''}\right), \ldots$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen. Also haben auch die diesen Producten gleichen Differenzen

$$a - \alpha b, a' - \alpha b', a'' - \alpha b'', a''' - \alpha b''', \ldots\ldots;$$

$$b\gamma - a, b'\gamma - a', b''\gamma - a'', b'''\gamma - a''', \ldots\ldots;$$

folglich auch die Summen

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots - \alpha(b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots),$$

$$\gamma(b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots) - (a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots);$$

also auch die Quotienten

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots} - \alpha, \gamma - \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots},$$

oder

$$\alpha - \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots}, \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots} - \gamma$$

gleiche Vorzeichen, und das Product

$$\left\{\alpha - \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots}\right\}\left\{\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots} - \gamma\right\}$$

ist daher stets positiv. Also ist nach (3.)

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots} = M(\alpha, \gamma);$$

folglich nach (1.) auch

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots\ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\right).$$

10. Für $b = b' = b'' = b''' = \ldots = 1$ ergiebt sich aus dem vorigen Satze

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots\ldots}{n} = M(a, a', a'', a''', \ldots),$$

in welcher Gleichung die bekannte Regel für das sogenannte arithmetische Mittel zwischen mehrern Größen enthalten ist.

Sind die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\ldots$$

sämmtlich einander gleich; so fällt jede Mittelgröße zwischen ihnen mit ihnen selbst zusammen, und es ist folglich nach (9.) in diesem Falle

$$\frac{a+a'+a''+a'''+\ldots.}{b+b'+b''+b'''+\ldots.} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots.$$

11. Sind $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots\ldots$ Größen von einerlei Vorzeichen; so haben, wenn, wie vorher, $b, b', b'', b''', \ldots\ldots$ Größen von einerlei Vorzeichen sind, auch die Producte

$$b\varrho, b'\varrho', b''\varrho'', b'''\varrho''', \ldots\ldots$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen, und es ist folglich nach (9.)

$$\frac{a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.}{b\varrho+b'\varrho'+b''\varrho''+b'''\varrho'''+\ldots.} = M\left(\frac{a\varrho}{b\varrho}, \frac{a'\varrho'}{b'\varrho'}, \frac{a''\varrho''}{b''\varrho''}, \frac{a'''\varrho'''}{b'''\varrho'''}, \ldots.\right),$$

d. i.

$$\frac{a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.}{b\varrho+b'\varrho'+b''\varrho''+b'''\varrho'''+\ldots.} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots.\right).$$

Für $b = b' = b'' = b''' = \ldots. = 1$ ist

$$\frac{a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots.}{\varrho+\varrho'+\varrho''+\varrho'''+\ldots.} = M(a, a', a'', a''' \ldots.).$$

oder

$$a\varrho+a'\varrho'+a''\varrho''+a'''\varrho'''+\ldots = (\varrho+\varrho'+\varrho''+\varrho'''+\ldots)M(a, a', a'', a''', \ldots),$$

so daß also, wenn $a, a', a'', a''', \ldots.$ beliebige, dagegen $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots.$ Größen von einerlei Vorzeichen sind, das Aggregat

$$a\varrho + a'\varrho' + a''\varrho'' + a'''\varrho''' + \ldots.$$

jederzeit erhalten wird, wenn man die Summe

$$\varrho + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' + \ldots.$$

in eine gewisse Mittelgröße zwischen $a, a', a'', a''', \ldots.$ multiplicirt.

12. Seyen $a, a', a'', a''', \ldots.$ und $b, b', b'', b''', \ldots.$ zwei Reihen positiver Größen, und in jeder die Anzahl der Glieder dieselbe; so ist

$$(aa'a''a'''\ldots.)^{\frac{1}{b+b'+b''+b'''+\ldots}} = M(\sqrt[b]{a}, \sqrt[b']{a'}, \sqrt[b'']{a''}, \sqrt[b''']{a'''}, \ldots).$$

Man setze $b+b'+b''+b'''+\ldots. = m$; so sind die Logarithmen der Größen

$$\sqrt[m]{aa'a''a'''\ldots}, \sqrt[b]{a}, \sqrt[b']{a'}, \sqrt[b'']{a''}, \sqrt[b''']{a'''}, \ldots\ldots$$

respective

$$\frac{\log a + \log a' + \log a'' + \log a''' + \ldots.}{b + b' + b'' + b''' + \ldots.}$$

und

$$\frac{\log a}{b}, \frac{\log a'}{b'}, \frac{\log a''}{b''}, \frac{\log a'''}{b'''}, \ldots..,$$

und nach (9.) ist

$$\frac{\log a + \log a' + \log a'' + \log a''' + \ldots.}{b + b' + b'' + b''' + \ldots.} = M\left(\frac{\log a}{b}, \frac{\log a'}{b'}, \frac{\log a''}{b''}, \frac{\log a'''}{b'''}, \ldots..\right).$$

Geht man nun von den Logarithmen zu den Zahlen über, welches nach (7.) offenbar verstattet ist; so erhält man auf der Stelle die zu beweisende Gleichung.

13. Für $b = b' = b'' = b''' \ldots = 1$ erhält man, wenn die Anzahl dieser Größen durch n bezeichnet wird, aus dem vorigen Satze

$$\sqrt[n]{aa'a''a'''} = M(a, a', a'', a''', \ldots.).$$

Die Wurzelgröße auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nennt man das geometrische Mittel zwischen den n Größen a, a', a'', a''' ....

Sind die Wurzelgrößen

$$\sqrt[b]{a}, \sqrt[b']{a'}, \sqrt[b'']{a''}, \sqrt[b''']{a'''}, \ldots..$$

alle einander gleich; so folgt aus (12.) auf der Stelle

$$(aa'a''a'''\ldots.)^{\frac{1}{b+b'+b''+b'''+\cdots}} = \sqrt[b]{a} = \sqrt[b']{a'} = \sqrt[b'']{a''} = \ldots.$$

oder

$$\sqrt[m]{aa'a''a'''\ldots} = \sqrt[b]{a} = \sqrt[b']{a'} = \sqrt[b'']{a''} = \sqrt[b''']{a'''} = \ldots.,$$

wo immer

$$m = b + b' + b'' + b''' + \ldots.$$

ist.

14. Wenn die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots..$$

alle einander gleich sind; so ist immer

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots = \pm\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots.}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots.}},$$

indem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem die gegebenen Brüche sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sind.

Nach der Voraussetzung ist nämlich

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \frac{a'''^2}{b'''^2} = \ldots\ldots,$$

und folglich nach (10.)

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \frac{a'''^2}{b'''^2} = \ldots\ldots = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots\ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots\ldots},$$

woraus der zu beweisende Satz auf der Stelle durch Ausziehung der Quadratwurzel auf beiden Seiten folgt.

In dem Artikel Ungleich (22.) ist bewiesen worden, daß das geometrische Mittel zwischen mehrern positiven Größen jederzeit kleiner als das arithmetische Mittel zwischen diesen Größen ist.

Mör nennt Werneburg in seiner Teliosadik (s. diesen Artikel) das, was sonst gewöhnlich Eilf heißt.

N.

Neilische Parabel, s. Parabeln höherer Art und Cubische Parabel.

Nonius, s. Theilung (19.).

P.

Parallelentheorieen von Kesaer (Wien. 1778.), Schulz (Königsberg. 1784. 86.), Ouvrier (Leipzig. 1808.), Crelle (Berl. 1816.), Müller (Nürnb. 1819.), Küster (Hamm. 1821.), Guntz (Grätz. 1815.), Wahl (Jenae. 1823.), Jacobi (Jenae. 1824.), Hegenberg (Berlin. 1825.), Taurinus (Cöln, 1825.), Heßling (Halle. 1818.), C. R. Müller (Marb. 1822.), Huber (Basel. 1823.).

Partikuläre Auflösungen der Differentialgleichungen, s. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

Partikuläre Integrale, s. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

Periodische Functionen. Wenn $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x ist; so wollen wir Ausdrücke von der Form $\varphi(\varphi(x))$, $\varphi(\varphi(\varphi(x)))$, $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))$, $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x)))))$, u. s. w., deren Bedeutung leicht erhellen wird, der Kürze wegen durch $\varphi^2(x)$, $\varphi^3(x)$, $\varphi^4(x)$, $\varphi^5(x)$, u. s. w. bezeichnen, woraus auch ersichtlich ist, was im Allgemeinen $\varphi^n(x)$ bezeichnet. Wenn nun die Function $\varphi(x)$ so beschaffen ist, daß für irgend ein n und natürlich für jedes beliebige x

$$\varphi^n(x) = \varphi(x)$$

ist; so heißt die Function $\varphi(x)$ eine periodische Function. Da aber

$$\varphi^n(x) = \varphi(\varphi^{n-1}(x))$$

ist; so ist

$$\varphi(\varphi^{n-1}(x)) = \varphi(x)$$

und folglich

$$\varphi^{n-1}(x) = x .$$

Daher wird die Function $\varphi(x)$ offenbar auch dann jederzeit eine periodische Function seyn, wenn für irgend ein n

$$\varphi^n(x) = x$$

ist. Functionen, für welche $\varphi^2(x) = x$ ist, sind z. B. folgende aus einer Abhandlung von Babbage in den **Philosophical Transactions. 1815. p. 411.** entlehnte Functionen:

$$a - x, \quad \frac{x}{ax - 1}, \quad \frac{b - x}{1 - ax} .$$

Eine allgemeine Regel zur Erfindung periodischer Functionen hat Clausen in **Crelles Journal. B. IV. S. 280.** gegeben. Sey nämlich $y = f(x)$ eine beliebige Function von x und α ein Werth der nten Wurzel aus der Einheit oder $\alpha^n = 1$. Nun betrachte man $f(\alpha x)$ als eine Function von $f(x)$ oder y und setze zu dem Ende

$$f(\alpha x) = \varphi\{f(x)\} = \varphi(y) ;$$

so ist

$$\begin{aligned}
\varphi^2(y) &= \varphi\{f(\alpha x)\} = f(\alpha^2 x) , \\
\varphi^3(y) &= \varphi\{f(\alpha^2 x)\} = f(\alpha^3 x) , \\
\varphi^4(y) &= \varphi\{f(\alpha^3 x)\} = f(\alpha^4 x) , \\
\varphi^5(y) &= \varphi\{f(\alpha^4 x)\} = f(\alpha^5 x) , \\
&\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.} \\
\varphi^n(y) &= \varphi\{f(\alpha^{n-1} x)\} = f(\alpha^n x) ,
\end{aligned}$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $\alpha^n = 1$ ist,

$$\varphi^n(y) = f(x) = y .$$

Also ist $\varphi^n(y)$ eine periodische Function.

Um dies durch ein ganz leichtes Beispiel zu erläutern, wollen wir

$$y = f(x) = \frac{a + bx}{\alpha + \beta x}$$

und $\alpha = -1$, wo also $\alpha^2 = 1$ ist, setzen; so ist

$$f(\alpha x) = f(-x) = \frac{a - bx}{\alpha - \beta x} .$$

Aus der Gleichung

$$y = \frac{a + bx}{\alpha + \beta x}$$

folgt nun

$$x = \frac{a - \alpha y}{\beta y - b},$$

und es ist also

$$f(\alpha x) = \varphi(y) = \frac{a - \frac{b(a - \alpha y)}{\beta y - b}}{a - \frac{\beta(a - \alpha y)}{\beta y - b}},$$

oder

$$\varphi(y) = \frac{(a\beta + \alpha b)y - 2ab}{2\alpha\beta y - \alpha b - \beta a},$$

und man wird leicht finden, daß diese Function die Eigenschaft hat, daß $\varphi^2(y) = y$ ist, so daß also dieselbe eine periodische Function ist. Um dies nur an einem speciellen Falle zu erläutern, wollen wir $a=3$, $b=1$, $\alpha=2$, $\beta=1$ setzen. Dies giebt

$$\varphi(y) = \frac{5y - 6}{4y - 5},$$

und in diesem Falle ist

$$\varphi^2(y) = \frac{5.\frac{5y-6}{4y-5} - 6}{4.\frac{5y-6}{4y-5} - 5} = \frac{25y - 30 - 24y + 30}{20y - 24 - 20y + 25},$$

d. i.

$$\varphi^2(y) = \frac{y}{1} = y,$$

wie es seyn soll.

Pol und Polare, s. den Artikel Verwandtschaft der Collineation u. s. w. (1.) i. d. Z.

Potenzebene zweier Kugeln ist dasselbe, was im Artikel Anwendung der Analysis auf die Geometrie (11.) i. d. Z. Radicalebene zweier Kugeln genannt worden ist.

Potenzenlinie zweier Kreise oder dreier Kugeln ist dasselbe, was im Artikel Anwendung der Analysis auf die Geometrie (8.) und (11.) i. d. Z. Radical-Axe zweier Kreise oder dreier Kugeln genannt worden ist.

Probabilitäten-Rechnung, s. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Product. Die Summe der am Ende dieses Artikels angeführten merkwürdigen Reihe s. m. im Artikel Elliptische Functionen (57.) i. d. Z.

Pyramide. Eine sehr gute Schrift über die dreieckige Pyramide ist: K. W. Feuerbachs Grundriß zu analytischen

Untersuchungen der dreieckigen Pyramide. Nürnb. 1827. Auch s. m. J. H. T. Müller Disquisitiones de Tetraedro. Numburgi. 1831. und Strasznicki: das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide nach allen Analogien dargestellt. Wien. 1827. Mittheilungen aus diesen Schriften gestattet hier leider der Raum nicht.

Pythagorischer Lehrsatz. Der pythagor. Lehrsatz mit zwei und dreißig theils bekannten, theils neuen Beweisen von J. J. J. Hoffmann. Mainz. 1819. Nachträge zu dieser Schrift von J. W. Müller Nürnb. 1819.

Q.

Quadratur. Zwei, natürlich bloß näherungsweise richtige Constructionen des Kreis-Umfangs, von denen die eine bis zur sechsten, die andere bis zur achten Decimalstelle mit dem Calcul übereinstimmt, hat Specht in Crelles Journal. B. III. S. 83. 405. geliefert. Die erste dieser beiden Constructionen wollen wir, als die einfachere, hier mittheilen. Man zeichne sich einen rechten Winkel und nehme auf einem Schenkel desselben **AB** (Fig. 34.) dem Radius, auf dem andern Schenkel **AC** dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich. Hierauf mache man **CD** = **DE** = **EF** gleich dem fünften Theile des Radius, ziehe **BD** und **BF**, nehme **AN** = **BD** und ziehe durch **N** mit **BF** die Parallele **NK**; so ist **BK** der Umfang, $\measuredangle$**ABK** der Flächeninhalt des gegebenen Kreises, bis zur sechsten Decimalstelle genau. Um dies zu beweisen setze man den Radius **AB** = 1, den Durchmesser **AC** = 2; also **AD** = $2\frac{1}{5}$, **AF** = $2\frac{2}{5}$. Folglich ist

$$BD^2 = 1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2 = 1 + \frac{121}{25} = \frac{146}{25},\ BD = \tfrac{1}{5}\sqrt{146}.$$

Aber

$$AB : AN = AF : AK,$$

d. i., weil **AN** = **BD** ist,

$$AB : BD = AF : AK,$$

und folglich

$$1 : \tfrac{1}{5}\sqrt{146} = \frac{13}{5} : AK.$$

Daher ist

$$AK = \frac{13\sqrt{146}}{25} = \sqrt{39{,}4784} = 2.3{,}1415919531,$$

Weil nun bekanntlich $\pi = 3{,}1415926535$ ist; so sieht man, daß **AK** den Umfang, $\measuredangle$**ABK** den Inhalt des Kreises bis zur sechsten Decimalstelle genau darstellt.

Bemerkt kann hierbei noch werden, daß

$$\frac{7}{0^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50} = \left\{ \begin{matrix} 3{,}1415919531 \\ +\ 0{,}0000007 \end{matrix} \right\} = 3{,}1415926531$$

ist, und der Ausdruck

$$\frac{7}{10^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50}$$

also erst in der zehnten Decimalstelle von der Zahl π abweicht.

R.

Reciprocität. Ueber die Verwandtschaft der Reciprocität s. m. den Artikel Verwandtschaft der Collineation u. s. w. i. d. Z. Ueber den Satz von der Reciprocität in der Zahlenlehre s. m. den Artikel Zahl IV.

Rectification. Ueber die Rectification der Ellipse und Hyperbel s. m. vorzüglich auch den Artikel Elliptische Functionen (9. XII. XIV. XV.) i. d. Z. und über die Rectification der Ellipse außerdem noch hauptsächlich den Artikel Integration durch Annäherung (6.) i. d. Z.

S.

Stetige Functionen. Sey $y = f(x)$ eine Function von x, und a, b seyen zwei bestimmte Werthe von x. Wenn nun für jeden zwischen a und b liegenden Werth von x die in Rede stehende Function einen endlichen völlig bestimmten Werth hat, und einer unendlich kleinen Veränderung von x jederzeit auch eine unendlich kleine Veränderung der Function entspricht; so sagt man, daß die Function *zwischen den Gränzen* $x = a$ *und* $x = b$ *stetig* sey. Auch sagt man, daß die Function $y = f(x)$ *in der Nähe des bestimmten Werths* α *von* x *stetig* sey, wenn dieselbe zwischen zwei, den Werth α zwischen sich enthaltenden Gränzen stetig ist, wie nahe diese Gränzen auch sich selbst und dem Werthe α kommen mögen. Findet dies aber in Bezug auf den Werth α von x nicht Statt; so sagt man, daß die Function für $x = \alpha$ *discontinuirlich* werde, oder daß bei $x = \alpha$ eine *Unterbrechung der Stetigkeit* der Function Statt finde. Die Functionen $a \pm x$, A^x, $\sin x$, $\cos x$ sind z. B. zwischen den Gränzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$ stetig. Die Function $\frac{a}{x}$ ist sowohl zwischen den Gränzen $x = -\infty$ und $x = 0$, als auch zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = +\infty$ stetig; bei $x = 0$ findet aber eine Unterbrechung der Stetigkeit dieser Function Statt. Die Functionen $\operatorname{Arc}\sin x$ und $\operatorname{Arc}\cos x$ sind zwischen den Gränzen $x = -1$ und $x = +1$ stetig. Die Function lx ist zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = +\infty$ stetig. Für

die Function tang x findet bei $x = \pm \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, jederzeit eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt.

Ueber discontinuirliche Functionen s. m. zwei lesenswerthe Abhandlungen von Libri in Crelles Journal. B. X. S. 303. Auch vergl. m. B. VI. S. 67.

Die obigen Begriffe auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen auszudehnen, wird keine Schwierigkeit haben.

Sturms Satz von den Gleichungen enthält ein Kriterium, durch welches man immer sicher beurtheilen kann, wie viele reelle Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegen müssen, da im Gegentheile das berühmte im Artikel Gleichung (64. VIII.) bewiesene Fourier'sche Theorem ein Kriterium enthält, durch welches man beurtheilen kann, wie viele reelle Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegen können. Sturm hat seinen Satz am 23. Mai 1829 in der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgetragen, und späterhin im eilften Bande des Bulletin des sciences math., phys. et chim. von Feruſſac S. 419., jedoch ohne Beweis, mitgetheilt. Einen Beweis gab zuerst v. Ettingshausen im siebenten Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik S. 444., und dann auch Crelle im dreizehnten Bande seines Journals. Den letzten Beweis werden wir dem Wesentlichen nach hier mittheilen.

1. Nach dem Artikel Gleichung (58. IV.) i. d. Z. sind wir berechtigt anzunehmen, daß die gegebene Gleichung

$$1.\quad f(x) = 0,$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des nten Grades bezeichnen soll, bloß ungleiche Wurzeln hat.

Die erste derivirte Function von $f(x)$ wollen wir im Folgenden durch $f_1(x)$ bezeichnen, so daß also

$$2.\quad f'(x) = f_1(x)$$

ist, und wollen nun eine Reihe von Größen auf folgende Art bilden. Man dividire $f(x)$ durch $f_1(x)$, und bezeichne den Quotienten durch q_1, den Rest, negativ genommen, durch $f_2(x)$; hierauf dividire man $f_1(x)$ durch $f_2(x)$, und bezeichne den Quotienten durch q_2, den Rest, negativ genommen, durch $f_3(x)$; eben so dividire man $f_2(x)$ durch $f_3(x)$, bezeichne den Quotienten durch q_3, den Rest, negativ genommen, durch $f_4(x)$, und setze dieses Verfahren überhaupt bis zu dem negativ genommenen Reste $f_n(x)$ fort; so erhält man die folgende Reihe von Gleichungen:

$$3.\quad \begin{cases} f(x) = q_1 f_1(x) - f_2(x), \\ f_1(x) = q_2 f_2(x) - f_3(x), \\ f_2(x) = q_3 f_3(x) - f_4(x), \\ f_3(x) = q_4 f_4(x) - f_5(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-2}(x) = q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x), \end{cases}$$

und wird sich nun leicht von den folgenden Eigenschaften der Größen

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_n(x)$$

überzeugen.

I. $f_n(x)$ ist jederzeit eine constante Größe.

Da nämlich nach der Voraussetzung $f(x)$ vom nten, und nach der aus dem Artikel Gleichung (47.) i. d. Z. bekannten Methode, die derivirten Functionen einer ganzen rationalen algebraischen Function zu entwickeln, $f_1(x)$ vom $(n-1)$sten Grade ist; so ergiebt sich aus der Natur der Division auf der Stelle, daß die Functionen

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_{n-1}(x),\ f_n(x)$$

nach der Ordnung im Allgemeinen vom

$$n\text{ten},\ (n-1)\text{sten},\ (n-2)\text{ten},\ \ldots.\ 1\text{sten},\ 0\text{ten}$$

Grade sind, und folglich $f_n(x)$, wie behauptet wurde, jederzeit eine constante Größe ist.

II. Keines der Größenpaare

$$f(x) \text{ und } f_1(x),$$
$$f_1(x) \text{ und } f_2(x),$$
$$f_2(x) \text{ und } f_3(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_{n-1}(x) \text{ und } f_n(x)$$

verschwindet für denselben Werth von x.

Wäre nämlich für $x = \alpha$ zugleich

$$f(\alpha) = 0 \text{ und } f_1(\alpha) = 0,$$

d. i.

$$f(\alpha) = 0 \text{ und } f'(\alpha) = 0;$$

so hätte nach dem Artikel Gleichung (58. III.) i. d. Z. die Gleichung $f(x) = 0$ mindestens zwei einander gleiche Wurzeln, welches gegen die Voraussetzung ist. Daher können $f(x)$ und $f_1(x)$ für keinen Werth von x zugleich verschwinden.

Wäre ferner für $x = \alpha$ zugleich

$$f_1(\alpha) = 0 \text{ und } f_2(\alpha) = 0;$$

so wäre nach dem Artikel Gleichung (15.) i. d. Z. $x - \alpha$ ein gemeinschaftlicher Factor von $f_1(x)$ und $f_2(x)$; also, wegen der Gleichung

$$f(x) = q_1 f_1(x) - f_2(x),$$

auch ein Factor von $f(x)$, und folglich zugleich

$$f(\alpha) = 0, \quad f_1(\alpha) = 0,$$

welches gegen das vorher Bewiesene streitet. Daher können $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für keinen Werth von x zugleich verschwinden.

Wäre ferner für $x = \alpha$ zugleich

$$f_2(\alpha) = 0 \text{ und } f_3(\alpha) = 0;$$

so wäre nach dem angeführten Satze aus dem Artikel Gleichung wieder $x - \alpha$ ein gemeinschaftlicher Factor von $f_2(x)$ und $f_3(x)$; wegen der Gleichung

$$f_1(x) = q_2 f_2(x) - f_3(x)$$

auch ein Factor von $f_1(x)$, und folglich zugleich

$$f_1(\alpha) = 0, \quad f_2(\alpha) = 0,$$

welches wieder gegen das vorher Bewiesene streitet, so daß also auch $f_2(x)$ und $f_3(x)$ für keinen Werth von x zugleich verschwinden können, und nun auch erhellen wird, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann.

III. Wenn irgend ein Glied $f_k(x)$ der Reihe

$$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x),$$

welches weder das erste, noch das constante letzte Glied dieser Reihe ist, für den reellen Werth a von x verschwindet; so verschwindet keines der beiden Glieder $f_{k-1}(x)$ und $f_{k+1}(x)$ für $x = a$, und $f_{k-1}(a)$ und $f_{k+1}(a)$ haben jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen.

Wäre $f_{k-1}(a) = 0$, so wäre zugleich

$$f_{k-1}(a) = 0 \text{ und } f_k(a) = 0,$$

welches nach II. nie der Fall seyn kann. Eben so wenig kann $f_{k+1}(a) = 0$ seyn, weil sonst zugleich

$$f_k(a) = 0 \text{ und } f_{k+1}(a) = 0$$

wäre, welches wieder gegen das in II. Bewiesene streitet. Nun ist aber nach (3.) für jedes x

$$f_{k-1}(x) = q_k f_k(x) - f_{k+1}(x),$$

und folglich auch

$$f_{k-1}(a) = (q_k) f_k(a) - f_{k+1}(a),$$

wenn (q_k) den Werth der Function q_k für $x = a$ bezeichnet. Weil nun $f_k(a) = 0$ ist; so ist

$$f_{k-1}(a) = -f_{k+1}(a),$$

und $f_{k-1}(a)$ und $f_{k+1}(a)$ haben also jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen.

IV. Keine der Größen

$$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x)$$

kann identisch, d. h. für jeden beliebigen Werth von x, Null seyn.

Wäre für jeden beliebigen Werth von x

$$f_k(x) = 0;$$

so wäre, wegen der Gleichung

$$f_{k-2}(x) = q_{k-1} f_{k-1}(x) - f_k(x),$$

für jeden beliebigen Werth von x

$$f_{k-2}(x) = q_{k-1} f_{k-1}(x),$$

oder $f_{k-2}(x)$ wäre für jedes beliebige x durch $f_{k-1}(x)$ ohne Rest theilbar. Weil nun ferner

$$f_{k-3}(x) = q_{k-2} f_{k-2}(x) - f_{k-1}(x)$$

ist; so wäre für jedes x

$$f_{k-3}(x) = (q_{k-2} q_{k-1} - 1) f_{k-1}(x)$$

und folglich auch $f_{k-3}(x)$ für jedes x durch $f_{k-1}(x)$ ohne Rest theilbar. Auf diese Art weiter fortschreitend, findet man endlich, daß $f_{k-1}(x)$ sowohl in $f_1(x)$, als auch in $f(x)$, aufgehen müßte, und daß also $f(x)$ und $f_1(x)$, oder $f(x)$ und $f'(x)$, für irgend einen gewissen Werth von x zugleich verschwinden würden, die Gleichung $f(x) = 0$ folglich nach dem Artikel Gleichung (58. III.) i. d. Z. nothwendig gleiche Wurzeln haben müßte, welches gegen die Voraussetzung streitet.

2. Im Folgenden soll i immer eine unendlich kleine positive Größe bezeichnen, und die Reihe der Vorzeichen der Größen

$$f(a), f_1(a), f_2(a), f_3(a), \ldots f_n(a)$$

soll der Kürze wegen durch $\{a\}$ bezeichnet werden. Verschwindet ein Glied der Reihe

$$f(a), f_1(a), f_2(a), f_3(a), \ldots f_n(a);$$

so soll das fehlende Glied der Zeichenreihe $\{a\}$ jederzeit durch $\pm$ ausgefüllt werden, so daß man beliebig das obere oder das untere Zeichen nehmen kann. Auch bemerken wir hier ein für alle Mal, daß alle Größen, die wir im Folgenden betrachten werden, reelle Größen seyn sollen. Dies vorausgesetzt, lassen sich nun die folgenden Sätze beweisen.

I. Wenn $f_k(\alpha)$ nicht $= 0$ ist; so ist weder $f_k(\alpha - i)$, noch $f_k(\alpha + i)$, $= 0$, und diese beiden Größen haben mit $f_k(\alpha)$ jederzeit einerlei Vorzeichen. Auch wird man immer annehmen können, daß die Function $f_k(x)$ überhaupt zwischen $x = \alpha - i$ und $x = \alpha + i$ ihr Zeichen nicht ändert.

Dieser Satz erhellet auf der Stelle ohne weitern Beweis, wenn man nur bedenkt, daß i eine unendlich kleine positive Größe bezeichnet, die also, weil jede ganze rationale algebraische Function sich stetig verändert, wenn man die veränderliche Größe, von welcher sie abhängt, sich stetig verändern läßt, auch immer so klein gedacht werden kann, daß, wenn $f_k(\alpha)$ nicht $= 0$ ist, auch

keine der Größen $f_k(\alpha - i)$ und $f_k(\alpha + i) = 0$ ist, und jede dieser beiden Größen mit $f_k(\alpha)$ gleiches Vorzeichen hat.

II. Wenn $f(\alpha)$ nicht $= 0$ ist; so ist in jeder der drei Zeichenreihen

$$\{\alpha - i\},\ \{\alpha\},\ \{\alpha + i\}$$

eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln enthalten.

Verschwindet kein Glied der Reihe

$$f(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha),\ \ldots.\ f_n(\alpha)\ ;$$

so folgt der Satz unmittelbar aus I. Ist aber im Allgemeinen

$$f_k(\alpha) = 0,$$

wo nach der Voraussetzung k nicht $= 0$ ist; so haben nach (1. III.) die beiden Größen $f_{k-1}(\alpha)$ und $f_{k+1}(\alpha)$ entgegengesetzte Vorzeichen, und keine dieser beiden Größen ist $= 0$. Also ist nach I. keine der beiden Größen $f_{k-1}(\alpha - i)$, $f_{k-1}(\alpha + i) = 0$, und jede dieser beiden Größen hat mit $f_{k-1}(\alpha)$ gleiches Vorzeichen, so wie auch ganz auf dieselbe Art keine der beiden Größen $f_{k+1}(\alpha - i)$, $f_{k+1}(\alpha + i) = 0$ ist, und jede dieser beiden Größen mit $f_{k+1}(\alpha)$ einerlei Vorzeichen hat. Hieraus ergiebt sich nun, daß in Bezug auf die den Gliedern

$$f_{k-1}(\alpha - i),\ f_k(\alpha - i),\ f_{k+1}(\alpha - i)\ ;$$

$$f_{k-1}(\alpha),\ f_k(\alpha),\ f_{k+1}(\alpha)\ ;$$

$$f_{k-1}(\alpha + i),\ f_k(\alpha + i),\ f_{k+1}(\alpha + i)$$

entsprechenden Glieder der Zeichenreihen

$$\{\alpha - i\},\ \{\alpha\},\ \{\alpha + i\}$$

bloß die folgenden Fälle Statt finden können, wobei wir die Zeichen, durch welche das fehlende Glied der Zeichenreihe $\{\alpha\}$ ausgefüllt worden ist, durch Einschließung in Parentheſen unterschieden haben:

$$\begin{array}{cccc}
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp \\
\pm\ (\pm)\ \mp & \pm\ (\pm)\ \mp & \pm\ (\pm)\ \mp & \pm\ (\pm)\ \mp \\
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp \\
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp \\
\pm\ (\mp)\ \mp & \pm\ (\mp)\ \mp & \pm\ (\mp)\ \mp & \pm\ (\mp)\ \mp \\
\pm\ \pm\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \mp\ \mp & \pm\ \pm\ \mp\ .
\end{array}$$

Ueberblickt man nun diese Zeichenfolgen genauer; so überzeugt man sich auf der Stelle, daß vom ersten bis zum dritten Zeichen in jeder Zeichenreihe ein Zeichenwechsel, und nicht mehr, Statt findet, woraus sich sehr leicht ergiebt, daß, so viele Glieder der Reihe

$$f(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha),\ \ldots.\ f_n(\alpha)$$

auch verschwinden mögen, doch jederzeit die drei Zeichenreihen

$$\{\alpha - i\},\ \{\alpha\},\ \{\alpha + i\}$$

eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln enthalten werden, wenn nur, wie vorausgesetzt wurde, $f(\alpha)$ nicht $= 0$ ist, und nach **I.** folglich die drei Größen

$$f(\alpha - i),\ f(\alpha),\ f(\alpha + i),$$

deren keine nach **I.** $= 0$ ist, gleiche Vorzeichen haben.

III. Wenn die Function $f(x)$ für keinen Werth von x von $x = a$ bis $x = b$, wobei wir annehmen, daß $a < b$ sey, verschwindet; so enthalten die beiden Zeichenreihen $\{a\}$ und $\{b\}$ jederzeit eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich auf der Stelle mittelst des in **II.** bewiesenen Satzes, wenn man sich nur vorstellt, daß die Größe x von $x = a$ bis $x = b$ stetig wächst.

IV. Wenn $f(\alpha) = 0$ ist; so hat die Zeichenreihe $\{\alpha + i\}$ jederzeit einen Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe $\{\alpha - i\}$.

Weil $f(\alpha) = 0$ ist, so kann $f_1(\alpha)$, d. i. $f'(\alpha)$, nicht $= 0$ seyn, weil sonst die Gleichung $f(x) = 0$ nothwendig gleiche Wurzeln haben müßte; welches gegen die Voraussetzung streitet. Also haben nach **II.** die den Reihen

$$f_1(\alpha - i),\ f_2(\alpha - i),\ f_3(\alpha - i),\ \ldots\ f_n(\alpha - i)$$

und

$$f_1(\alpha + i),\ f_2(\alpha + i),\ f_3(\alpha + i),\ \ldots\ f_n(\alpha + i)$$

entsprechenden Zeichenreihen, welche wir der Kürze wegen durch $[\alpha - i]$ und $[\alpha + i]$ bezeichnen wollen, eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln. Da $f_1(\alpha)$ nicht $= 0$ ist; so ist nach **I.** auch keine der Größen $f_1(\alpha - i)$ und $f_1(\alpha + i) = 0$. Nach dem im Artikel Gleichung (57. I.) i. d. Z. bewiesenen Satze ist aber

$$f(\alpha - i) = f(\alpha) - if'(\alpha - \varrho i),$$

$$f(\alpha + i) = f(\alpha) + if'(\alpha + \varrho' i),$$

wo ϱ, ϱ' zwei die Einheit nicht übersteigende positive Größen bezeichnen. Weil nun

$$f'(\alpha - \varrho i) = f_1(\alpha - \varrho i),\ f'(\alpha + \varrho' i) = f_1(\alpha + \varrho' i)$$

und $f(\alpha) = 0$ ist; so ist

$$f(\alpha - i) = -if_1(\alpha - \varrho i),\ f(\alpha + i) = if_1(\alpha + \varrho' i);$$

und es hat also jederzeit $f(\alpha - i)$ mit $f_1(\alpha - \varrho i)$ entgegengesetztes, $f(\alpha + i)$ mit $f_1(\alpha + \varrho' i)$ einerlei Vorzeichen. Da aber ϱ und ϱ' positive die Einheit nicht übersteigende Größen sind; so

hat nach I. sowohl $f_1(\alpha-\varrho i)$ mit $f_1(\alpha-i)$, als auch $f_1(\alpha+\varrho' i)$ mit $f_1(\alpha+i)$ einerlei Vorzeichen, und es hat folglich auch jederzeit $f(\alpha-i)$ mit $f_1(\alpha-i)$ entgegengesetztes, $f(\alpha+i)$ mit $f_1(\alpha+i)$ einerlei Vorzeichen. Daher bilden die beiden ersten Glieder der Zeichenreihe $\{\alpha-i\}$ immer einen Zeichenwechsel, die beiden ersten Glieder der Zeichenreihe $\{\alpha+i\}$ dagegen eine Zeichenfolge, so daß also, weil nach dem Obigen die beiden Zeichenreihen $[\alpha-i]$ und $[\alpha+i]$ eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln enthalten, die Zeichenreihe $\{\alpha+i\}$ jederzeit einen Zeichenwechsel weniger wie die Zeichenreihe $\{\alpha-i\}$ hat, wie bewiesen werden sollte.

V. Zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$, welche nicht selbst Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ seyn sollen, liegen jederzeit eben so viele reelle Wurzeln dieser Gleichung, als die Zahl der Zeichenwechsel der Zeichenreihe $\{b\}$, vorausgesetzt daß $b>a$ ist, gegen die Zahl der Zeichenwechsel der Zeichenreihe $\{a\}$ Einheiten weniger enthält.

Man denke sich, daß x von $x=a$ bis $x=b$ stetig wachse; so geht nach dem in IV. bewiesenen Satze für jede zwischen a und b liegende reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ein, aber auch nur ein Zeichenwechsel der Zeichenreihe $\{a\}$ verloren, woraus sich der zu beweisende Satz unmittelbar ergiebt.

Dies ist der wichtige von Sturm gefundene Satz, und enthält also, wie schon im Eingange bemerkt wurde, offenbar ein Kriterium, durch welches man immer sicher beurtheilen kann, wie viele reelle Wurzeln einer Gleichung zwischen zwei beliebigen gegebenen Gränzen liegen müssen, wobei freilich immer die Bildung der Größen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$ aus $f(x)$ nach der gegebenen Anweisung erfordert wird.

3. Ueber diesen Satz sind nun aber noch die folgenden Bemerkungen zu machen.

I. Wenn $f(a)=0$, dagegen $f(b)$ nicht $=0$ ist; so wollen wir die Anzahl der Wechsel in der Reihe $[a]$ durch ω, die Anzahl der Wechsel in der Reihe $\{b\}$ dagegen durch ω' bezeichnen. Da man nun jedes fehlende Glied der Reihe $[a]$ durch ein beliebiges Zeichen ausfüllen kann; so wird man sich i offenbar immer so klein angenommen denken können, daß die Reihe $[a-i]$ ganz aus denselben Zeichen besteht, wie die Reihe $[a]$, und daß folglich die Anzahl der Wechsel in der Reihe $[a-i]$ auch $=\omega$ ist. Aus (2. IV.) geht aber ganz unzweideutig hervor, daß die beiden Zeichenreihen $[a-i]$ und $\{a+i\}$ jederzeit eine gleiche Anzahl von Zeichenwechseln enthalten, so daß also die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $\{a+i\}$ auch $=\omega$ ist. Nach (2. V.) ist nun die Anzahl der zwischen $a+i$ und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ der Differenz $\omega-\omega'$ gleich; also ist natürlich auch die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen

Wurzeln dieser Gleichung im vorliegenden Falle $= \omega - \omega'$, wobei die Wurzel a nicht mit gezählt ist.

II. Wenn $f(a)$ nicht $= 0$, dagegen $f(b) = 0$ ist; so sey die Anzahl der in der Reihe $\{a\}$ enthaltenen Zeichenwechsel $= \omega$, die Anzahl der in der Reihe $[b]$ enthaltenen Zeichenwechsel $= \omega'$. In diesem Falle überzeugt man sich ganz auf dieselbe Art wie vorher, daß die Anzahl der in der Reihe $\{b+i\}$ enthaltenen Zeichenwechsel $= \omega'$, und folglich nach (2. V.) die Anzahl der zwischen a und $b+i$ enthaltenen reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung $= \omega - \omega'$ ist. Daher ist jetzt die Anzahl der zwischen a und b enthaltenen reellen Wurzeln, wobei die Wurzel b nicht mit gezählt wird, $= \omega - \omega' - 1$. Nur wenn man die Wurzel b selbst mitzählen wollte, würde die Anzahl der zwischen a und b enthaltenen reellen Wurzeln in diesem Falle auch $= \omega - \omega'$ seyn.

III. Wenn $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$ ist, soll die Anzahl der in den Zeichenreihen $[a]$ und $[b]$ enthaltenen Zeichenwechsel respective durch ω und ω' bezeichnet werden. In diesem Falle ist die Anzahl der in der Reihe $\{a+i\}$ enthaltenen Zeichenwechsel $= \omega$, die Anzahl der in der Reihe $\{b+i\}$ enthaltenen Zeichenwechsel $= \omega'$, und folglich die Anzahl der zwischen $a+i$ und $b+i$ enthaltenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nach (2. V.) $= \omega - \omega'$. Also ist die Anzahl der zwischen a und b enthaltenen reellen Wurzeln, wobei a und b nicht mit gezählt werden, $= \omega - \omega' - 1$.

IV. Wir haben oben immer angenommen, daß jedes fehlende Glied der beliebigen Zeichenreihe $\{\alpha\}$ durch $\pm$ ausgefüllt worden sey. Indeß ist dies, wie man leicht übersieht, nicht unbedingt nöthig. Ist nämlich überhaupt $f_k(\alpha) = 0$; so haben nach (1. III.) $f_{k-1}(\alpha)$ und $f_{k+1}(\alpha)$ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen. Füllt man nun das dem Gliede $f_k(\alpha)$ entsprechende Glied der Zeichenreihe $\{\alpha\}$ durch $\pm$ aus; so bilden die den Gliedern $f_{k-1}(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $f_{k+1}(\alpha)$ entsprechenden Glieder der Zeichenreihe $\{\alpha\}$ entweder die Folge

$$\pm \quad \pm \quad \mp$$

oder die Folge

$$\pm \quad \mp \quad \mp$$

und geben also in jedem Falle einen Zeichenwechsel. Läßt man aber in der Zeichenreihe $\{\alpha\}$ das dem Gliede $f_k(\alpha)$ entsprechende Glied ganz weg; so geben die den Gliedern $f_{k-1}(\alpha)$ und $f_{k+1}(\alpha)$ entsprechenden Glieder $\pm \mp$ der Zeichenreihe $\{\alpha\}$ auch jederzeit einen Zeichenwechsel, und die Zeichenreihe $\{\alpha\}$ enthält also, wenn man jedes fehlende Glied ganz wegläßt, offenbar jederzeit eben so viele Zeichenwechsel, als wenn man jedes fehlende Glied durch $\pm$ ausfüllt. Daher bleiben alle obigen Sätze völlig richtig, wenn man die Zeichenreihen so bildet, daß man jedes in denselben fehlende Glied ganz wegläßt, und durch kein Zeichen ergänzt, welches allerdings die Anwendung dieser Sätze erleichtert.

4. Wenn man die Reihe der Vorzeichen derjenigen Glieder allein, die in den Größen $f(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, ... $f_n(\alpha)$ die höchste Potenz von α enthalten, durch (α) bezeichnet; so ist die Zahl der reellen Wurzeln, welche die Gleichung $f(x) = 0$ überhaupt nothwendig haben muß, der Differenz zwischen den Zahlen der Zeichenwechsel in den Reihen $(-\infty)$ und $(+\infty)$ gleich. Die Zahl der negativen reellen Wurzeln ist gleich der Differenz zwischen den Zahlen der Zeichenwechsel in den Reihen $(-\infty)$ und $\{0\}$, und die Zahl der positiven reellen Wurzeln ist gleich der Differenz zwischen den Zahlen der Zeichenwechsel in den Reihen $\{0\}$ und $(+\infty)$.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem Vorhergehenden, wovon man sich auf der Stelle überzeugt, wenn man nur bedenkt, daß offenbar sowohl die Reihen $(-\infty)$ und $\{-\infty\}$, als auch die Reihen $(+\infty)$ und $\{+\infty\}$ identisch seyn müssen.

Einige andere Bemerkungen s. m. noch in Crelles oben angeführtem Aufsatze.

T.

Taylors Lehrsatz. Cauchy hat neuerlich in seinen trefflichen **Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829.**, welche als eine neue Ausgabe seines im Jahre 1823 erschienenen **Resumé des leçons sur le calcul infinitésimal**, dessen im Artikel Differentialrechnung i. d. Z. mit gebührendem Lobe gedacht worden ist, zu betrachten sind, einen Beweis des Taylorschen Lehrsatzes in seiner weitesten Ausdehnung gegeben, welcher sich von dem a. a. O. geführten Beweise in mehreren wesentlichen Punkten unterscheidet, und in Bezug auf Einfachheit und Strenge uns nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen scheint. Mögen es daher die Schönheit des Beweises und die hohe Wichtigkeit des betreffenden Satzes entschuldigen, wenn wir beiden hier noch den Raum einiger Blätter gönnen.

1. Die reelle Function $y = f(x)$ der einen unabhängigen veränderlichen Größe x sey in der Nähe eines bestimmten Werths der unabhängigen veränderlichen Größe, welchen wir aber hier der Einfachheit wegen durch x selbst bezeichnen wollen, stetig, und der entsprechende Werth $f'(x)$ des ersten Differentialquotienten der gegebenen Function sey eine endliche bestimmte Größe, aber nicht $= 0$. Läßt man nun die unabhängige veränderliche Größe sich von x an stetig verändern; so wird

I. wenn $f'(x)$ positiv ist, die gegebene Function von $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn respective die

unabhängige veränderliche Größe von x an zu- oder abnimmt. Wenn aber

II. $f'(x)$ negativ ist; so wird die gegebene Function von $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn respective die unabhängige veränderliche Größe von x an ab- oder zunimmt.

Die der beliebigen Aenderung Δx von x entsprechende Aenderung von $f(x)$ sey Δy. Nach den Principien der Differentialrechnung ist $f'(x)$ die Gränze, welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich, und zwar bis zu jedem beliebigen Grade, nähert, wenn Δx sich der Null nähert. Für der Null unendlich nahe kommende Δx haben also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $f'(x)$ offenbar gleiche Vorzeichen. Ist nun $f'(x)$ positiv, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv, d. h. Δx und Δy haben gleiche Vorzeichen, oder x und $f(x)$ nehmen gleichzeitig zu und ab. Ist aber $f'(x)$ negativ, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativ, d. h. Δx und Δy haben ungleiche Vorzeichen, und $f(x)$ nimmt also ab oder zu, wenn respective x zu- oder abnimmt.

2. Wenn eine zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ stetige Function ihr Zeichen niemals ändert; so kann sie zwischen diesen Gränzen auch nirgends verschwinden, weil eine für einen gewissen Werth von x verschwindende stetige Function bei diesem Werthe jederzeit vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven übergeht. Umgekehrt entspricht auch jeder Aenderung des Zeichens einer stetigen Function ein Durchgang derselben durch Null. Dies vorausgesetzt, kann man aus dem in (1.) bewiesenen Satze die folgenden wichtigen Folgerungen ziehen:

I. Wir wollen annehmen, daß $b > a$ ist, und daß die Function $y = f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ stetig ist, folglich auch für jeden zwischen diesen Gränzen liegenden Werth von x einen endlichen bestimmten Werth hat. Ist nun $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets positiv, so wird nach dem in (1.) bewiesenen Satze $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets wachsen; ist dagegen $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets negativ, so wird $y =$ (x) von $x = a$ bis $x = b$ stets abnehmen.

II. Ferner wollen wir annehmen, daß $b < a$ ist, und daß die Function $y = f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ stetig ist, und folglich auch für jedes x zwischen diesen Gränzen einen endlichen bestimmten Werth hat. Ist dann $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets positiv, so wird nach (1.) $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets abnehmen; ist aber $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets ne-

gativ, so wird nach (1.) $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets zunehmen.

III. Wie also auch die Gränzen a, b beschaffen seyn mögen; so wird, wenn $y = f(x)$ und $f'(x)$ zwischen diesen Gränzen stetig sind, und $f'(x)$ zwischen denselben sein Zeichen nicht ändert, die Function $y = f(x)$ zwischen diesen Gränzen immer entweder stets wachsen oder stets abnehmen. Ein Uebergang dieser Function vom Wachsen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Wachsen kann nur dann Statt finden, wenn $f'(x)$ zwischen den in Rede stehenden Gränzen sein Zeichen ändert, also auch irgendwo zwischen denselben verschwindet. Zugleich erhellet auch, daß einem fortwährenden Wachsen oder fortwährenden Abnehmen der Function $y = f(x)$ zwischen den in Rede stehenden Gränzen jederzeit entgegengesetzte, aber sich zwischen diesen Gränzen immer gleich bleibende, Vorzeichen von $f'(x)$ entsprechen.

3. Seyen $f(x)$ und $F(x)$ zwei reelle Functionen, welche für $x = a$ beide verschwinden, und, so wie $f'(x)$ und $F'(x)$, zwischen $x = a$, $x = b$ stetig sind. Aendert nun $F'(x)$ zwischen diesen Gränzen sein Zeichen nicht; so ist, wenn **A** und **B** den kleinsten und größten Werth von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zwischen $x = a$, $x = b$ bezeichnen, jederzeit

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

zwischen **A** und **B** enthalten.

Wir wollen durch i eine beliebig oder unendlich kleine positive Größe, die nur nicht $= 0$ ist, bezeichnen, und setzen

$$A - i = A', \quad B + i = B'.$$

Nach der Voraussetzung bezeichnen **A** und **B** den kleinsten und größten Werth von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zwischen $x = a$, $x = b$. Also ist für jeden Werth von x zwischen diesen Gränzen offenbar

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} - A' > 0, \quad \frac{f'(x)}{F'(x)} - B' < 0.$$

Nach der Voraussetzung ändert ferner $F'(x)$ zwischen den in Rede stehenden Gränzen sein Zeichen nicht, und kann also zwischen diesen Gränzen, außer etwa für die Gränzwerthe a, b selbst, nie verschwinden. Setzen wir indeß für's Erste den zuletzt erwähnten Fall bei Seite, so ist $F'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ entweder stets > 0 oder stets < 0. Also ist auch von $x = a$ bis $x = b$ das eine der beiden Producte

$$F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)} - A'\right\},\quad F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)} - B'\right\},$$

d. i. die eine der beiden Größen

$$f'(x) - A'F'(x),\quad f'(x) - B'F'(x)$$

stets > 0, die andere stets < 0, wobei es übrigens unbestimmt bleibt, für welche dieser beiden Größen das Eine, und für welche das Andere Statt findet. Diese beiden Größen sind aber respective die Differentialquotienten der Functionen

$$f(x) - A'F(x),\ f(x) - B'F(x)\ .$$

Nach dem so eben Bewiesenen ist also der Differentialquotient der einen dieser beiden Functionen von $x = a$ bis $x = b$ stets > 0, der Differentialquotient der andern dagegen zwischen diesen Gränzen stets < 0. Daher wird nach (2.) die eine dieser beiden Functionen von $x = a$ bis $x = b$ stets wachsen, die andere dagegen von $x = a$ bis $x = b$ stets abnehmen. Wir haben hierbei angenommen, daß auch an den Gränzen des Intervalls a, b die derivirte Function $F'(x)$ nicht verschwinde. Wäre dies aber auch der Fall, so würde alles Obige doch für das Intervall $x = a + i$, $x = b - i$ Statt finden, wie klein man auch die positive Größe i nähme. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Functionen zwischen den in Rede stehenden Gränzen wird also das Obige offenbar auch dann noch gelten, wenn die obige Voraussetzung nicht erfüllt ist. Es wird also jederzeit die eine der beiden Functionen

$$f(x) - A'F(x),\ f(x) - B'F(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ stets wachsen, die andere dagegen stets abnehmen. Weil nun aber nach der Voraussetzung

$$f(a) = 0,\ F(a) = 0$$

ist; so ist auch

$$f(a) - A'F(a) = 0,\ f(a) - B'F(a) = 0\ .$$

Also wird offenbar die eine der beiden Größen

$$f(b) - A'F(b),\ f(b) - B'F(b)$$

jederzeit > 0, die andere dagegen < 0 seyn. Dividirt man nun mit $F(b)$, so ist auch jederzeit die eine der beiden Größen

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A',\ \frac{f(b)}{F(b)} - B'$$

> 0, die andere dagegen < 0. Weil $A' < B'$ ist; so ist klar, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A' > 0,\ \frac{f(b)}{F(b)} - B' < 0\ ,$$

oder

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A',\ \frac{f(b)}{F(b)} < B'$$

ist. Nach dem Obigen ist

$$A' = A - i, \quad B' = B + i,$$

wo die positive Größe i beliebig klein genommen werden kann; nur darf man dieselbe nicht $= 0$ selbst setzen. Deshalb kann man aus dem Vorhergehenden auch nicht unmittelbar schließen, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A, \quad \frac{f(b)}{F(b)} < B$$

ist. Gehen wir nun aber einmal wieder auf das Obige zurück, so finden wir, daß die eine der beiden Größen

$$f(x) - A'F(x), \quad f(x) - B'F(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ stets wächst, die andere dagegen stets abnimmt, und wollen der Einfachheit wegen jetzt annehmen, daß die erste dieser beiden Größen die zwischen den angegebenen Gränzen stets wachsende, die zweite dagegen die zwischen diesen Gränzen stets abnehmende Größe sey. Ferner ist für $x = a$ sowohl $f(a)$, als auch $F(a) = 0$; folglich

$$f(a) - A'F(a) = 0, \quad f(a) - B'F(a) = 0,$$

und natürlich auch

$$f(a) - AF(a) = 0.$$

Sollte nun die Größe

$$f(x) - AF(x)$$

zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ nicht auch stets wachsen; so wäre dies, weil A und A', also auch

$$f(x) - AF(x) \text{ und } f(x) - A'F(x),$$

sich beliebig nahe an einander anschließen lassen und überdies für $x = a$ die letztern Größen wirklich einander gleich, nämlich beide $= 0$ sind, offenbar nur in dem einzigen Falle denkbar, wenn der Werth der Function

$$f(x) - AF(x)$$

sich zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ gar nicht änderte, also immer $= 0$ wäre. Noch deutlicher wird dies, wenn man sich die Functionen

$$f(x) - AF(x) \text{ und } f(x) - A'F(x)$$

zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ durch zwei Curven dargestellt denkt, die, weil diese Functionen für $x = a$ beide $= 0$ sind, beide aus einem Punkte der angenommenen Abscissenaxe ausgehen. Sollte nun die erste Function zwischen den in Rede stehenden Gränzen nicht eben so wie die zweite stets wachsen; so wäre dies offenbar nur in dem einen Falle möglich, wenn die, die erste Function darstellende Curve die Abscissenaxe selbst wäre, wo man sich denn die Curve, welche die zweite Function darstellt, unendlich nahe an der Abscissenaxe hinlaufend zu denken hätte, wie etwa zwei gerade Linien, die sich unter einem unendlich kleinen Winkel schneiden. Sollte also die Function

$$f(x) - AF(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ nicht stets wachsen, so müßte für jedes x von $x = a$ bis $x = b$

$$f(x) - AF(x) = 0$$

seyn, und diese Function sich also in diesem Intervall gar nicht verändern. Also müßte in diesem Falle auch für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ offenbar die derivirte Function

$$f'(x) - AF'(x) = 0,$$

d. i. für jedes x von $x = a$ bis $x = b$

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = A,$$

dieser Bruch also in dem in Rede stehenden Interrall eine constante Größe, folglich natürlich auch $A = B$ seyn. Ganz auf dieselbe Art würde man haben schließen können, wenn man angenommen hätte, daß

$$f(x) - A'F(x)$$

die in dem Intervall $x = a$, $x = b$ fortwährend abnehmende Größe wäre, und ganz dieselbe Schlußweise würde auch auf die zweite Größe

$$f(x) - B'F(x)$$

anwendbar seyn. Ist also A nicht $= B$, so wird immer die eine der beiden Größen

$$f(x) - AF(x),\ f(x) - BF(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ stets abnehmen, die andere dagegen zwischen diesen Gränzen fortwährend wachsen. Wie vorher ist nun wieder

$$f(a) - AF(a) = 0,\ f(a) - BF(a) = 0.$$

Also muß immer die eine der beiden Größen

$$f(b) - AF(b),\ f(b) - BF(b)$$

> 0, die andere dagegen < 0 seyn. Dividirt man diese beiden Größen mit $F(b)$, so muß also auch immer die eine der beiden Größen

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A,\ \frac{f(b)}{F(b)} - B$$

> 0, die andere dagegen < 0 seyn, wo nun wieder, weil

$$\left\{\frac{f(b)}{F(b)} - A\right\} - \left\{\frac{f(b)}{F(b)} - B\right\} = B - A,$$

und, da A und B nicht einander gleich sind, $B - A > 0$ ist, auf der Stelle erhellet, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)} - A > 0,\ \frac{f(b)}{F(b)} - B < 0,$$

oder

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A,\ \frac{f(b)}{F(b)} < B$$

ist.

Ist aber $A = B$, so kann zwischen

$$A' = A - i, \quad B' = B + i$$

wo man sich wieder i unendlich klein genommen denken muß, offenbar nur A oder das ihm gleiche B liegen. Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A', \quad \frac{f(b)}{F(b)} < B'$$

ist; so ist in diesem Falle

$$\frac{f(b)}{F(b)} = A = B.$$

In allen Fällen kann man aber sagen, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

zwischen A und B enthalten ist.

Da A und B respective der kleinste und größte Werth von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zwischen $x = a$, $x = b$ sind; so ist klar, daß, wenn $A = B$ ist, diese Function jederzeit in dem in Rede stehenden Intervall durchgängig denselben Werth behält, oder, wie man auch sagen kann, in diesem Intervall constant ist.

4. Nach den Voraussetzungen des vorigen Satzes ist

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

eine zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ stetige Function. Daher kann man sich dieselbe zwischen diesen Gränzen auf bekannte Weise durch eine stetige Curve dargestellt denken. Weil nun nach (3.), wenn A, B ihre vorige Bedeutung behalten, die Größe

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

jederzeit zwischen A und B enthalten ist; so ist klar, daß es unter den Werthen der Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

von $x = a$ bis $x = b$ immer einen der Größe

$$\frac{f(b)}{F(b)}$$

gleichen Werth geben muß, so daß also, wenn wir den entsprechenden Werth von x durch ξ bezeichnen,

$$\frac{f(b)}{F(b)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

ist. In dem Falle, wo A und B ungleich sind, ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{f(b)}{F(b)} > A, \quad \frac{f(b)}{F(b)} < B,$$

so daß also in diesem Falle ξ offenbar jederzeit größer wie der kleinere, kleiner wie der größere der beiden Gränzwerthe a, b ist. In dem Falle, wo $A = B$ ist, hat nach (3.) die Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

in dem Intervall $x = a$, $x = b$ lauter einander gleiche Werthe, so daß man also in diesem Falle für ξ jeden beliebigen zwischen a und b liegenden Werth, also auch immer ξ größer wie der kleinere, kleiner wie der größere der beiden Gränzwerthe a, b nehmen kann. Demnach können wir annehmen, daß in allen Fällen ξ größer wie der kleinere, kleiner wie der größere der beiden Gränzwerthe a, b ist.

5. Sind nun $f(x)$, $F(x)$ und $f'(x)$, $F'(x)$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = a + i$, wo i eine beliebig große positive oder negative Größe bezeichnen soll, stetig, und ändert $F'(x)$ zwischen diesen Gränzen sein Zeichen nicht; so folgt aus dem in (4.) Bewiesenen unmittelbar, daß, wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ beide verschwinden, jederzeit

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f'(a+i_1)}{F'(a+i_1)}$$

ist, wo i_1 eine Größe bezeichnet, welche mit i gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern numerischen oder absoluten Werth, wie i hat. Eine mehrfache successive Anwendung dieses Satzes führt dann weiter zu dem folgenden in jeder Beziehung überaus wichtigen Theorem:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x);$$
$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ \ldots\ F^{(n-1)}(x)$$

für $x = a$ sämmtlich verschwinden, und, so wie auch die Functionen $f^{(n)}(x)$, $F^{(n)}(x)$, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = a + i$ stetig sind, keine der Functionen

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ F^{(n)}(x)$$

aber zwischen diesen Gränzen ihr Zeichen ändert; so ist immer

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f^{(n)}(a+i_n)}{F^{(n)}(a+i_n)},$$

wo i_n eine Größe bezeichnet, die mit i gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern absoluten oder numerischen Werth wie i hat.

Nach (4.) ist nämlich unter den gemachten Voraussetzungen

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f'(a+i_1)}{F'(a+i_1)},$$
$$\frac{f'(a+i_1)}{F'(a+i_1)} = \frac{f''(a+i_2)}{F''(a+i_2)},$$
$$\frac{f''(a+i_2)}{F''(a+i_2)} = \frac{f'''(a+i_3)}{F'''(a+i_3)},$$
u. s. w. u. s. w.
$$\frac{f^{(n-1)}(a+i_{n-1})}{F^{(n-1)}(a+i_{n-1})} = \frac{f^{(n)}(a+i_n)}{F^{(n)}(a+i_n)},$$

wo die Größen $i, i_1, i_2, \ldots i_n$ sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, die numerischen Werthe dieser Größen aber eine fortwährend abnehmende Reihe bilden. Daß hieraus der zu beweisende Satz auf der Stelle folgt, bedarf keiner weitern Erläuterung.

Weil i_n mit i gleiches Vorzeichen hat, der absolute Werth von i_n aber kleiner wie der absolute Werth von i ist; so kann man $i_n = \varrho i$ setzen, wo ϱ eine positive Größe bezeichnet, die kleiner als die Einheit ist. Unter den Voraussetzungen unsers obigen Satzes ist also immer

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)} = \frac{f^{(n)}(a+\varrho i)}{F^{(n)}(a+\varrho i)}.$$

6. Wir wollen jetzt $a = 0$ und $F(x) = x^n$, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, setzen, und nun untersuchen, ob die für $F(x)$ gesetzte Function den Bedingungen, unter welchen allein der vorher bewiesene Lehrsatz gültig ist, genügt. Durch Differentiation erhält man

$$F(x) = x^n,$$
$$F'(x) = nx^{n-1},$$
$$F''(x) = (n-1)nx^{n-2},$$
$$F'''(x) = (n-2)(n-1)nx^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(n-1)}(x) = 2.3.4.5\ldots\ldots nx,$$
$$F^{(n)}(x) = 1.2.3.4\ldots\ldots n.$$

Für $x = 0$ verschwinden also offenbar

$$F(x), F'(x), F''(x), \ldots F^{(n-1)}(x).$$

Auch sind

$$F(x), F'(x), F''(x), \ldots F^{(n-1)}(x), F^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = i$ stetig, und endlich ändert offenbar keine der Functionen

$$F'(x), F''(x), F'''(x), \ldots F^{(n)}(x)$$

zwischen diesen Gränzen ihr Zeichen. Daher genügt die Function $F(x) = x^n$ offenbar allen Bedingungen des in (5.) bewiesenen allgemeinen Lehrsatzes, und wir erhalten nun ferner folgenden wichtigen Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

für $x=0$ sämmtlich verschwinden, und, so wie die Function $f^{(n)}(x)$, zwischen den Gränzen $x=0$, $x=i$ stetig sind; so ist immer

$$f(i) = \frac{i^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(\varrho i),$$

wo ϱ eine positive Größe bezeichnet, die kleiner als die Einheit ist.

Uebrigens kann man diesen Satz auch auf folgende Art aussprechen:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

für $x=0$ sämmtlich verschwinden, und, so wie die Function $f^{(n)}(x)$, zwischen den Gränzen $x=0$, $x=x$ stetig sind; so ist immer

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(\varrho x),$$

wo ϱ ein positiver ächter Bruch ist.

7. Wir wollen nun annehmen, daß die Functionen

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x),\ \ldots\ \varphi^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x=0$, $x=x$ stetig sind, also auch für alle Werthe von x zwischen diesen Gränzen endliche bestimmte Werthe haben, und setzen nun

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1}\varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0);$$

so erhalten wir durch Differentiation:

$$f'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(0) - \frac{x}{1}\varphi''(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi'''(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-2}}{1.2.3..(n-2)}\varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f''(x) = \varphi''(x) - \varphi''(0) - \frac{x}{1}\varphi'''(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi^{IV}(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-3}}{1.2.3..(n-3)}\varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f'''(x) = \varphi'''(x) - \varphi'''(0) - \frac{x}{1}\varphi^{IV}(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi^{V}(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-4}}{1.2.3..(n-4)}\varphi^{(n-1)}(0),$$

u. s. w. u. s. w.

$$f^{(n-1)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(0),$$
$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x).$$

Die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n-1)}(x)$$

verschwinden also sämmtlich für $x = 0$, und sind, so wie $f^{(n)}(x)$, wegen der oben gemachten Voraussetzungen zwischen $x = 0$, $x = x$ offenbar stetig, so daß also die Function $f(x)$ und ihre obigen derivirten Functionen augenscheinlich den Bedingungen des in (6.) bewiesenen Satzes vollständig genügen. Daher ist nach (6.)

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\varrho x).$$

Aber nach dem Obigen $f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$; folglich auch

$$f^{(n)}(\varrho x) = \varphi^{(n)}(\varrho x),$$

und daher, wenn man für $f(x)$ seinen obigen Ausdruck setzt,

$$\varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1}\varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0) = \frac{x^n}{1\ldots n}\varphi^{(n)}(\varrho x);$$

also

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1\ldots n}\varphi^{(n)}(\varrho x),$$

oder, wenn wir wieder $f(x)$ für $\varphi(x)$ schreiben,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x),$$

unter der Voraussetzung, daß

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = x$ stetig sind. ϱ ist immer positiv und < 1.

8. Sey jetzt $x = a + z$ und

$$f(x) = F(z);$$

so ist, weil

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 1$$

ist, nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$F(z) = f(x),$$
$$F'(z) = f'(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f'(x),$$

$$F''(z) = f''(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f''(x),$$

$$F'''(z) = f''(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f'''(x).$$

u. s. w. u. s. w.

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(x)\frac{\partial x}{\partial z} = f^{(n)}(x).$$

Seyen nun

$$F(z),\ F'(z),\ F''(z),\ F'''(z),\ \ldots.\ F^{(n)}(z)$$

von $z = 0$ bis $z = z$ stetig; so ist nach (7.)

$$F(z) = F(0) + \frac{z}{1}F'(0) + \frac{z^2}{1.2}F''(0) + \frac{z^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(z) + \frac{z^n}{1\ldots n}F^{(n)}(\varrho z).$$

Für $z = 0$ ist $x = a$, für $z = z$ ist $x = x$; auch ist $z = x - a$. Setzt man ϱz für z, so erhält x den Werth $a + \varrho z$, d. i. $a + \varrho(x - a)$. Hieraus ergiebt sich nun mittelst des Obigen auf der Stelle folgender Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots.\ f^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x = a$, $x = x$ stetig sind; so ist immer

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots..$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a + \varrho(x-a)).$$

Setzen wir $x - a = i$, so ist $x = a + i$, und es ist folglich, wenn

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots.\ f^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x = a$, $x = a + i$ stetig sind,

$$f(a+i) = f(a) + \frac{i}{1}f'(a) + \frac{i^2}{1.2}f''(a) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(a) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a+\varrho i).$$

Setzt man x für a, so kann man diesen Satz auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots.\ f^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x = x$, $x = x + i$, d. i. von x bis $x + i$ stetig sind; so ist

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{i^{(n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x+\varrho i).$$

9. Man setze jetzt

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots \quad (1)$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \varphi(a) .$$

Differentiirt man diese Gleichung nach a, so erhält man:

$$0 = \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a) + \varphi'(a) .$$

$$\varphi'(a) = -\frac{(x-a)^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a) .$$

Auch erhält man leicht, wenn man $a = x$ setzt,

$$\varphi(x) = 0 .$$

Nach (8.) ist nun, wenn man nur φ für f schreibt, und $n = 1$ setzt:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a + \varrho(x-a)) ,$$

d. i., weil $\varphi(x) = 0$ ist,

$$\varphi(a) = -(x-a)\varphi'(a + \varrho(x-a)) .$$

Weil aber

$$\varphi'(a) = -\frac{(x-a)^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a)$$

ist; so ist

$$\varphi'(a + \varrho(x-a)) = -\frac{\{x-a-\varrho(x-a)\}^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a))$$
$$= -\frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)) .$$

Folglich ist

$$\varphi(a) = \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1.2.3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)) ,$$

und daher auch immer

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots .$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1.2.3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)) .$$

Für $x - a = i$, $x = a + i$ erhält man hieraus

$$f(a+i) = f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \frac{i^2}{1.2} f''(a) + \ldots .$$
$$\ldots + \frac{i^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho i) ,$$

oder, wenn wir x für a setzen,

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \ldots .$$
$$\ldots + \frac{i^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1 \ldots (n-1)} f^{(n)}(x + \varrho i) .$$

Für $x = 0$ wird

$$f(i) = f(0) + \frac{i}{1}f'(0) + \frac{i^2}{1.2}f''(0) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{(1-\varrho)^{n-1}i^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho i),$$

oder, wenn man x für i setzt,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho x).$$

Im Artikel Differentialrechnung (37.) i. d. Z. ist eine ganz andere Ableitung dieser Formeln gegeben worden.

10. Wenn nun eine der Größen

$$\frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x) \text{ oder } \frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho x)$$

sich der Null immer mehr und mehr nähert, wenn n wächst, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt, also, wie man dies auch kurz ausdrücken kann, für $n = \infty$ verschwindet; so ist jederzeit nach dem Vorhergehenden

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots,$$

Diese Reihe nennt man bekanntlich die Maclaurinsche Reihe, wobei man nur nicht zu vergessen hat, daß $f(x)$ nebst seinen sämmtlichen Differentialquotienten zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = x$ stetig seyn muß. Ueber die Maclaurinsche Reihe s. m. auch einen Aufsatz von C. G. J. Jacobi in Crelles Journal. B. XII. S. 263.

Eben so ist, wenn eine der Größen

$$\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x + \varrho i), \text{ oder } \frac{(1-\varrho)^{n-1}i^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x + \varrho i)$$

für $n = \infty$ verschwindet, und $f(x)$ nebst seinen sämmtlichen Differentialquotienten zwischen den Gränzen $x = x$, $x = x + i$ stetig ist, jederzeit

$$f(x + i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots,$$

welches bekanntlich der Taylorsche Lehrsatz ist.

11. Wir machen hierbei nun noch die folgende Bemerkung.

Wenn $m < n$ und > 1 ist, so ist auch

$$m(m-1) < n(m-1),$$

woraus sich ferner leicht

$$n < m(n-m+1)$$

ergiebt.

Ist nun zuerst $n = 2\mu$, so ist

$$2\mu = 1.2\mu,$$
$$2\mu < 2(2\mu - 1)$$
$$2\mu < 3(2\mu - 2)$$
$$2\mu < 4(2\mu - 3)$$
$$\cdots\cdots$$
$$2\mu < (\mu - 1)(\mu + 2)$$
$$2\mu < \mu(\mu + 1).$$

Also ist, wenn nur $\mu > 1$ ist,

$$(2\mu)^{\mu} < 1.2.3.4 \ldots 2\mu.$$

Ist also n eine gerade Zahl, die größer als 2 ist, so ist

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3 \ldots n.$$

Für $n = 2$ ist offenbar

$$2^{\frac{2}{2}} = 1.2.$$

Ist ferner $n = 2\mu + 1$, so ist

$$2\mu + 1 = 1(2\mu + 1)$$
$$2\mu + 1 < 2.2\mu$$
$$2\mu + 1 < 3(2\mu - 1)$$
$$2\mu + 1 < 4(2\mu - 2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$2\mu + 1 < (\mu - 1)(\mu + 3)$$
$$2\mu + 1 < \mu(\mu + 2).$$

Also ist

$$(2\mu + 1)^{\mu} \leqq 1 \ldots \mu(\mu + 2) \ldots (2\mu + 1)$$

und folglich

$$(2\mu + 1)^{\mu}(\mu + 1) \leqq 1.2.3 \ldots (2\mu + 1).$$

Ist aber $\mu > 0$, so ist

$$2\mu + 1 < (\mu + 1)^2,$$

d. i.

$$(2\mu + 1)^{\frac{1}{2}} < \mu + 1.$$

Also ist für $\mu > 0$ jederzeit

$$(2\mu + 1)^{\mu} \cdot (2\mu + 1)^{\frac{1}{2}} < 1.2.3 \ldots (2\mu + 1)$$

d. i.

$$(2\mu + 1)^{\frac{2\mu + 1}{2}} < 1.2.3 \ldots (2\mu + 1).$$

Für jedes ungerade n, welches > 1 ist, ist folglich

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3 \ldots n.$$

Daher ist für jedes n, welches > 2 ist,

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3 \ldots n .$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist

$$1^{\frac{1}{2}} = 1, \quad 2^{\frac{2}{2}} = 1.2 .$$

Für $n > 2$ ist folglich immer

$$\frac{x^n}{1.2.3..n} < \frac{x^n}{n^{\frac{n}{2}}},$$

d. i.

$$\frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n .$$

Für $\sqrt{n} > x$, $n > x^2$ nähert sich, wenn n wächst, der Bruch

$$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$$

immer mehr und mehr der Null und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n groß genug nimmt. Für $n = \infty$ verschwindet also sowohl dieser Bruch, als auch um so mehr der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} .$$

Wenn nun $f^{(n)}(\varrho x)$ nur, indem n wächst, einen gewissen bestimmten endlichen Werth nicht übersteigt; so verschwindet offenbar

$$\frac{x^n}{1 \ldots . n} f^{(n)}(\varrho x)$$

für $n = \infty$, und es ist folglich unter dieser Voraussetzung jederzeit nach (10.)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots .$$

Eben so ist, wenn

$$f^{(n)}(x + \varrho i)$$

einen gewissen endlichen bestimmten Werth nie übersteigt, wie groß man auch n werden lassen mag, nach (10.) jederzeit

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots ,$$

wenn nur auch die übrigen wegen der Stetigkeit der Functionen in (10.) zum Grunde gelegten Bedingungen erfüllt sind.

Anwendungen von diesen wichtigen Sätzen zu machen unterlassen wir hier, da deren im Artikel Differentialrechnung i. d. Z. schon eine große Anzahl vorgekommen ist, die auch hier benutzt werden können. Eben so begnügen wir uns, wegen des Taylorschen Lehrsatzes für Functionen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen auf die in dem genannten Artikel (48.) gege-

bene Darstellung zu verweisen, da eine wesentliche Abkürzung derselben uns nicht möglich zu seyn scheint, und sie sich unmittelbar an das Vorhergehende ohne alle Schwierigkeit anknüpfen läßt, ganz auf dieselbe Art, wie a. a. O. geschehen ist. Der oben gegebene in vieler Beziehung einfachere Beweis des Taylorschen Satzes für Functionen mit einer veränderlichen Größe schien uns zu wichtig zu seyn, als daß wir demselben hier nicht eine Stelle einräumen zu müssen geglaubt hätten. Leider wird in den Lehrbüchern der Differentialrechnung immer noch zu oft die so wichtige Entwickelung des sogenannten Restes der Taylorschen Reihe völlig vernachlässigt, ein Verfahren, welches auf keine Weise gerechtfertigt werden kann, da es mit einem strengen Vortrage ganz unvereinbar ist.

Trigonometrie. Allgemeine Beweise der Grundformeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie s. m. im Art. Coordinaten (13. 14.) i. d. Z. Einen geometrischen Beweis der in (21.) bewiesenen merkwürdigen Formel $d^2 = r(r-2r')$ s. m. im Art. Dreieck (19.) i. d. Z. Den in (76.) gegebenen Formeln ist noch die Formel

$$\sin c = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } \beta}$$

beizufügen, welche c unmittelbar aus b und β giebt. Den Formeln in (133.) ist noch die Formel $\partial c = \sin a \sin b \partial\gamma$, den Formeln in (134.) die Formel $\partial\gamma = \sin a \sin\beta \partial c$ beizufügen.

Es ist dem Verfasser dieser Zusätze wohl erlaubt, der Literatur der sphäroidischen Trigonometrie jetzt sein eigenes ausführliches Werk über diesen Gegenstand: **Sphäroidische Trigonometrie von J. A. Grunert. Berl. 1833. 4.** beizufügen. In diesem Werke ist vorzüglich auch auf die wichtigen Untersuchungen Rücksicht genommen, mit welchen Gauß in der trefflichen Abhandlung: **Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gott. 1828.** die Wissenschaft bereichert hat. Nachzutragen sind auch noch: Hülfstafeln zur Berechnung der Längen- und Breitenunterschiede aus gemessenen Meridian- und Perpendikel-Abständen von J. Oltmanns. Berl. 1826.

U.

Ultra-elliptische Functionen, s. Elliptische Functionen (59.).

Umhüllungscurven und Umhüllungsflächen, s. Einhüllende Curven und Flächen (1.) und (11.) i. d. Z.

V.

Vernier, s. Theilung (19.).

Verwandtschaft der Collineation, Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz, Gleichheit und Reciprocität.

I. Allgemeine Vorbereitung.

1. Wir wollen uns zwei beliebige Systeme von Punkten denken, deren jedes jedoch für sich in einer Ebene liegen soll. Die Coordinaten der Punkte in dem einen Systeme, in Bezug auf zwei beliebige recht- oder schiefwinklige Coordinatenaxen, sollen im Allgemeinen durch x, y, die Coordinaten der Punkte in dem andern Systeme, ebenfalls in Bezug auf zwei beliebige recht- oder schiefwinklige Coordinatenaxen, dagegen im Allgemeinen durch x_1, y_1 bezeichnet werden. Diese beiden Systeme von Punkten wollen wir uns aber nicht als ganz unabhängig von einander, sondern vielmehr in einer gewissen gegenseitigen Abhängigkeit denken. Suchen wir nun diese gegenseitige Abhängigkeit der beiden Systeme im Allgemeinen analytisch auszudrücken, und denken uns dabei immer die Coordinaten eines der Punkte in beiden Systemen als gegeben; so finden wir auf der Stelle, daß in dieser Beziehung im Allgemeinen nur zwei Fälle Statt finden können, indem nämlich zwischen den vier Größen x, y; x_1, y_1 entweder bloß eine oder zwei Gleichungen gegeben seyn können, durch welche eben die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Systeme analytisch ausgedrückt wird.

Um nun zunächst den ersten dieser beiden Fälle etwas näher zu beleuchten; so wollen wir annehmen, daß zwischen den vier Größen x, y; x_1, y_1 überhaupt die Gleichung

$$1. \quad F(x, y, x_1, y_1) = 0$$

gegeben sey. Da in diesem Falle zwischen den vier Größen, x, y, x_1, y_1, von denen immer entweder x, y oder x_1, y_1 als gegeben betrachtet werden, bloß eine Gleichung gegeben ist; so ist klar, daß aus den beiden als gegeben betrachteten Größen die beiden andern nicht bestimmt werden können, und man also in diesem Falle auch nicht sagen kann, daß einem bestimmten Punkte des einen Systems ein bestimmter Punkt des andern Systems entspreche. Denkt man sich aber in der obigen Gleichung z. B. x, y als gegeben oder constant; so enthält dieselbe bloß noch die beiden veränderlichen Größen x_1, y_1, und stellt also bekanntlich eine bestimmte stetige Folge von Punkten des zweiten Systems oder, was dasselbe ist, eine bestimmte ganz in der Ebene des zweiten Systems liegende Curve dar. Denkt man sich umgekehrt x_1, y_1 als constant oder gegeben; so stellt die obige Gleichung eine ganz bestimmte stetige Folge von Punkten des ersten Systems, d. h. eine bestimmte ganz in der Ebene des ersten Systems liegende Curve dar, und man sieht also, daß in dem Falle, wo zwischen den vier Größen x, y; x_1, y_1 nur eine Gleichung gegeben ist, jederzeit jedem Punkte eines jeden der beiden Systeme eine bestimmte

stetige Folge von Punkten des andern Systems, oder eine bestimmte ganz in der Ebene des andern Systems liegende Curve entspricht.

Wenn aber zwischen den vier Größen $x, y; x_1, y_1$ zwei Gleichungen, die wir im Allgemeinen durch

$$2. \quad F(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$$

bezeichnen wollen, gegeben sind; so können offenbar aus den beiden als gegeben betrachteten Größen x, y oder x_1, y_1 die beiden andern, nämlich respective x_1, y_1 oder x, y, jederzeit bestimmt werden, und es entspricht also in diesem Falle jedem bestimmten Punkte eines jeden der beiden Systeme immer ein bestimmter Punkt des andern Systems.

Im Allgemeinen kann man zwei ebene Systeme von Punkten, zwischen deren Coordinaten x, y, x_1, y_1 entweder zwei oder eine Gleichung gegeben sind, mit einander verwandt oder verwandte ebene Systeme nennen. Die Verwandtschaft, wo zwischen $x, y; x_1, y_1$ zwei Gleichungen gegeben sind, ist offenbar als die nähere zu betrachten, und soll im Folgenden die erste Art der Verwandtschaft ebener Systeme genannt werden. Dagegen soll die entferntere Verwandtschaft, wo zwischen $x, y; x_1, y_1$ nur eine Gleichung gegeben ist, die zweite Art der Verwandtschaft ebener Systeme genannt werden. Bei der ersten Art der Verwandtschaft ebener Systeme entspricht jedem bestimmten Punkte des einen Systems ein bestimmter Punkt des andern Systems, und zwei solche Punkte der beiden Systeme sollen daher im Folgenden auch einander entsprechende Punkte genannt werden. Bei der zweiten Art der Verwandtschaft ebener Systeme entspricht dagegen jedem Punkte des einen Systems eine bestimmte stetige Folge von Punkten des andern Systems, oder eine ganz in der Ebene des andern Systems liegende Curve. Jeder Punkt des einen Systems, und die bei der zweiten Art der Verwandtschaft ebener Systeme demselben entsprechende stetige Folge von Punkten des andern Systems, sollen in Beziehung auf einander bei dieser Art der Verwandtschaft ebener Systeme Pol und Polare von einander genannt werden.

2. Die Ausdehnung der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf Systeme von Punkten im Raume ist keiner Schwierigkeit unterworfen. Sollen nämlich zwei solche Systeme in einer gewissen Verbindung mit einander stehen; so können zwischen den Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 der Punkte in beiden Systemen offenbar bloß entweder eine, oder zwei oder drei Gleichungen gegeben seyn. Ist nun zwischen den sechs Größen $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ die eine Gleichung

$$3. \quad F(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

gegeben; so entspricht jedem bestimmten Punkte des einen Systems offenbar eine bestimmte stetige Folge in einer gewissen krumm-

men Fläche liegender Punkte des andern Systems. Sind dagegen zwischen den sechs Größen x, y, z; x_1, y_1, z_1 die zwei Gleichungen

$$4.\quad F(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,\quad \Phi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

gegeben; so entspricht jedem Punkte des einen Systems eine bestimmte stetige Folge in einer gewissen doppelt gekrümmten Curve liegender Punkte des andern Systems. Sind aber zwischen den sechs Größen x, y, z; x_1, y_1, z_1 die drei Gleichungen

$$5.\ F(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \Phi(x, y, z, x_1, y_1 z_1) = 0, \Psi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

gegeben; so entspricht jedem bestimmten Punkte des einen Systems ein bestimmter Punkt des andern Systems. Hieraus sieht man also, daß, wenn man die Sache aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, zwischen zwei Systemen von Punkten im Raume drei Arten der Verwandtschaft Statt finden können, die man, analog mit dem Vorhergehenden, jenachdem zwischen den sechs allgemeinen Coordinaten drei, zwei oder eine Gleichung gegeben sind, wieder respective die erste, zweite, dritte Art der Verwandtschaft räumlicher Systeme von Punkten nennen könnte.

3. Es ist hier nicht der Ort, die vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen weiter zu verfolgen und weiter auszuführen. Daß aber unter jeder der oben näher charakterisirten Hauptarten der Verwandtschaft sowohl ebener als auch räumlicher Systeme von Punkten wieder eine unendliche Menge einzelner verschiedener Verwandtschaften als Nebenarten enthalten sind, versteht sich von selbst, da ja die zwischen den Coordinaten x, y; x_1, y_1 oder x, y, z; x_1, y_1, z_1 gegebenen Gleichungen nach unendlich vielen verschiedenen Gesetzen gebildet seyn können. In neuester Zeit sind vorzüglich zwei besonders merkwürdige und an wichtigen Folgerungen reiche Fälle dieser unendlich vielen Verwandtschaften, die nach den obigen ganz allgemeinen Begriffen zwischen zwei Systemen von Punkten Statt finden können, von den Geomtern hervorgehoben und einer sorgfältigen Untersuchung gewürdigt worden. Indem wir im Folgenden einige der wichtigsten Resultate dieser in vieler Beziehung ausgezeichneten Untersuchung mittheilen, sind wir jedoch durch die Beschränktheit des Raumes genöthigt, uns dabei auf ebene Systeme zu beschränken.

4. Die erste Art der beiden in Rede stehenden Verwandtschaften heißt die Verwandtschaft der Collineation, und ist als ein besonderer Fall der ersten der beiden Hauptarten der Verwandtschaft, welche nach dem Obigen zwischen zwei ebenen Systemen von Punkten überhaupt bloß Statt finden können, zu betrachten. Wenn nämlich zwei nach der ersten Hauptart der Verwandtschaft ebener Systeme von Punkten verwandte Systeme so beschaffen sind, daß, wenn man sich eine Folge in gerader Linie liegender Punkte des einen Systems denkt, jederzeit auch die diesen Punkten entsprechenden Punkte des andern Systems in gerader Linie liegen; so

sagt man, daß die beiden Systeme einander collinear verwandt seyen, oder daß zwischen denselben Collineations-Verwandtschaft oder Verwandtschaft der Collineation Statt finde.

Um die Form der allgemeinen Gleichungen

$$6.\quad F(x, y, x_1, y_1) = 0,\quad \Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$$

im Falle der Collineations-Verwandtschaft zu bestimmen, denke man sich eine Folge in gerader Linie liegender Punkte des ersten Systems, und

$$7.\quad Ay + Bx + C = 0$$

sey die Gleichung dieser geraden Linie. Mittelst der beiden Gleichungen 6. zwischen $x, y; x_1, y_1$ kann man x und y bloß als Functionen von x_1 und y_1 darstellen, und kann also

$$8.\quad y = f(x_1, y_1),\quad x = \varphi(x_1, y_1)$$

setzen. Führt man dies in die Gleichung (7.) ein; so ergiebt sich

$$9.\quad Af(x_1, y_1) + B\varphi(x_1, y_1) + C = 0.$$

Da nun diese Gleichung nach dem Begriffe der Collinations-Verwandtschaft eine gerade Linie darstellen muß; so können die Functionen $f(x_1, y_1)$ und $\varphi(x_1, y_1)$, wie auf der Stelle in die Augen fällt, bloß von der allgemeinen Form

$$10.\quad f(x_1, y_1) = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + c''},$$

$$\varphi(x_1, y_1) = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + c''}$$

seyn, und es ist folglich nach (8.) auch

$$11.\quad y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + c''},\quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + c''}.$$

Bestimmt man mittelst dieser beiden Gleichungen y_1, x_1 durch y, x; so erhält man zwei Ausdrücke ganz von derselben Form wie die vorhergehenden, nämlich

$$12.\quad y_1 = \frac{\alpha y + \beta x + \gamma}{\alpha'' y + \beta'' x + \gamma''},\quad x_1 = \frac{\alpha' y + \beta' x + \gamma'}{\alpha'' y + \beta'' x + \gamma''},$$

wenn man

$$12^*.\quad \begin{cases} \alpha = b'c'' - b''c', & \beta = b''c - bc'', & \gamma = bc' - b'c; \\ \alpha' = c'a'' - c''a', & \beta' = c''a - ca'', & \gamma' = ca' - c'a; \\ \alpha'' = a'b'' - a''b', & \beta'' = a''b - ab'', & \gamma'' = ab' - a'b \end{cases}$$

setzt. Hieraus sieht man, daß die Verwandtschaft der Collineation zwischen zwei ebenen Systemen immer gegenseitig Statt findet, wie es nach dem allgemeinen Begriffe dieser Art der Verwandtschaft auch seyn muß.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen scheint es, daß die allgemeinen Fundamental-Gleichungen (11.) der Collineations-Verwandtschaft von neun Constanten abhängen. Da aber die in Rede stehenden Gleichungen sich leicht auf die Form

$$y = \frac{\frac{a}{c''}y_1 + \frac{b}{c''}x_1 + \frac{c}{c''}}{\frac{a''}{c''}y_1 + \frac{b''}{c''}x_1 + 1}, \quad x = \frac{\frac{a'}{c''}y_1 + \frac{b'}{c''}x_1 + \frac{c'}{c''}}{\frac{a''}{c''}y_1 + \frac{b''}{c''}x_1 + 1},$$

oder, wenn man nun wieder a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″ für die Brüche

$$\frac{a}{c''}, \frac{b}{c''}, \frac{c}{c''}, \frac{a'}{c''}, \frac{b'}{c''}, \frac{c'}{c''}, \frac{a''}{c''}, \frac{b''}{c''}$$

schreibt, auf die Form

$$13. \quad y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + 1}, \quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + 1}$$

bringen lassen; so ist klar, daß die Zahl der Constanten, welche in den allgemeinen Fundamental-Gleichungen der Collineations-Verwandtschaft, die man der Kürze wegen die Collineations-Gleichungen nennen kann, nothwendig vorkommen müssen, sich auf acht reducirt. Entwickelt man aus den Gleichungen (13.) die Größen y_1, x_1; so erhält man für dieselben die Formeln

$$14. \quad y_1 = \frac{\alpha y + \beta x + \gamma}{\alpha'' y + \beta'' x + \gamma''}, \quad x_1 = \frac{\alpha' y + \beta' x + \gamma'}{\alpha'' y + \beta'' x + \gamma''},$$

wo nach (12*.) nun aber offenbar

$$15. \quad \begin{cases} \alpha = b' - b''c', \ \beta = b''c - b, \ \gamma = bc' - b'c ; \\ \alpha' = c'a'' - a', \ \beta' = a - ca'', \ \gamma' = ca' - c'a ; \\ \alpha'' = a'b'' - a''b', \ \beta' = a''b - ab'', \ \gamma'' = ab' - a'b \end{cases}$$

gesetzt werden muß. Will man endlich auch y_1, x_1 unter der Form

$$16. \quad y_1 = \frac{\alpha y + \beta x + \gamma}{\alpha'' y + \beta'' x + 1}, \ x_1 = \frac{\alpha' y + \beta' x + \gamma'}{\alpha'' y + \beta'' x + 1}$$

darstellen; so muß man augenscheinlich

$$17. \quad \begin{cases} \alpha = \frac{b' - b''c'}{ab' - a'b}, \ \beta = \frac{b''c - b}{ab' - a'b}, \ \gamma = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} ; \\ \alpha' = \frac{c'a'' - a'}{ab' - a'b}, \ \beta' = \frac{a - ca''}{ab' - a'b}, \ \gamma' = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b} ; \\ \alpha'' = \frac{a'b'' - a''b'}{ab' - a'b}, \ \beta' = \frac{a''b - ab''}{ab' - a'b} \end{cases}$$

setzen.

Bei allgemeinen analytischen Rechnungen wird es häufig zweckmäßig seyn, sich der Fundamental-Gleichungen in ihrer allgemeinsten Gestalt (11.) und (12.) zu bedienen.

5. Ein besonderer Fall der zweiten der beiden Hauptarten der Verwandtschaft, welche zwischen zwei ebenen Systemen nach dem Obigen im Allgemeinen bloß Statt finden können, ist die in vieler Beziehung überaus wichtige Verwandtschaft der Reciprocität. Sind nämlich in zwei nach der zweiten Hauptart der Verwandtschaft ebener Systeme verwandten Systemen alle Pola-

ren (1.) gerade Linien; so nennt man die beiden ebenen Systeme reciproke Systeme oder sagt, daß zwischen denselben Verwandtschaft der Reciprocität oder Reciprocitäts-Verwandtschaft Statt finde.

Die allgemeine Form der Fundamental-Gleichung

$$18.\quad F(x, y, x_1, y_1) = 0$$

der Reciprocitäts-Verwandtschaft findet man sehr leicht, wenn man überlegt, daß dieselbe nach dem obigen allgemeinen Begriffe dieser Art der Verwandtschaft nothwendig sowohl in Bezug auf x_1, y_1, als auch in Bezug auf x, y, vom ersten Grade oder linear seyn muß. Denkt man sich also die obige allgemeine Gleichung zuerst nach x_1 und y_1 entwickelt oder geordnet; so muß diese Entwickelung nothwendig auf eine Gleichung von der Form

$$f(x, y).y_1 + \varphi(x, y).x_1 + \psi(x, y) = 0$$

führen. Da nun aber diese Gleichung auch in Beziehung auf x und y linear seyn muß; so können die Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ offenbar bloß von der folgenden allgemeinen Form seyn:

$f(x, y) = ay + bx + c$, $\varphi(x, y) = a'y + b'x + c'$, $\psi(x, y) = a''y + bx'' + c''$,

und man erhält also nach gehöriger Substitution die, neun Constanten enthaltende allgemeine Fundamental-Gleichung

$$19.\quad (ay + bx + c)y_1 + (a'y + b'x + c')x_1 + a''y + b''x + c'' = 0$$

oder

$$20.\quad (ay_1 + a'x_1 + a'')y + (by_1 + b'x_1 + b'')x + cy_1 + c'x_1 + c'' = 0$$

der Reciprocitäts-Verwandtschaft. Obgleich diese Gleichungen neun Constanten enthalten; so sieht man doch auf der Stelle, daß sich dieselben auch jederzeit auf die allgemeine Form

$$21.\quad (ay + bx + c)y_1 + (a'y + b'x + c')x_1 + a''y + b''x + 1 = 0$$

und

$$22.\quad (ay_1 + a'x_1 + a'')y + (by_1 + b'x_1 + b'')x + cy_1 + c'x_1 + 1 = 0$$

bringen lassen, unter welcher sie nun bloß acht Constanten enthalten.

Jede der beiden hier charakterisirten Verwandtschaften ebener Systeme wollen wir nun einer nähern Untersuchung würdigen, indem wir mit der Collineations-Verwandtschaft anfangen.

II. Von der Collineation.

6. Wir beginnen mit der Bemerkung, daß zwei einem dritten collinear verwandte Systeme jederzeit selbst collinear verwandt sind, wie auf folgende Art leicht bewiesen werden kann. Wir wollen die Coordinaten in den drei Systemen durch x, y; x_1, y_1 und X, Y bezeichnen, und wollen annehmen, daß sowohl zwischen dem ersten und dritten, als auch zwischen dem zweiten

und dritten Systeme Collineations-Verwandtschaft Statt finde; so ist nach den allgemeinen Collineations-Gleichungen

$$Y = \frac{ay + bx + c}{a''y + b''x + c''}, \quad X = \frac{a'y + b'x + c'}{a''y + b''x + c''}$$

und

$$Y = \frac{\alpha y_1 + \beta x_1 + \gamma}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''}, \quad X = \frac{\alpha' y_1 + \beta' x_1 + \gamma'}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''};$$

also

$$\frac{ay + bx + c}{a''y + b''x + c''} = \frac{\alpha y_1 + \beta x_1 + \gamma}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''},$$
$$\frac{a'y + b'x + c'}{a''y + b''x + c''} = \frac{\alpha' y_1 + \beta' x_1 + \gamma'}{\alpha'' y_1 + \beta'' x_1 + \gamma''}.$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man x_1 und y_1 durch x, y ausdrücken, und wird, wenn man die Rechnung ausführt, für x_1 und y_1 zwei Ausdrücke von der allgemeinen Form

$$y_1 = \frac{Ay + Bx + C}{A''y + B''x + C''}, \quad x_1 = \frac{A'y + B'x + C'}{A''y + B''x + C''}$$

erhalten, woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

7. Die allgemeinen Collineations-Gleichungen seyen jetzt wieder

$$23. \quad y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + c''}, \quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + c''}.$$

In dem einen Systeme wollen wir uns nun zwei beliebige Punkte $x'y'$ und $x''y''$, und zwei beliebige gerade Linien, deren Gleichungen

$$24. \quad Ay + Bx + 1 = 0, \quad A'y + B'x + 1 = 0$$

seyn mögen, denken. Die den Punkten $x'y'$ und $x''y''$ entsprechenden Punkte in dem andern Systeme seyen respective $x'_1y'_1$ und $x''_1y''_1$. Die den geraden Linien (24.) entsprechenden geraden Linien in dem andern Systeme werden, wie sich aus (23.) auf der Stelle ergiebt, durch die beiden Gleichungen

$$25. \quad \begin{cases} (Aa + Ba' + a'')y_1 + (Ab + Bb' + b'')x_1 + Ac + Bc' + c'' = 0, \\ (A'a + B'a' + a')y_1 + (A'b + B'b' + b')x_1 + A'c + A'c' + c'' = 0 \end{cases}$$

charakterisirt. Die von dem Punkte $x'y'$ auf die beiden Linien (24.) gefällten Perpendikel seyen p und q; die von dem Punkte $x''y''$ auf dieselben geraden Linien gefällten Perpendikel seyen p' und q'; die von dem Punkte $x'_1y'_1$ auf die geraden Linien (25.) gefällten Perpendikel seyen p_1 und q; die von dem Punkte $x''_1y''_1$ auf dieselben geraden Linien gefällten Perpendikel seyen p'_1 und q'_1.

Nach dem Artikel Linie und Ebene (26*.) i. d. Z. ist unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$p^2 = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2}{A^2 + B^2}, \quad q^2 = \frac{(A'y' + B'x' + 1)^2}{A'^2 + B'^2};$$

$$p'^2 = \frac{(Ay'' + Bx'' + 1)^2}{A^2 + B^2}, \quad q'^2 = \frac{(A'y'' + B'x'' + 1)}{A'^2 + B'^2};$$

und eben so

$$p_1^2 = \frac{\{(Aa + Ba' + a'')y'_1 + (Ab + Bb' + b'')x'_1 + Ac + Bc' + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1^2 = \frac{\{(A'a + B'a' + a'')y'_1 + (A'b + B'b' + b'')x'_1 + A'c + B'c' + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

$$p_1'^2 = \frac{\{(Aa + Ba' + a'')y_1'' + (Ab + Bb' + b'')x''_1 + Ac + Bc' + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1'^2 = \frac{\{(A'a + B'a' + a'')y_1'' + (A'b + B'b' + b'')x'', + A'c + B'c' + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

oder

$$p_1^2 = \frac{\{A(ay'_1 + bx'_1 + c) + B(a'y'_1 + b'x'_1 + c') + a''y'_1 + b''x'_1 + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1^2 = \frac{\{A'(ay'_1 + bx'_1 + c) + B'(a'y'_1 + b'x'_1 + c') + a''y'_1 + b''x'_1 + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

$$p_1'^2 = \frac{\{A(ay''_1 + bx''_1 + c) + B(a'y''_1 + b'x''_1 + c') + a''y''_1 + b''x''_1 + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1'^2 = \frac{\{A'(ay''_1 + bx''_1 + c) + B'(a'y''_1 + b'x''_1 + c') + a''y''_1 + b''x''_1 + c''\}^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2}.$$

Weil nun aber sowohl $x'y'$ und $x'_1 y'_1$, als auch $x''y''$ und $x''_1 y''_1$ correspondirende Punkte in beiden Systemen sind; so ist nach (23.)

$$ay'_1 + bx'_1 + c = (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')y',$$
$$a'y'_1 + b'x'_1 + c' = (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')x';$$
$$ay''_1 + bx''_1 + c = (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')y'',$$
$$a'y''_1 + b'x''_1 + c' = (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')x'';$$

folglich nach gehöriger Substitution

$$p_1^2 = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2 (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1^2 = \frac{(A'y' + B'x' + 1)^2 (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2};$$

$$p_1'^2 = \frac{(Ay'' + Bx'' + 1)^2 (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$q_1'^2 = \frac{(A'y'' + B'x'' + 1)^2 (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')^2}{(A'a + B'a' + a'')^2 + (A'b + B'b' + b'')^2}.$$

Man sieht hieraus, daß die Ausdrücke für p^2, q^2, p'^2, q'^2 und p_1^2, q_1^2, $p_1'^2$, $q_1'^2$ im Allgemeinen folgende Form haben:

$$p^2 = \frac{M}{N}, \quad q^2 = \frac{M'}{N}; \quad p'^2 = \frac{L}{N}, \quad q'^2 = \frac{L'}{N};$$

$$p_1^2 = \frac{MP}{Q}, \quad q_1^2 = \frac{M'P}{Q}; \quad p_1'^2 = \frac{LP'}{Q}, \quad q_1'^2 = \frac{L'P'}{Q}.$$

Also ist

$$\frac{p^2}{p'^2} = \frac{M}{L}, \quad \frac{q^2}{q'^2} = \frac{M'}{L'};$$

$$\frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{MP}{LP'}, \quad \frac{q_1^2}{q_1'^2} = \frac{M'P}{L'P};$$

folglich

$$\frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{p^2}{p'^2} \cdot \frac{P}{P'}, \quad \frac{q_1^2}{q_1'^2} = \frac{q^2}{q'^2} \cdot \frac{P}{P'},$$

und daher

$$\frac{p^2}{p'^2} : \frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{q^2}{q'^2} : \frac{q_1^2}{q_1'^2},$$

oder

$$26. \quad \frac{p}{p'} : \frac{p_1}{p_1'} = \frac{q}{q'} : \frac{q_1}{q_1'}.$$

Nennt man jetzt, um diese Proportion anschaulicher darzustellen, die in dem einen Systeme angenommenen Punkte **A, B**, die in demselben Systeme angenommenen geraden Linien a, b, die entsprechenden Punkte und Linien in dem andern Systeme aber **A′, B′** und a′, b′, und bezeichnet die von **A** auf a und b, von **B** auf a und b, von **A′** auf a′ und b′, von **B′** auf a′ und b′ gefällten Perpendikel nach der Reihe durch **Aa, Ab, Ba, Bb, A′a′, A′b′, B′a′, B′b′**; so ist

$$p = Aa, \; q = Ab; \; p' = Ba, \; q' = Bb;$$

$$p_1 = A'a', \; q_1 = A'b'; \; p'_1 = B'a', \; q'_1 = B'b';$$

und folglich nach (26.)

$$27. \quad \frac{Aa}{Ba} : \frac{A'a'}{B'a'} = \frac{Ab}{Bb} : \frac{A'b'}{B'b'},$$

$$28. \quad \frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'},$$

$$29. \quad \frac{Aa}{Ab} : \frac{Ba}{Bb} = \frac{A'a'}{A'b'} : \frac{B'a'}{B'b'}.$$

Dies führt also auf folgenden Lehrsatz:

Wenn man von zwei beliebigen Punkten **A, B** auf zwei beliebige gerade Linien a, b die Perpendikel **Aa, Ab** und **Ba, Bb** fällt, und wenn man ferner in einem collinearen Systeme von den den Punkten **A, B** entsprechenden Punkten **A′, B′** auf die den Linien a, b entsprechenden Linien a′, b′ die Perpendikel **A′a′, A′b′** und **B′a′, B′b′** fällt; so ist immer

$$\frac{Aa}{Ab} : \frac{Ba}{Bb} = \frac{A'a'}{A'b'} : \frac{B'a'}{B'b'},$$

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'}.$$

Man kann diesen Satz aber noch allgemeiner ausdrücken. Zieht

man nämlich durch die Punkte **A**, **B** zwei gegen die Linie **a** unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A\alpha$, $B\alpha$, und eben so zwei gegen die Linien **b** unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A\beta$, $B\beta$, ferner durch die Punkte **A'**, **B'** zwei gegen die Linie **a'** unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A'\alpha'$, $B'\alpha'$, und eben so zwei gegen die Linie **b'** unter gleichen Winkeln geneigte Linien $A'\beta'$, $B'\beta'$; so ist offenbar

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{A\alpha}{B\alpha}, \quad \frac{Ab}{Bb} = \frac{A\beta}{B\beta}, \quad \frac{A'a'}{B'a'} = \frac{A'\alpha'}{B'\alpha'}, \quad \frac{A'b'}{B'b'} = \frac{A'\beta'}{B'\beta'}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden auch immer

$$30. \quad \frac{A\alpha}{B\alpha} : \frac{A\beta}{B\beta} = \frac{A'\alpha'}{B'\alpha'} : \frac{A'\beta'}{B'\beta'},$$

$$31. \quad \frac{A\alpha}{A\beta} : \frac{B\alpha}{B\beta} = \frac{A'\alpha'}{A'\beta'} : \frac{B'\alpha'}{B'\beta'}.$$

8. Wir wollen uns nun wieder zwei beliebige Punkte $x'y'$, $x''y''$ und eine beliebige gerade Linie, deren Gleichung

$$32. \quad Ay + Bx + 1 = 0$$

ist, denken. Die den Punkten $x'y'$, $x''y''$ entsprechenden Punkte des collinearen Systems seyen $x'_1y'_1$, $x''_1y''_1$; die Gleichung der der Linie (32.) entsprechenden geraden Linie ist

$$33. \quad (Aa + Ba' + a'')y_1 + (Ab + Bb' + b'')x_1 + Ac + Bc' + c'' = 0.$$

Denken wir uns nun von den Punkten $x'y'$, $x''y''$ auf die Linie (32.) die Perpendikel p, p', von den Punkten $x'_1y'_1$, $x''_1y''_1$ auf die Linie (33.) die Perpendikel p_1, p'_1 gefällt; so ist unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$p^2 = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2}{A^2 + B^2}, \quad p'^2 = \frac{(Ay'' + Bx'' + 1)^2}{A^2 + B^2};$$

$$p_1^2 = \frac{\{(Aa + Ba' + a'')y'_1 + (Ab + Bb' + b'')x'_1 + Ac + Bc' + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$p_1'^2 = \frac{\{(Aa + Ba' + a'')y''_1 + (Ab + Bb' + b'')x''_1 + Ac + Bc' + c''\}^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2}.$$

Weil aber zwischen den beiden Systemen Collineations-Verwandtschaft Statt findet, so ist

$$ay'_1 + bx'_1 + c = (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')y',$$
$$a'y'_1 + b'x'_1 + c' = (a''y'_1 + b''x'_1 + c'')x';$$
$$ay''_1 + bx''_1 + c = (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')y'',$$
$$a'y''_1 + b'x''_1 + c' = (a''y''_1 + b''x''_1 + c'')x'';$$

und folglich, wie leicht erhellen wird,

$$p_1^2 = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2(a''y'_1 + b''x'_1 + c'')^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2},$$

$$p_1'^2 = \frac{(Ay'' + Bx'' + 1)^2(a''y''_1 + b''x''_1 + c'')^2}{(Aa + Ba' + a'')^2 + (Ab + Bb' + b'')^2}.$$

Also ist

$$\frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{(Ay' + Bx' + 1)^2}{(Ay'' + Bx'' + 1)^2} \cdot \left\{\frac{a''y'_1 + b''x'_1 + c''}{a''y''_1 + b''x''_1 + c''}\right\}^2,$$

d. i., wie aus dem Vorhergehenden erhellet,

$$34. \quad \frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{p^2}{p'^2} \cdot \left\{\frac{a''y'_1 + b''x'_1 + c''}{a''y''_1 + b''x''_1 + c''}\right\}^2.$$

Für $a'' = 0$, $b'' = 0$ geht diese Gleichung in

$$35. \quad \frac{p_1^2}{p_1'^2} = \frac{p^2}{p'^2}, \quad \frac{p}{p'} = \frac{p_1}{p'_1},$$

oder in die Proportion

$$36. \quad p : p' = p_1 : p'_1$$

über.

In dem zuletzt betrachteten Falle haben die Collineations-Gleichungen offenbar die allgemeine Form

$$37. \quad y = ay_1 + bx_1 + c, \quad x = a'y_1 + b'x_1 + c',$$

wobei wir nur größerer Deutlichkeit wegen bemerken, daß die jetzigen a, b, c, a', b', c' mit den vorhergehenden a, b, c, a', b', c' nicht nothwendig einerlei sind. Man nennt diese besondere Art der Collineations-Verwandtschaft Affinität, und kann also auch die allgemeinen Gleichungen (37.) zweckmäßig mit dem Namen der Affinitäts-Gleichungen belegen. Zugleich ist in der Proportion (36.) eine merkwürdige und wichtige Eigenschaft solcher Systeme enthalten, zwischen denen Affinitäts-Verwandtschaft Statt findet. Diese Eigenschaft ist in dem folgenden Satze ausgesprochen:

Wenn man von zwei beliebigen Punkten A, B auf eine beliebige gerade Linie a die Perpendikel Aa, Ba, und in einem affinen Systeme von den den Punkten A, B entsprechenden Punkten A', B' auf die der Linie a entsprechende Linie a' die Perpendikel A'a', B'a' fällt; so ist immer

$$38. \quad Aa : Ba = A'a' : B'a'.$$

Ueberdies ist leicht ersichtlich, daß auch dieses Theorem, so wie das in (7.) bewiesene Theorem, allgemeiner gemacht werden kann. Zieht man nämlich von den Punkten A, B an die Linie a zwei gegen dieselbe unter gleichen Winkeln geneigte Linien Aα, Bα, und eben so von den Punkten A', B' an die Linie a' zwei unter gleichen Winkeln gegen dieselbe geneigte Linien A'α', B'α'; so ist offenbar

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{A\alpha}{B\alpha}, \quad \frac{A'a'}{B'a'} = \frac{A'\alpha'}{B'\alpha'},$$

und folglich nach (38.)

$$39. \quad A\alpha : B\alpha = A'\alpha' : B'\alpha'.$$

Eine andere Eigenschaft affiner Systeme ist folgende.

In zwei affinen Systemen sind gerade Linien des einen Systems, welche parallelen geraden Linien des andern Systems entsprechen, jederzeit einander selbst parallel.

Sind nämlich

$$y + Ax + B = 0, \quad y + Ax + C = 0$$

die Gleichungen zweier einander parallelen geraden Linien des einen Systems; so sind

$$ay_1 + bx_1 + c + A(a'y_1 + b'x_1 + c') + B = 0,$$
$$ay_1 + bx_1 + c + A(a'y_1 + b'x_1 + c') + C = 0,$$

d. i.

$$(a + Aa')y_1 + (b + Ab')x_1 + c + Ac' + B = 0,$$
$$(a + Aa')y_1 + (b + Ab')x_1 + c + Ac' + C = 0,$$

oder

$$y_1 + \frac{b + Ab'}{a + Aa'}x_1 + \frac{c + Ac' + B}{a + Aa'} = 0,$$
$$y_1 + \frac{b + Ab'}{a + Aa'}x_1 + \frac{c + Ac' + C}{a + Aa'} = 0$$

die Gleichungen der entsprechenden Graden des andern Systems, und aus der Form dieser Gleichungen erhellet auf der Stelle, daß auch diese beiden Geraden einander parallel sind.

9. Aus den vorher bewiesenen Eigenschaften collinearer und affiner Systeme lassen sich mehrere andere merkwürdige Eigenschaften solcher Systeme herleiten, worüber wir hier nur Folgendes bemerken.

In Fig. 35. seyen A, B, C, D, E und A', B', C', D', E' fünf beliebige einander entsprechende Punkte zweier collinearen Systeme; so sind, wie aus dem allgemeinen Begriffe der Collineations-Verwandtschaft auf der Stelle folgt, CD und C'D', CE und C'E', einander entsprechende gerade Linien in beiden Systemen. Bezeichnet man nun die von A auf CD und CE gefällten Perpendikel durch Aa, Ab; die von B auf CD und CE gefällten Perpendikel durch Ba, Bb; die von A' auf C'D' und C'E' gefällten Perpendikel durch A'a', A'b'; die von B' auf C'D' und C'E' gefällten Perpendikel durch B'a', B'b'; so ist nach (28.)

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'},$$

und folglich auch

$$\frac{Aa.CD}{Ba.CD} : \frac{Ab.CE}{Bb.CE} = \frac{A'a'.C'D'}{B'a'.C'D'} : \frac{A'b'.C'E'}{B'b'.C'E'},$$

d. i. immer

$$40. \quad \frac{\Delta ACD}{\Delta BCD} : \frac{\Delta ACE}{\Delta BCE} = \frac{\Delta A'C'D'}{\Delta B'C'D'} : \frac{\Delta A'C'E'}{\Delta B'C'E'},$$

welches ebenfalls eine sehr merkwürdige zwischen den Flächentheilen collinearer Systeme jederzeit Statt findende Proportion ist.

Sind ferner in derselben Figur A, B, C, D und A′, B′, C′, D′ vier einander entsprechende Punkte in zwei affinen Systemen; so sind CD und C′D′ zwei einander entsprechende gerade Linien, und es ist folglich, wenn wir die von A und B auf CD gefällten Perpendikel durch Aa und Ba, die von A′ und B′ auf C′D′ gefällten Perpendikel durch A′a′ und B′a′ bezeichnen, nach (38.)

$$Aa : Ba = A'a' : B'a' ;$$

also auch

$$Aa \cdot CD : Ba \cdot CD = A'a' \cdot C'D' : B'a' \cdot C'D' ,$$

d. i.

41. $$\triangle ACD : \triangle BCD = \triangle A'C'D' : \triangle B'C'D' ,$$

oder

42. $$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = \triangle BCD : \triangle B'C'D' .$$

Uebrigens ist nun ferner auch leicht einzusehen, daß in zwei affinen Systemen nicht bloß zwei Dreiecke, die eine Seite gemein haben, sondern je zwei Dreiecke, und folglich auch jede zwei geradlinigen Figuren in dem einen Systeme sich eben so zu einander verhalten, wie die ihnen entsprechenden Figuren in dem andern Systeme.

Es seyen jetzt A, B, C, D (Fig. 36.) vier in gerader Linie liegende Punkte eines Systems, und A′, B′, C′, D′ die denselben entsprechenden, also auch in gerader Linie liegenden, Punkte eines collinearen Systems. Denkt man sich nun durch B, C zwei beliebige gerade Linien EF, GH, und durch B′, C′ die denselben entsprechenden Linien E′F′, G′H′ gezogen; so ist nach (30.), weil AB, DB als gegen EF; AC, DC als gegen GH; A′B′, D′B′ als gegen E′F′; A′C′, D′C′ als gegen G′H′ unter gleichen Winkeln geneigte Linien zu betrachten sind,

43. $$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'} ,$$

welches ebenfalls eine sehr merkwürdige Proportion ist, die in zwei collinearen Systemen immer für vier in gerader Linie liegende Punkte des einen und die vier denselben entsprechenden Punkte des andern Systems Statt findet.

Sind ferner A, B, C (Fig. 37.) drei beliebige in gerader Linie liegende Punkte eines Systems, und A′, B′, C′ die denselben entsprechenden, also auch in gerader Linie liegenden, Punkte eines dem erstern affinen Systems; so denke man sich durch B die beliebige gerade Linie DE und durch B′ die derselben entsprechende gerade Linie D′E′ gezogen. Dann folgt aus (39.) durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie vorher, daß immer

44. $$AB : BC = A'B' : B'C'$$

ist, und man sieht also, daß in affinen Systemen einander entsprechende gerade Linien durch sich entsprechende Punkte jederzeit in gleichen Verhältnissen getheilt werden.

10. Mittelst der oben bewiesenen Sätze lassen sich nun auch leicht die folgenden Aufgaben auflösen.

I. Es seyen vier in gerader Linie liegende Punkte **A, B, C, D** (Fig. 38.) eines Systems, und drei den Punkten **A, B, C** entsprechende Punkte **A′, B′, C′** eines collinearen Systems gegeben; man soll den dem Punkte **D** des erstern Systems entsprechenden Punkt des letztern Systems finden.

Daß die drei gegebenen Punkte **A′, B′, C′** in einer geraden Linie liegen müssen, und daß auch der gesuchte Punkt mit diesen drei Punkten in einer geraden Linie liegen muß, folgt aus dem allgemeinen Begriffe der Collineations-Verwandtschaft unmittelbar. Man lege durch den Punkt **A′** eine beliebige gerade Linie, nehme auf derselben $A'B'' = AB$, $A'C'' = AC$, $A'D'' = AD$, ziehe die Linien **B′B″, C′C″**, welche, verlängert, sich in **O** schneiden mögen; ziehe hierauf **OD″**, und verlängere diese Linie bis zu ihrem Durchschnittspunkte **D′** mit der Linie **A′C′**, so ist **D′** der gesuchte Punkt.

Um dies zu beweisen, ziehe man durch den Punkt **D″** mit **B′B″** und **C′C″** die Parallelen **D″E′, D″F′**; so ist

$$\frac{A'B''}{B''D''} = \frac{A'B'}{B'E'}, \quad \frac{A'C''}{C'D''} = \frac{A'C'}{C'F'}.$$

Ferner ist

$$\frac{B'E'}{B'D'} = \frac{D''O}{D'O}, \quad \frac{C'F'}{C'D'} = \frac{D''O}{D'O},$$

und folglich

$$\frac{A'B''}{B''D''} \cdot \frac{D''O}{D'O} = \frac{A'B'}{B'E'} \cdot \frac{B'E'}{B'D'} = \frac{A'B'}{B'D'},$$
$$\frac{A'C''}{C'D''} \cdot \frac{D''O}{D'O} = \frac{A'C'}{C'F'} \cdot \frac{C'F'}{C'D'} = \frac{A'C'}{C'D'}.$$

Also ist offenbar

$$\frac{A'B''}{B''D''} : \frac{A'C''}{C'D''} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'},$$

d. i. nach der Construction

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'}.$$

Daher ist nach (43.) **D′** der gesuchte Punkt, wie bewiesen werden sollte.

II. Es sind fünf Punkte **A, B, C, D, E** (Fig. 39.) eines Systems, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, und vier den Punkten **A, B, C, D** entsprechende

Punkte A', B', C', D' eines collinearen Systems gegeben; man soll den dem Punkte E des erstern Systems entsprechenden Punkt des letztern Systems finden.

Aus den gegebenen Punkten A, B, C, D und A', B', C', D' beschreibe man die vollständigen Vierecke ABMCND und A'B'M'C'N'D'; so sind M, M' und N, N' einander entsprechende Punkte der beiden Systeme, weil sie Durchschnitte einander entsprechender gerader Linien sind. Nun ziehe man ME, NE, und bestimme die Durchschnittspunkte P, Q. Dann bestimme man auf A'N' und A'M' nach der vorigen Aufgabe I. die den Punkten P, Q entsprechenden Punkte P', Q' und ziehe die Linien M'P', N'Q'; so ist deren Durchschnittspunkt E' offenbar der gesuchte dem Punkte E entsprechende Punkt.

III. Es sind drei in gerader Linie liegende Punkte A, B, C (Fig. 40.) und zwei den Punkten A, B entsprechende Punkte A', B' eines affinen Systems gegeben; man soll den dem Punkte C des erstern Systems entsprechenden Punkt des letztern Systems finden.

Zuvörderst ist klar, daß der gesuchte Punkt mit A' und B' in einer geraden Linie liegen muß. Zieht man nun diese gerade Linie, und bestimmt auf derselben den Punkt C' so, daß

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

ist; so ist nach (44.) C' der gesuchte Punkt.

IV. Es sind vier Punkte A, B, C, D (Fig. 42.) eines Systems, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen, und drei den Punkten A', B', C' entsprechende Punkte eines affinen Systems gegeben; man soll den dem Punkt D des erstern Systems entsprechenden Punkt des letztern Systems, finden.

Man bestimme den Durchschnittspunkt P der Linien AB, CD, so wie den Durchschnittspunkt Q der Linien AC, BD. Nun bestimme man nach III. auf der Linie A'B' den dem Punkte P entsprechenden Punkt P', auf A'C' den dem Punkte Q entsprechenden Punkt Q', und ziehe die Linien P'C', B'Q'; so wird deren Durchschnittspunkt D' offenbar der gesuchte dem Punkte D ensprechende Punkt seyn.

11. Die allgemeinen Collineations-Gleichungen

$$y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a''y_1 + b''x_1 + 1}, \quad x = \frac{a'y_1 + b'x_1 + c'}{a''y_1 + b''x_1 + 1}$$

lassen sich durch eine schickliche Coordinaten-Verwandlung vereinfachen, wobei wir jedoch der Einfachheit wegen die Coordinaten rechtwinklig annehmen wollen. Man verändere zuerst bloß die Anfangspunkte der Coordinaten, indem man die einander entsprechenden Axen

einander parallel annimmt, und setze also zu dem Ende, wenn y', x' und y'_1, x'_1 die Coordinaten der neuen Anfangspunkte bezeichnen, nach dem Artikel Coordinaten (4.) für y, x und y_1, x_1 respective $y'+y, x'+x$ und y'_1+y_1, x'_1+x_1. Dadurch erhält man

$$y'+y=\frac{ay_1+bx_1+ay'_1+bx'_1+c}{a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1},$$

$$x'+x=\frac{a'y_1+b'x_1+a'y'_1+b'x'_1+c'}{a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1}.$$

Wählt man nun aber zu den beiden neuen Anfangspunkten $x'y'$ und $x'_1y'_1$ zwei einander entsprechende Punkte der beiden Systeme; so ist

$$y'=\frac{ay'_1+bx'_1+c}{a''y'_1+b''x'_1+1},\quad x'=\frac{a'y'_1+b'x'_1+c'}{a''y'_1+b''x'_1+1},$$

und folglich

$$y=\frac{\{(ab''-a''b)x'_1+a-a''c\}y_1+\{(a''b-ab'')y'_1+b-b''c\}x_1}{(a''y'_1+b''x'_1+1)(a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1)},$$

$$x=\frac{\{(a'b''-a''b')x'_1+a'-a''c'\}y_1+\{(a''b'-a'b'')y'_1+b'-b''c'\}x_1}{(a''y'_1+b''x'_1+1)(a''y_1+b''x_1+a''y'_1+b''x'_1+1)},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$ab''-a''b=\alpha,\ a-a''c=\beta,\ b-b''c=-\gamma;$$
$$a'b''-a''b'=\alpha',\ a'-a''c'=\beta',\ b'-b''c'=-\gamma';$$
$$a''y'_1+b''x'_1+1=\Theta$$

setzen,

$$y=\frac{(\alpha x'_1+\beta)y_1-(\alpha y'_1+\gamma)x_1}{\Theta(a''y_1+b''x_1+\Theta)},\quad x=\frac{(\alpha' x'_1+\beta')y_1-(\alpha' y'_1+\gamma')x_1}{\Theta(a''y_1+b''x_1+\Theta)}.$$

Nun wollen wir, ohne den Coordinatenwinkel zu ändern, die Lage der Axen der x_1, y_1 ändern, und müssen also nach dem Artikel Coordinaten (27. 4.) i. d. Z. für x_1 und y_1 respective

$$x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi \text{ und } x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi$$

setzen. Dies giebt

$$y=\frac{\{(\alpha x'_1+\beta)\cos\varphi+(\alpha y'_1+\gamma)\sin\varphi\}y_1+\{(\alpha x'_1+\beta)\sin\varphi-(\alpha y'_1+\gamma)\cos\varphi\}x_1}{\Theta\{(a''\cos\varphi-b''\sin\varphi)y_1+(a''\sin\varphi+b''\cos\varphi)x_1+\Theta\}},$$

$$y=\frac{\{(\alpha' x'_1+\beta')\cos\varphi+(\alpha' y'_1+\gamma')\sin\varphi\}y_1+\{(\alpha' x'_1+\beta')\sin\varphi-(\alpha' y'_1+\gamma')\cos\varphi\}x_1}{\Theta\{(a''\cos\varphi-b''\sin\varphi)y_1+(a''\sin\varphi+b''\cos\varphi)x_1+\Theta\}}.$$

Die Größen x'_1, y'_1, φ, welche beliebig gewählt werden können, wollen wir nun so bestimmen, daß sie den drei folgenden Gleichungen genügen:

$$(\alpha x'_1+\beta)\sin\varphi-(\alpha y'_1+\gamma)\cos\varphi=0,$$
$$(\alpha' x'_1+\beta')\cos\varphi+(\alpha' y'_1+\gamma')\sin\varphi=0,$$
$$(\alpha x'_1+\beta)\cos\varphi+(\alpha y'_1+\gamma)\sin\varphi=(\alpha' x_1+\beta')\sin\varphi-(\alpha' y'_1+\gamma')\cos\varphi.$$

Daß diese Bestimmung im Allgemeinen immer möglich ist, läßt sich auf folgende Art zeigen. Man setze der Kürze wegen

$$\alpha x'_1 + \beta = A,\ \alpha y'_1 + \gamma = B,\ \alpha' x'_1 + \beta' = A',\ \alpha' y'_1 + \gamma' = B';$$

so werden die drei zu erfüllenden Gleichungen:

$$A \sin\varphi - B\cos\varphi = 0,\quad A'\cos\varphi + B'\sin\varphi = 0,$$
$$A\cos\varphi + B\sin\varphi = A'\sin\varphi - B'\cos\varphi,$$

oder

$$A\,\mathrm{tang}\,\varphi = B,\ B'\,\mathrm{tang}\,\varphi = -A',\ A + B' = (A' - B)\,\mathrm{tang}\,\varphi;$$

also, wenn man die erste und zweite Gleichung addirt, und dann $\mathrm{tang}\,\varphi$ mittelst der dritten Gleichung eliminirt,

$$(A + B')^2 = -(A' - B)^2,$$

oder

$$(A + B')^2 + (A' - B)^2 = 0,$$

woraus auf der Stelle

$$A' - B = 0,\ A + B' = 0$$

folgt. Diese beiden Gleichungen enthalten bloß x'_1, y'_1, und sind in Bezug auf diese Größen vom ersten Grade, geben also für x'_1 und y'_1 immer reelle Werthe, für jede dieser Größen aber auch immer nur einen Werth. Hat man x'_1, y'_1; so ergiebt sich $\mathrm{tang}\,\varphi$ aus jedem der folgenden Ausdrücke:

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{B}{A} = -\frac{A'}{B'} = \frac{A + B'}{A' - B},$$

und man erhält also auch für $\mathrm{tang}\,\varphi$ immer einen, aber auch nur einen, reellen Werth. Also hat φ immer zwei reelle Werthe, die um 180° von einander verschieden sind. Für diese bestimmten Werthe von x'_1, y'_1, φ nehmen die Collineations-Gleichungen die folgende sehr einfache Gestalt an:

$$45.\quad y = \frac{\alpha y_1}{a y_1 + b x_1 + 1},\quad x = \frac{\alpha x_1}{a y_1 + b x_1 + 1},$$

wo α, a, b nicht mit den früher eben so bezeichneten Quantitäten einerlei sind. Der geraden Linie des einen Systems, deren Gleichung

$$Ay + Bx + C = 0$$

ist, entspricht die gerade Linie des andern Systems, deren Gleichung

$$(A\alpha + Ca)\,y_1 + (B\alpha + Cb)\,x_1 + C = 0$$

ist. Den geraden Linien

$$y = 0 \text{ und } x = 0$$

entsprechen also jetzt die geraden Linien

$$y_1 = 0 \text{ und } x_1 = 0,$$

d. h. der Axe der x entspricht die Axe der x_1, der Axe der y entspricht die Axe der y_1. Auch ist klar, daß die Anfangspunkte der beiden Coordinatensysteme jetzt einander entsprechende Punkte sind.

Ist

$$Ay + Bx = 0$$

die Gleichung einer durch den Anfang der Coordinaten gehenden geraden Linie des einen Systems; so ist nach dem Vorhergehenden

$$A\alpha y_1 + Bax_1 = 0,$$

d. i.

$$Ay_1 + Bx_1 = 0$$

die Gleichung der entsprechenden geraden Linie des andern Systems, und diese Linie geht also durch den Anfang der Coordinaten des andern Systems, und ist gegen die Axe der x_1 unter demselben Winkel geneigt, wie die erstere Linie gegen die Axe der x.

Nach dem Obigen ist auch, wenn x, y und x_1, y_1 die Coordinaten zweier einander entsprechenden Punkte sind, immer

$$x : y = x_1 : y_1.$$

Denkt man sich die beiden Systeme so auf einander gelegt, daß die Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallen, und überdies die Axe der x auf die Axe der x_1, die Axe der y auf die Axe der y_1 fällt; so fallen alle durch den, jetzt gemeinschaftlichen, Anfang der Coordinaten gezogene einander entsprechende gerade Linien auf einander, und jede zwei einander entsprechende Punkte der beiden Systeme liegen mit dem gemeinschaftlichen Anfange der Coordinaten in einer geraden Linie. Alles dies ist eine unmittelbare Folge aus dem Vorhergehenden.

Die vorher bestimmten Anfangspunkte der neuen Coordinatensysteme nennt man die Collineationspunkte oder Collineationscentra, und zwar heißt der Anfangspunkt der x_1, y_1 das Collineationscentrum des Systems, welchem die Coordinaten x, y, der Anfangspunkt der x, y dagegen das Collineationscentrum des Systems, welchem die Coordinaten x_1, y_1 entsprechen. Die Collineations-Gleichungen werden, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, immer die einfache Form

$$y = \frac{\alpha y_1}{ay_1 + bx_1 + 1}, \quad x = \frac{\alpha x_1}{ay_1 + bx_1 + 1}$$

haben, wenn man die Collineationscentra der beiden Systeme als Anfangspunkte der Coordinaten, und sowohl als Axen der x und x_1, als auch als Axen der y und y_1, zwei einander entsprechende durch die Collineationscentra gehende gerade Linien annimmt. Zwei collineare Systeme, die so auf einander gelegt sind, daß ihre beiden Collineationscentra und jede zwei durch die Collineationscentra gehende einander entsprechende gerade Linien auf einander fallen, sollen collinear liegend genannt werden.

Die Coordinaten aller einander entsprechenden Punkte, welche in zwei collinearen und collinear liegenden Systemen auf einander fallen, müssen offenbar den beiden Gleichungen

$$y = \frac{\alpha y}{ay + bx + 1}, \quad x = \frac{\alpha x}{ay + bx + 1}$$

oder

$$(ay + bx + 1 - \alpha)y = 0, (ay + bx + 1 - \alpha)x = 0$$

genügen. Diese beiden Gleichungen werden sowohl erfüllt durch $x = 0$, $y = 0$, d. h. durch das gemeinschaftliche Collineationscentrum, als auch durch

$$46.\quad ay + bx + 1 - \alpha = 0,$$

welches offenbar die Gleichung einer geraden Linie ist, die wir im Folgenden die Collineationsaxe nennen wollen, und deren Lage durch die vorstehende Gleichung offenbar vollkommen bestimmt ist.

Die Gleichungen zweier einander entsprechenden geraden Linien sind nach dem Obigen im Allgemeinen

$$Ay + Bx + C = 0,$$
$$(A\alpha + Ca)y_1 + (B\alpha + Cb)x_1 + C = 0.$$

Sind nun die beiden Systeme collinear liegend; so hat man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte aller einander entsprechenden Linien offenbar die beiden Gleichungen

$$Ay + Bx + C = 0,$$
$$(A\alpha + Ca)y + (B\alpha + Cb)x + C = 0.$$

Die letztere Gleichung läßt sich auf die Form

$$(Ay + Bx)\alpha + C(ay + bx + 1) = 0,$$

oder auf die Form

$$(Ay + Bx + C)\alpha + C(ay + bx + 1 - \alpha) = 0$$

bringen. Vermöge der ersten Gleichung hat man also für die Coordinaten des Durchschnittspunktes jeder zwei einander entsprechenden Linien die Gleichung

$$C(ay + bx + 1 - \alpha) = 0,$$

oder

$$ay + bx + 1 - \alpha = 0,$$

welche mit der Gleichung der Collineationsaxe identisch ist, so daß also der Durchschnittspunkt jeder zwei einander entsprechenden Linien auf der Collineationsaxe liegt.

Es seyen jetzt

$$Ay + Bx + C = 0,\ Ay + Bx + C' = 0$$

die Gleichungen zweier einander parallelen geraden Linien in dem Systeme, welchem die Coordinaten x, y entsprechen; so sind nach dem Vorhergehenden

$$(A\alpha + Ca)y_1 + (B\alpha + Cb)x_1 + C = 0,$$
$$(A\alpha + C'a)y_1 + (B\alpha + C'b)x_1 + C' = 0,$$

oder

$$\alpha(Ay_1 + Bx_1) + C(ay_1 + bx_1 + 1) = 0,$$
$$\alpha(Ay_1 + Bx_1) + C'(ay_1 + bx_1 + 1) = 0$$

die Gleichungen der den beiden in Rede stehenden Linien entsprechenden geraden Linien. Der Durchschnittspunkt dieser beiden ge-

raden Linien ist offenbar mit dem Durchschnittspunkte der beiden geraden Linien, deren Gleichungen

$$Ay_1 + Bx_1 = 0, \quad ay_1 + bx_1 + 1 = 0$$

sind, einerlei. Die letztere gerade Linie ist, wenn man sich die beiden Systeme collinear liegend denkt, der Collineationsaxe parallel, und man sieht also, daß in zwei collinearen und collinear liegenden Systemen der geometrische Ort der Durchschnittspunkte aller derjenigen geraden Linien in dem einen Systeme, welche parallelen geraden Linien im andern Systeme entsprechen, eine der Collineationsaxe parallele durch die Gleichung

$$47. \quad ay_1 + bx_1 + 1 = 0$$

dargestellte gerade Linie ist. Diese gerade Linie nennt man die Gegenaxe im Systeme $x_1 y_1$. Die Gleichung

$$Ay_1 + Bx_1 = 0$$

gehört, wenn wir die Systeme immer als collinear liegend betrachten, einer durch das Collineationscentrum gehenden geraden Linie an, welche den beiden durch die Gleichungen

$$Ay + Bx + C = 0, \quad Ay + Bx + C' = 0$$

dargestellten parallelen Linien parallel ist.

Aus den Gleichungen

$$y = \frac{\alpha y_1}{ay_1 + bx_1 + 1}, \quad x = \frac{\alpha x_1}{ay_1 + bx_1 + 1}$$

folgt

$$ay + bx - \alpha = -\frac{\alpha}{ay_1 + bx_1 + 1}.$$

Also ist

$$(ay + bx - \alpha)y_1 = -\frac{\alpha y_1}{ay_1 + bx_1 + 1} = -y.$$

$$(ay + bx - \alpha)x_1 = -\frac{\alpha x_1}{ay_1 + bx_1 + 1} = -x,$$

und folglich

$$48. \quad y_1 = -\frac{y}{ay + bx - \alpha}, \quad x_1 = -\frac{x}{ay + bx - \alpha}.$$

Bringt man diese Gleichungen auf die Form

$$y_1 = \frac{\frac{1}{\alpha}y}{-\frac{a}{\alpha}y - \frac{b}{\alpha}x + 1}, \quad x_1 = \frac{\frac{1}{\alpha}x}{-\frac{a}{\alpha}y - \frac{b}{\alpha}x + 1};$$

so sieht man, daß die Gleichung der Gegenaxe im Systeme xy die Gleichung

$$-\frac{a}{\alpha}y - \frac{b}{\alpha}x + 1 = 0,$$

oder

$$49.\quad ay + bx - \alpha = 0$$

ist.

Seyen jetzt $x'y'$ und $x'_1y'_1$ zwei einander entsprechende Punkte der beiden Systeme; das von dem Punkte $x'y'$ auf die Gegenaxe im Systeme xy gefällte Perpendikel sey $= p$, das von dem Punkte $x'_1y'_1$ auf die Gegenaxe im Systeme x_1y_1 gefällte Perpendikel sey dagegen $= p_1$. Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist

$$p^2 = \frac{(ay' + bx' - \alpha)^2}{a^2 + b^2},\quad p_1^2 = \frac{(ay'_1 + bx'_1 + 1)^2}{a^2 + b^2}.$$

Nun ist aber, weil $x'y'$ und $x'_1y'_1$ einander entsprechende Punkte sind,

$$y' = \frac{\alpha y'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1},\quad x' = \frac{\alpha x'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1}.$$

Also ist

$$ay' + bx' - \alpha = \frac{-\alpha}{ay'_1 + bx'_1 + 1},$$

und folglich

$$p^2 = \frac{\alpha^2}{(a^2 + b^2)(ay'_1 + bx'_1 + 1)^2}.$$

Also ist

$$p^2p_1^2 = \frac{\alpha^2}{(a^2 + b^2)^2},$$

oder

$$50.\quad pp_1 = \pm \frac{\alpha}{a^2 + b^2},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem α positiv oder negativ ist. Man sieht hieraus, daß das Product pp_1 für jede zwei collineare Systeme eine constante Größe ist.

12. I. In affinen Systemen werden, wie in (9.) gezeigt worden ist, einander entsprechende gerade Linien durch sich entsprechende Punkte in gleichem Verhältniß getheilt. Wenn nun aber **A, B** zwei beliebige Punkte des einen, **A′, B′** die denselben entsprechenden Punkte des andern Systems, und die beiden Systeme so beschaffen sind, daß der Exponent des Verhältnisses **AB : A′B′** eine constante Größe ist, wie man auch die Lage der beiden Punkte **A, B** und der ihnen entsprechenden Punkte verändern mag; so heißen die beiden Systeme einander ähnlich. Es geht hieraus hervor, daß die Aehnlichkeit, nach dem eben aufgestellten Begriffe, ein besonderer Fall der Affinität ist, und daß also für den Fall der Aehnlichkeit zwischen den constanten Coefficienten a, b, c, a', b', c' der Affinitäts-Gleichungen

$$y = ay_1 + bx_1 + c,\quad x = a'y_1 + b'x_1 + c'$$

gewisse Relationen werden Statt finden müssen, die wir jetzt auf-

suchen wollen. Bezeichnen wir zu dem Ende die Coordinaten der Punkte A, B und A′, B′ durch x′, y′; x″, y″ und x'_1, y'_1; x''_1, y''_1; so ist, wenn α und α_1 die Coordinatenwinkel der beiden Systeme sind, nach dem Artikel Coordinaten (12.) i. d. Z.

$$AB^2 = (x' - x'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\alpha + (y' - y'')^2,$$
$$A'B'^2 = (x'_1 - x''_1)^2 + 2(x'_1 - x''_1)(y'_1 - y''_1)\cos\alpha_1 + (y'_1 - y''_1)^2.$$

Weil nun aber

$$y' = ay'_1 + bx'_1 + c, \quad x' = a'y'_1 + b'x'_1 + c';$$
$$y'' = ay''_1 + bx''_1 + c, \quad x'' = a'y''_1 + b'x''_1 + c'$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} AB^2 &= \{a'(y'_1 - y''_1) + b'(x'_1 - x''_1)\}^2 \\ &\quad + 2\{a'(y'_1 - y''_1) + b'(x'_1 - x''_1)\}\{a(y'_1 - y''_1) + b(x'_1 - x''_1)\}\cos\alpha \\ &\quad + \{a(y'_1 - y''_1) + b(x'_1 - x''_1)\}^2 \\ &= (a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2)(y'_1 - y''_1)^2 \\ &\quad + 2\{ab + (ab' + a'b)\cos\alpha + a'b'\}(y'_1 - y''_1)(x'_1 - x''_1) \\ &\quad + (b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2)(x'_1 - x''_1)^2. \end{aligned}$$

Da nun für alle Werthe von x'_1, y'_1; x''_1, y''_1, wenn q eine an sich unbestimmte, jedoch constante Größe bezeichnet,

$$AB = q \cdot A'B' \text{ oder } AB^2 = q^2 \cdot A'B'^2$$

seyn soll; so muß offenbar

$$a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2 = q^2,$$
$$b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2 = q^2,$$
$$ab + (ab' + a'b)\cos\alpha + a'b' = q^2\cos\alpha_1$$

seyn. Eliminirt man q^2 aus diesen drei Gleichungen; so erhält man die beiden Gleichungen:

$$51. \quad \begin{cases} a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2 = b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2, \\ ab + (ab' + a'b)\cos\alpha + a'b' = (a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2)\cos\alpha_1, \end{cases}$$

und dies sind die gesuchten Relationen zwischen den constanten Coefficienten der Affinitäts-Gleichungen im Falle der Aehnlichkeit. Sind beide Coordinatensysteme rechtwinklig und folglich $\alpha = \alpha_1 = 90°$; so gehen die beiden obigen Gleichungen in folgende über:

$$52. \quad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2, \; ab + a'b' = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt leicht:

$$53. \quad a = \pm b', \; a' = \mp b,$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

II. Wenn in zwei ähnlichen Systemen die vorher durch q bezeichnete an sich unbestimmte, jedoch constante Größe den bestimmten Werth ± 1 hat; so heißen die beiden Systeme einander *congruent*. Für diesen besondern Fall der Aehnlichkeit werden die drei vorhergehenden Bedingungsgleichungen:

$$53.\quad \begin{cases} a^2 + 2aa'\cos\alpha + a'^2 = 1, \\ b^2 + 2bb'\cos\alpha + b'^2 = 1, \\ ab + (ab' + a'b)\cos\alpha + a'b' = \cos\alpha_1, \end{cases}$$

und, wenn $\alpha = \alpha_1 = 90^0$ ist:

$$54.\quad a^2 + a'^2 = 1,\quad b^2 + b'^2 = 1,\quad ab + a'b' = 0.$$

Bemerkt zu werden verdient noch, daß diesen drei Gleichungen jederzeit genügt wird, wenn man, indem γ einen beliebigen Winkel bezeichnet, $a = \cos\gamma$, $b = \sin\gamma$, $a' = \pm\sin\gamma$, $b' = \mp\cos\gamma$ setzt.

III. Es ist nun endlich noch ein besonderer Fall der Affinität zu betrachten. In (9.) ist nämlich gezeigt worden, daß, wenn **F** und $\mathbf{F}_1$ die Flächenräume zweier geradlinigen Figuren bezeichnen, deren Spitzen einander entsprechende, übrigens beliebige Punkte zweier affinen Systeme sind, für diese beiden Systeme der Exponent des Verhältnisses $\mathbf{F}:\mathbf{F}_1$ eine constante Größe ist. Ist nun der Exponent dieses constanten Verhältnisses die Einheit; so nennt Möbius in seinem trefflichen barycentrischen Calcul S. 213. die beiden Systeme einander gleich, wobei aber sogleich in die Augen fallen wird, daß dieser Begriff der Gleichheit zweier Systeme oder Figuren ein weit engerer als der gewöhnliche Begriff der Gleichheit ist, indem man nach diesem zwei Figuren schon dann einander gleich nennt, wenn die sie begränzenden Linien gleiche Flächenräume einschließen, nach dem von Möbius aufgestellten engern Begriffe aber auch noch Gleichheit in allen einzelnen Theilen der beiden Figuren erfordert wird.

13. Um nur eine Anwendung der im Obigen gegebenen allgemeinen Theorie der Collineations-Verwandtschaft mitzutheilen, wollen wir uns einmal zwei Dreiecke **ABC**, **A'B'C'** denken, die eine solche Lage haben, daß die Verbindungslinien **AA'**, **BB'**, **CC'** ihrer Spitzen in einem Punkte **O** zusammentreffen. Nehmen wir nun den Punkt **O** als Anfangspunkt eines beliebigen Coordinatensystems an, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte **A**, **B**, **C** und **A'**, **B'**, **C'** in Bezug auf dieses eine Coordinatensystem durch x', y'; x'', y''; x''', y''' und x'_1, y'_1; x''_1, y''_1; x'''_1, y'''_1, so ist

$$\frac{y'}{y'_1} = \frac{x'}{x'_1},\quad \frac{y''}{y''_1} = \frac{x''}{x''_1},\quad \frac{y'''}{y'''_1} = \frac{x'''}{x'''_1}$$

Bestimmt man nun, welches offenbar immer möglich ist, die drei Größen α, a, b so, daß dieselben den drei folgenden Gleichungen genügen

$$y' = \frac{\alpha y'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1},\quad y'' = \frac{\alpha y''_1}{ay''_1 + bx''_1 + 1},\quad y''' = \frac{\alpha y'''_1}{ay'''_1 + bx'''_1 + 1};$$

so ist offenbar immer auch

$$x' = \frac{\alpha x'_1}{ay'_1 + bx'_1 + 1},\quad x'' = \frac{\alpha x''_1}{ay''_1 + bx''_1 + 1},\quad x''' = \frac{\alpha x'''_1}{ay'''_1 + bx'''_1 + 1};$$

und es erhellet also aus dem Obigen, daß die beiden Dreiecke **ABC** und **A′B′C′** als zwei collineare und collinear liegende Systeme betrachtet werden können, deren gemeinschaftliches Collineationscentrum der Punkt **O** ist, so daß also auf diese beiden Dreiecke alle die Sätze angewandt werden können, welche oben von collinearen und collinear liegenden Systemen überhaupt bewiesen worden sind. Da nun der Durchschnittspunkt jeder zwei einander entsprechenden geraden Linien in zwei collinearen und collinear liegenden Systemen nach dem Obigen auf der Collineationsaxe liegt; so ergiebt sich auf der Stelle das folgende überaus merkwürdige Theorem:

Wenn zwei Dreiecke ABC, A′B′C′ eine solche Lage haben, daß die Verbindungslinien AA′, BB′, CC′ der Spitzen dieser beiden Dreiecke sich in einem Punkte O schneiden; so liegen die drei Durchschnittspunkte der Seiten BC und B′C′, AC und A′C′, AB und A′B′ jederzeit in einer und derselben geraden Linie.

Bemerkenswerth ist es, daß dieser Satz auch dann noch gilt, wenn die beiden Dreiecke **ABC**, **A′B′C′** nicht in einer Ebene, sondern beliebig im Raume liegen, wie durch das folgende sehr einfache Raisonnement, ohne die Theorie der Collineations-Verwandtschaft bewiesen werden kann. Die beiden sich in dem Punkte **O** schneidenden geraden Linien **AA′**, **BB′** liegen in einer Ebene. In dieser Ebene liegen also die vier Punkte **A**, **A′**, **B**, **B′**, und folglich auch die beiden geraden Linien **AB** und **A′B′**, welche sich also im Allgemeinen in einem gewissen Punkte schneiden werden, den wir durch γ bezeichnen wollen. Eben so werden sich **AC** und **A′C′** in einem gewissen Punkte β, **BC** und **B′C′** in einem gewissen Punkte α schneiden. Weil nun die drei Punkte α, β, γ auf den drei Seiten des Dreiecks **ABC** liegen; so liegen sie jederzeit alle drei in der Ebene dieses Dreiecks. Ganz eben so liegen aber die drei Punkte α, β, γ auch in der Ebene des Dreiecks **A′B′C′**, und können also nur in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der Ebenen der beiden Dreiecke **ABC**, **A′B′C′** liegen, so daß also die in Rede stehenden drei Punkte jederzeit in einer und derselben geraden Linie liegen, wie bewiesen werden sollte.

Uebrigens kann man aus dem vorher bewiesenen Satze auch noch leicht den folgenden sehr merkwürdigen Satz herleiten:

Wenn zwei Vierecke ABA′B′, CDC′D′ (Fig. 41.) auf eine solche Weise in und um einander beschrieben sind, daß ihre vier Diagonalen AA′, BB′, CC′, DD′ sich in einem Punkte schneiden; so liegen die vier Durchschnittspunkte ihrer Gegenseiten jederzeit in einer geraden Linie.

Man betrachte die beiden Dreiecke **ABC**, **A′B′C′**; so findet man, daß die Verbindungslinien **AA′**, **BB′**, **CC′** der Spitzen der-

selben sich in einem Punkte, nämlich in dem Punkte O, schneiden. Deshalb muß nach dem vorher bewiesenen Satze der Durchschnittspunkt der Seiten AB, A′B′ mit den Durchschnittspunkten der Seiten AC, A′C′ und BC, B′C′, oder CD, C′D′ und CD′, C′D, in einer geraden Linie liegen. Betrachtet man ferner die Dreiecke AB′D, A′BD′; so findet man, daß die Verbindungslinien AA′, BB′, DD′ der Spitzen derselben sich in einem Punkte, nämlich in dem Punkte O, schneiden. Deshalb muß nach dem vorher bewiesenen Satze der Durchschnittspunkt der Seiten AB′, A′B mit den Durchschnittspunkten der Seiten AD, A′D′ und BD′, B′D, oder CD, C′D′ und CD′, C′D, in einer geraden Linie liegen. Hieraus und aus dem vorher Bewiesenen ergiebt sich aber auf der Stelle die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

III. Von der Reciprocität.

14. Die Gleichung der Reciprocität ist nach (21.)

55. $(ay + bx + c)y_1 + (a'y + b'x + c')x_1 + a''y + b''x + 1 = 0$

oder

56. $(ay_1 + a'x_1 + a'')y + (by_1 + bx_1 + b'')x + cy_1 + c'x_1 + 1 = 0$.

Die Gleichung (55.) ist die Gleichung der Polare des Punktes xy als Pol, die Gleichung (56.) ist die Gleichung der Polare des Punktes $x_1 y_1$ als Pol. Um also umgekehrt die Coordinaten x_1, y_1 des Pols einer geraden Linie, deren Gleichung

$$Ay + Bx + 1 = 0$$

ist, als Polare zu finden, muß man x_1, y_1 aus den beiden Gleichungen

57. $\frac{ay_1 + a'x_1 + a''}{cy_1 + c'x_1 + 1} = A, \quad \frac{by_1 + b'x_1 + b''}{cy_1 + c'x_1 + 1} = B$

bestimmen; und um eben so die Coordinaten x, y des Pols einer geraden Linie, deren Gleichung

$$A_1 y_1 + B_1 x_1 + 1 = 0$$

ist, als Polare zu finden, muß man x, y aus den beiden Gleichungen

58. $\frac{ay + bx + c}{a''y + b''x + 1} = A_1, \quad \frac{a'y + b'x + c'}{a''y + b''x + 1} = B_1$

bestimmen.

Der Durchschnittspunkt der Polaren zweier Punkte x′y′ und x″y″ ist immer der Pol der diese beiden Punkte verbindenden geraden Linie, und diese gerade Linie also die Polare jenes Durchschnittspunktes. Die Gleichungen der Polaren der Punkte x′y′ und x″y″ sind nämlich nach (55.)

$(ay' + bx' + c)y_1 + (a'y' + b'x' + c')x_1 + a''y' + b''x' + 1 = 0$

und

$$(ay'' + bx'' + c)y_1 + (a'y'' + b'x'' + c')x_1 + a''y'' + b''x'' + 1 = 0.$$

Sind nun α_1, β_1 die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser beiden Linien; so ist

$$(ay' + bx' + c)\beta_1 + (a'y' + b'x' + c')\alpha_1 + a''y' + b''x' + 1 = 0,$$
$$(ay'' + bx'' + c)\beta_1 + (a'y'' + b'x'' + c')\alpha_1 + a''y'' + b''x'' + 1 = 0,$$

oder

$$(a\beta_1 + a'\alpha_1 + a'')y' + (b\beta_1 + b'\alpha_1 + b'')x' + c\beta_1 + c'\alpha_1 + 1 = 0,$$
$$(a\beta_1 + a'\alpha_1 + a'')y'' + (b\beta_1 + b'\alpha_1 + b'')x'' + c\beta_1 + c'\alpha_1 + 1 = 0,$$

woraus sogleich erhellet, daß

$$(a\beta_1 + a'\alpha_1 + a'')y + (\beta_1 + b'\alpha_1 + b'')x + c\beta_1 + c'\alpha_1 + 1 = 0$$

die Gleichung der durch die Punkte $x'y'$, $x''y''$ bestimmten geraden Linie ist. Da nun aber diese Gleichung nach (56.) die Gleichung der Polare des Punktes $\alpha_1 \beta_1$ ist; so erhellet die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

15. Als Hauptlehrsatz der ganzen Theorie der Reciprocität ist das folgende Theorem zu betrachten:

Die Polaren von drei oder mehrern in gerader Linie liegenden Punkten schneiden sich jederzeit in einem und demselben Punkte, dem Pole jener geraden Linie; die Pole von drei oder mehrern sich in einem und demselben Punkte schneidenden geraden Linien liegen jederzeit in einer und derselben geraden Linie, der Polaren jenes Punktes.

I. Drei in der geraden Linie

$$Ay + Bx + 1 = 0$$

liegende Punkte seyen $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$; so ist

$$Ay' + Bx' + 1 = 0,$$
$$Ay'' + Bx'' + 1 = 0,$$
$$Ay''' + Bx''' + 1 = 0,$$

und folglich, wie man aus diesen Gleichungen leicht findet,

$$A = -\frac{x' - x''}{x'y'' - x''y'}, \quad B = \frac{y' - y''}{x'y'' - x''y'};$$
$$A = -\frac{x' - x'''}{x'y''' - x'''y'}, \quad B = \frac{y' - y'''}{x'y''' - x'''y'}.$$

Die Gleichungen der Polaren der drei Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ sind:

$$(ay' + bx' + c)y_1 + (a'y' + b'x' + c')x_1 + a''y' + b''x' + 1 = 0,$$
$$(ay'' + bx'' + c)y_1 + (a'y'' + b'x'' + c')x_1 + a''y'' + b''x'' + 1 = 0,$$
$$(ay''' + bx''' + c)y_1 + (a'y''' + b'x''' + c')x_1 + a''y''' + b''x''' + 1 = 0.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der ersten und zweiten Polare wollen wir durch x_1, y_1, die Coordinaten des

Durchschnittspunktes der ersten und dritten Polaren dagegen durch (x_1), (y_1) bezeichnen. Bestimmt man nun die Coordinaten dieser Durchschnittspunkte; so erhält man nach leichter Rechnung:

$$x_1 = -\frac{(ab''-a''b)(x'y''-x''y')+(a''c-a)(y'-y'')+(b\,c-b)(x-x'')}{(ab'-a'b)(x'y''-x''y')+(a'c-ac')(y'-y'')+(b'c-bc')(x'-x'')},$$

$$y_1 = \frac{(a'b''-a''b')(x'y''-x''y')+(a''c'-a')(y'-y'')+(b''c'-b')(x'-x'')}{(ab'-a'b)(x'y''-x''y')+(a'c-ac')(y'-y'')+(b'c-bc')(x'-x'')};$$

und eben so

$$(x_1) = -\frac{(ab'''-a'''b)(x'y'''-x'''y')+(a''c-a)(y'-y''')+(b'c-b)(x'-x''')}{(ab'-a'b)(x'y'''-x'''y')+(a'c-ac')(y'-y''')+(b'c-bc')(x'-x''')},$$

$$(y_1) = \frac{(a'b'''-a'''b')(x'y'''-x'''y')+(a''c'-a')(y'-y''')+(b''c'-b')(x'-x''')}{(ab'-a'b)(x'y'''-x'''y')+(a'c-ac')(y'-y''')+(b'c-bc')(x'-x''')}.$$

Dividirt man nun Zähler und Nenner der beiden ersten Brüche durch $x'y''-x''y'$, Zähler und Nenner der beiden letzten Brüche durch $x'y'''-x'''y'$; so erhält man nach dem Vorhergehenden:

$$x_1 = -\frac{ab''-a''b+(a''c-a)B-(b''c-b)A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$y_1 = \frac{a'b''-a''b'+(a''c'-a')B-(b''c'-b')A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A};$$

und

$$(x_1) = -\frac{ab'''-a'''b+(a''c-a)B-(b''c-b)A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$(y_1) = \frac{a'b'''-a'''b'+(a''c'-a')B-(b''c'-b')A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A}.$$

Also ist $x_1=(x_1)$, $y_1=(y_1)$, und die drei Polaren der in gerader Linie liegenden Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ schneiden sich folglich in einem und demselben Punkte, dessen Coordinaten

$$x_1 = -\frac{ab''-a''b+(a''c-a)B-(b''c-b)A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$y_1 = \frac{a'b''-a''b'+(a''c'-a')B-(b''c'-b')A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A}$$

sind. Aus eben diesen Formeln erhält man:

$$ay_1+a'x_1+a'' = \frac{\{a(b'-b''c')-a'(b-b''c)+a''(bc'-b'c)\}A}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$by_1+b'x_1+b'' = \frac{\{a(b'-b''c')-a'(b-b''c)+a''(bc'-b'c)\}B}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

$$cy_1+c'x_1+1 = \frac{a(b'-b''c')-a'(b-b''c)+a''(bc'-b'c)}{ab'-a'b+(a'c-ac')B-(b'c-bc')A},$$

so daß also

$$\frac{ay_1+a'x_1+a''}{cy_1+c'x_1+1}=A,\quad \frac{by_1+b'x_1+b''}{cy_1+c'x_1+1}=B,$$

und nach (57.) der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Polaren der Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ folglich der Pol der Linie

$$Ay + Bx + 1 = 0,$$

in welcher die drei genannten Punkte liegen, ist.

II. Seyen ferner

$$A'y + B'x + 1 = 0,$$
$$A''y + B''x + 1 = 0,$$
$$A'''y + B'''x + 1 = 0$$

die Gleichungen dreier sich in einem Punkte, dessen Coordinaten wir durch α, β bezeichnen wollen, schneidenden geraden Linien; so ist

$$A'\beta + B'\alpha + 1 = 0,$$
$$A''\beta + B''\alpha + 1 = 0,$$
$$A'''\beta + B'''\alpha + 1 = 0.$$

Die Pole der drei in Rede stehenden geraden Linien seyen $x'_1 y'_1$; $x''_1 y''_1$; $x'''_1 y'''_1$; so ist nach (57.)

$$\frac{ay'_1 + a'x'_1 + a''}{cy'_1 + c'x'_1 + 1} = A', \quad \frac{by'_1 + b'x'_1 + b''}{cy'_1 + c'x'_1 + 1} = B';$$
$$\frac{ay''_1 + a'x''_1 + a''}{cy''_1 + c'x''_1 + 1} = A'', \quad \frac{by''_1 + b'x''_1 + b''}{cy''_1 + c'x''_1 + 1} = B'';$$
$$\frac{ay'''_1 + a'x'''_1 + a''}{cy'''_1 + c'x'''_1 + 1} = A''', \quad \frac{by'''_1 + b'x'''_1 + b''}{cy'''_1 + c'x'''_1 + 1} = B''';$$

und folglich

$$(ay'_1 + a'x'_1 + a'')\beta + (by'_1 + b'x'_1 + b'')\alpha + cy'_1 + c'x'_1 + 1 = 0,$$
$$(ay''_1 + a'x''_1 + a'')\beta + (by''_1 + b'x''_1 + b'')\alpha + cy'' + c'x''_1 + 1 = 0$$
$$(ay'''_1 + a'x'''_1 + a'')\beta + (by'''_1 + b'x'''_1 + b'')\alpha + cy'''_1 + c'x'''_1 + 1 = 0,$$

oder

$$(a\beta + b\alpha + c)y'_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x'_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0,$$
$$(a\beta + b\alpha + c)y''_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x''_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0,$$
$$(a\beta + b\alpha + c)y'''_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x'''_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0.$$

Also liegen die drei Pole $x'_1 y'$; $x''_1 y''_1$; $x'''_1 y'''_1$, offenbar in einer geraden Linie, deren Gleichung

$$(a\beta + b\alpha + c)y_1 + (a'\beta + b'\alpha + c')x_1 + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0$$

ist, und diese gerade Linie ist offenbar die Polare des Punktes $\alpha\beta$, d. h. des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der drei durch die Gleichungen

$$A'y + B'x + 1 = 0,$$
$$A''y + B''x + 1 = 0,$$
$$A'''y + B'''x + 1 = 0$$

gegebenen geraden Linien.

Zu bemerken ist, daß man das hier bewiesene Theorem auch auf folgenden Ausdruck bringen kann:

Bewegt sich ein Punkt auf einer geraden Linie, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, den Pol jener Geraden; und dreht sich umgekehrt

eine gerade Linie um einen festen Punkt, so beschreibt ihr Pol eine gerade Linie, die Polare des festen Punktes.

16. Sey jetzt

$$y = \alpha x + \beta \text{ oder } y - \alpha x - \beta = 0$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie im Systeme der xy; so hat man, wenn x_1, y_1 die Coordinaten des Pols dieser geraden Linie bezeichnen, nach (57.) die beiden Gleichungen

$$\frac{ay_1 + a'x_1 + a''}{cy_1 + c'x_1 + 1} = -\frac{1}{\beta}, \quad \frac{by_1 + b'x_1 + b''}{cy_1 + c'x_1 + 1} = \frac{\alpha}{\beta},$$

und folglich

$$\beta = -\frac{cy_1 + c'x_1 + 1}{ay_1 + a'x_1 + a''}, \quad \beta = \alpha \cdot \frac{cy_1 + c'x_1 + 1}{by_1 + b'x_1 + b''}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke von β einander gleich; so erhält man zwischen x_1 und y_1 die Gleichung

$$59. \quad \alpha(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0.$$

Da diese Gleichung zwischen x_1 und y_1 von der Größe β ganz unabhängig ist, sondern bloß die Größe α enthält; so ist klar, daß die Pole aller der durch die Gleichung $y = \alpha x + \beta$ dargestellten geraden Linie parallelen geraden Linien in einer und derselben geraden Linie liegen, deren Gleichung die Gleichung (59.) ist.

Ist

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 \text{ oder } y_1 - \alpha_1 x_1 - \beta_1 = 0$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie im Systeme $x_1 y_1$; so hat man zwischen den Coordinaten x, y des Pols dieser geraden Linie nach (58.) die Gleichungen

$$\frac{ay + bx + c}{a''y + b''x + 1} = -\frac{1}{\beta_1}, \quad \frac{a'y + b'x + c'}{a''y + b''x + 1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

aus denen

$$\beta_1 = -\frac{a''y + b''x + 1}{ay + bx + c}, \quad \beta_1 = \alpha_1 \cdot \frac{a''y + b''x + 1}{a'y + b'x + c'};$$

also

$$60. \quad \alpha_1(ay + bx + c) + a'y + b'x + c' = 0$$

folgt. In der durch letztere Gleichung dargestellten geraden Linie liegen die Pole aller der durch die Gleichung $y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$ dargestellten geraden Linie parallelen geraden Linien.

Die gerade Linie, welche die Pole $x_1 y_1$ aller einer bestimmten Richtung parallelen geraden Linien des Systems xy enthält, heißt der dieser Richtung zugehörige oder conjugirte Durchmesser des Systems $x_1 y_1$, und eben so heißt die gerade Linie, welche die Pole xy aller einer bestimmten Richtung parallelen geraden Linien des Systems $x_1 y_1$ enthält, der dieser

Richtung zugehörige oder conjugirte Durchmesser des Systems xy. Nach (59.) ist die Gleichung des, der durch die Gleichung

$$y = \alpha x + \beta$$

dargestellten Richtung conjugirten Durchmessers

61. $\alpha(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0$,

und eben so ist nach (60.) die Gleichung des, der durch die Gleichung

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$$

dargestellten Richtung conjugirten Durchmessers

62. $\alpha_1(ay + bx + c) + a'y + b'x + c' = 0$.

Alle conjugirte Durchmesser eines und desselben Systems schneiden sich in einem Punkte oder sind einander parallel, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Die Gleichungen zweier beliebigen conjugirten Durchmesser des Systems $x_1 y_1$ sind nach (61.)

$$\alpha(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0,$$
$$\alpha'(ay_1 + a'x_1 + a'') + by_1 + b'x_1 + b'' = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind, was auch α und α' seyn mögen, erfüllt, wenn

$$ay_1 + a'x_1 + a'' = 0, \quad by_1 + b'x_1 + b'' = 0$$

ist, und man erhält also, wenn man x_1 und y_1 aus diesen beiden Gleichungen bestimmt, die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden in Rede stehenden conjugirten Durchmesser. Durch Auflösung der beiden obigen Gleichungen erhält man aber

$$x_1 = -\frac{ab'' - a''b}{ab' - a'b}, \quad y_1 = \frac{a'b'' - a''b'}{ab' - a'b},$$

und sieht also, daß die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden conjugirten Durchmesser von α und α' ganz unabhängig sind, so daß sich also offenbar alle conjugirte Durchmesser in einem Punkte schneiden. Nur wenn $ab' - a'b = 0$ oder $ab' = a'b$ ist, giebt es gar keinen Durchschnittspunkt der conjugirten Durchmesser, sondern dieselben sind sämmtlich unter einander parallel, wie auf folgende Art leicht erhellet. Bringt man nämlich die Gleichungen der beiden conjugirten Durchmesser auf die Form:

$$(\alpha a + b)y_1 + (\alpha a' + b')x_1 + \alpha a'' + b'' = 0,$$
$$(\alpha' a + b)y_1 + (\alpha' a' + b')x_1 + \alpha' a'' + b'' = 0;$$

so ist klar, daß die beiden conjugirten Durchmesser einander parallel sind, wenn

$$\frac{\alpha a' + b'}{\alpha a + b} = \frac{\alpha' a' + b'}{\alpha' a + b}$$

ist. Dies ist aber, unabhängig von speciellen Werthen der Größen α und α', der Fall, wenn $ab' = a'b$ ist. Aus vorstehender Gleichung folgt nämlich

$$(\alpha' a + b)(\alpha a' + b') = (\alpha a + b)(\alpha' a' + b')$$

oder

$$\alpha\alpha' aa' + \alpha a' b + \alpha' ab' + bb' = \alpha\alpha' aa' + \alpha' a' b + \alpha ab' + bb' ,$$

oder

$$\alpha a' b + \alpha' ab' = \alpha ab' + \alpha' a' b ,$$

d. i., wenn $ab' = a'b$ ist,

$$(\alpha + \alpha') ab' = (\alpha + \alpha') ab' ,$$

oder

$$\alpha + \alpha' = \alpha + \alpha' .$$

Da dies nun eine identische Gleichung ist, so folgt das zu Beweisende unmittelbar.

Den Punkt, in welchem sich alle conjugirte Diameter eines Systems, wenn es nämlich einen solchen Punkt giebt, schneiden, wollen wir den Mittelpunkt dieses Systems nennen.

17. Wir wollen uns jetzt in dem Systeme xy zwei beliebige Punkte $x'y'$, $x''y''$, in dem Systeme $x_1 y_1$ zwei beliebige Punkte $x'_1 y'_1$, $x''_1 y''_1$ denken. Die Gleichungen der Polaren dieser vier Punkte seyen nach der Reihe

$$F(x', y', x_1, y_1) = 0 , \quad F(x'', y'', x_1, y_1) = 0 ,$$
$$F(x, y, x'_1, y'_1) = 0 , \quad F(x, y, x''_1, y''_1) = 0 .$$

Ferner sey

p das Perpendikel von $x'y'$ auf $F(x, y, x'_1, y'_1) = 0$,
q das Perpendikel von $x'y'$ auf $F(x, y, x''_1, y''_1) = 0$,
p' das Perpendikel von $x''y''$ auf $F(x, y, x'_1, y'_1) = 0$,
q' das Perpendikel von $x''y''$ auf $F(x, y, x''_1, y''_1) = 0$;

p_1 das Perpendikel von $x'_1 y'_1$ auf $F(x', y', x_1, y_1) = 0$,
q_1 das Perpendikel von $x'_1 y'_1$ auf $F(x'', y'', x_1, y_1) = 0$,
p'_1 das Perpendikel von $x''_1 y''_1$ auf $F(x', y', x_1, y_1) = 0$,
q'_1 das Perpendikel von $x''_1 y''_1$ auf $F(x'', y'', x_1, y_1) = 0$.

Setzen wir nun

$$ay' + bx' + c = A , \quad a'y' + b'x' + c' = B ;$$
$$ay'' + bx'' + c = A' , \quad a'y'' + b'x'' + c' = B' ;$$

$$ay'_1 + a'x'_1 + a'' = \mathfrak{A} , \quad by'_1 + b'x'_1 + b'' = \mathfrak{B} ;$$
$$ay''_1 + a'x''_1 + a'' = \mathfrak{A}' , \quad by''_1 + b'x''_1 + b'' = \mathfrak{B}' ;$$

so ist nach dem Artikel Linie und Ebene (26*.) i. d. Z.

$$p^2 = \frac{\{F(x', y', x'_1, y'_1)\}^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} , \quad p_1^2 = \frac{\{F(x', y', x'_1, y'_1)\}^2}{A^2 + B^2} ;$$

$$q^2 = \frac{\{F(x', y', x''_1, y''_1)\}^2}{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2} , \quad q_1^2 = \frac{\{F(x'', y'', x'_1, y'_1)\}^2}{A'^2 + B'^2}$$

$$p'^2 = \frac{\{F(x'', y'', x'_1, y'_1)\}^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}, \quad p'^2_1 = \frac{\{F(x', y', x''_1, y''_1)\}^2}{A^2 + B^2};$$

$$q'^2 = \frac{\{F(x'', y'', x''_1, y''_1)\}^2}{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2}, \quad q'^2_1 = \frac{\{F(x'', y'', x''_1, y''_1)\}^2}{A'^2 + B'^2}.$$

Also ist

$$\frac{p^2}{p'^2} = \left\{\frac{F(x', y', x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x'_1, y'_1)}\right\}^2, \quad \frac{p_1^2}{p'^2_1} = \left\{\frac{F(x', y', x'_1, y'_1)}{F(x', y', x''_1, y''_1)}\right\}^2;$$

$$\frac{q^2}{q'^2} = \left\{\frac{F(x', y', x''_1, y''_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2, \quad \frac{q_1^2}{q'^2_1} = \left\{\frac{F(x'', y'', x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2;$$

folglich

$$\frac{p^2}{p'^2} \cdot \frac{q_1^2}{q'^2_1} = \left\{\frac{F(x', y', x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2, \quad \frac{p_1^2}{p'^2_1} \cdot \frac{q^2}{q'^2} = \left\{\frac{F(x', y', x'_1, y'_1)}{F(x'', y'', x''_1, y''_1)}\right\}^2;$$

also

$$\frac{p^2}{p'^2} \cdot \frac{q_1^2}{q'^2_1} = \frac{p_1^2}{p'^2_1} \cdot \frac{q^2}{q'^2},$$

oder

$$\frac{p}{p'} \cdot \frac{q_1}{q'_1} = \frac{p_1}{p'_1} \cdot \frac{q}{q'},$$

oder

$$63. \quad \frac{p}{p'} : \frac{q}{q'} = \frac{p_1}{p'_1} : \frac{q_1}{q'_1},$$

oder

$$64. \quad \frac{p}{p'} : \frac{p_1}{p'_1} = \frac{q}{q'} : \frac{q_1}{q'_1}.$$

Bezeichnet man jetzt die Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'_1y'_1$, $x''_1y''_1$ durch A, B, A_1, B_1, ihre respektiven Polaren durch a, b, a_1, b_1, und die von A auf a_1 und b_1, von B auf a_1 und b_1, von A_1 auf a und b, von B_1 auf a und b gefällten Perpendikel durch Aa_1, Ab_1, Ba_1, Bb_1, A_1a, A_1b, B_1a, B_1b; so ist

$$p = Aa_1, \quad q = Ab_1, \quad p' = Ba_1, \quad q' = Bb_1;$$
$$p_1 = A_1a \quad q_1 = A_1b, \quad p'_1 = B_1a, \quad q'_1 = B_1b;$$

folglich

$$65. \quad \frac{Aa_1}{Ba_1} : \frac{Ab_1}{Bb_1} = \frac{A_1a}{B_1a} : \frac{A_1b}{B_1b},$$

$$66. \quad \frac{Aa_1}{Ba_1} : \frac{A_1a}{B_1a} = \frac{Ab_1}{Bb_1} : \frac{A_1b}{B_1b}.$$

Daß diese Proportionen überhaupt gelten, wenn die beiden Linien Aa_1, Ba_1 die Linie a_1, die beiden Linien Ab_1, Bb_1 die Linie b_1, die beiden Linien A_1a, B_1a die Linie a, die beiden Linien A_1b, B_1b die Linie b unter gleichen Winkeln schneiden, erhellet nun leicht.

18. In Fig. 43. seyen jetzt **A, B, C, D** vier in gerader Linie liegende Punkte, und **a', b', c', d'** die Polaren dieser Punkte, welche sich also nach dem Obigen sämmtlich in einem und demselben Punkte **P'** schneiden. Ferner denke man sich eine beliebige gerade Linie **MN**, welche die Linien **a', b', c', d'** in den Punkten **A', B', C', D'** schneidet, und lasse **P** den Pol dieser geraden Linie seyn. Zieht man jetzt die Linien **PB, PC**; so ist, weil **P** der Pol von **MN**, **B** der Pol von **b'** ist, **PB** die Polare **b** von **B'** und eben so **PC** die Polare **c** von **C'**. Betrachtet man nun, welches offenbar verstattet ist, **AB** und **BD** als zwei gegen **b**, **AC** und **CD** als zwei gegen **c**, **B'A'** und **C'A'** als zwei gegen **a'**, **B'D'** und **C'D'** als zwei gegen **d'** unter gleichen Winkeln geneigte gerade Linien; so ist nach (65.)

$$67.\quad \frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{B'D'}{C'D'}$$

oder

$$68.\quad \frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'},$$

eine Proportion, deren Uebereinstimmung mit der Proportion (43.) unverkennbar ist.

19. Jetzt kann man nun auch leicht die folgenden Aufgaben auflösen.

I. Es sind vier in gerader Linie liegende Punkte eines Systems und drei von den ihnen entsprechende Polaren des reciproken Systems gegeben; man soll die Polare des vierten der gegebenen Punkte construiren.

Die vier in gerader Linie liegenden gegebenen Punkte seyen **A, B, C, D** (Fig. 44.), und **a', b', c'** seyen die drei Polaren der Punkte **A, B, C**, die sich also, weil diese drei Punkte in gerader Linie liegen, in einem Punkte **P'** schneiden müssen. Um nun die Polare des vierten gegebenen Punktes **D** zu finden, ziehe man eine beliebige gerade Linie **MN**, welche die drei gegebenen Polaren in **A', B', C'** schneidet, und lege durch den Punkt **A'** noch eine zweite beliebige Linie, auf welcher man $A'B'' = AB$, $A'C'' = AC$, $A'D'' = AD$ abschneidet. Hierauf ziehe man die Linien **B'B''**, **C'C''**, welche sich in **O** schneiden mögen, ziehe **OD''**, und verlängere diese Linie, bis die Linie **MN** von derselben in **D'** geschnitten wird. Die von **P'** nach **D'** gezogene Linie **P'D'** ist nun die gesuchte Polare des Punktes **D**, wie auf folgende Art bewiesen werden kann.

Durch **D''** ziehe man mit **B'B''** und **C'C''** die Parallelen **D''E'** und **D''F'**; so ist

$$\frac{A'B''}{B'D''} = \frac{A'B'}{B'E'},\quad \frac{A'C''}{C'D''} = \frac{A'C'}{C'F'}.$$

Ferner ist

$$\frac{B'E'}{B'D'} = \frac{D''O}{D'O}, \quad \frac{C'F'}{C'D'} = \frac{D''O}{D'O}.$$

Also ist

$$\frac{A'B''}{B''D''} \cdot \frac{D''O}{D'O} = \frac{A'B'}{B'E'} \cdot \frac{B'E'}{B'D'} = \frac{A'B'}{B'D'},$$
$$\frac{A'C''}{C''D''} \cdot \frac{D''O}{D'O} = \frac{A'C'}{C'F'} \cdot \frac{C'F'}{C'D'} = \frac{A'C'}{C'D'},$$

und folglich

$$\frac{A'B''}{B''D''} : \frac{A'C''}{C''D''} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'},$$

d. i. nach der Construction

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'},$$

woraus das zu Beweisende unmittelbar nach (68.) folgt.

II. Wenn vier sich in einem Punkte schneidende gerade Linien und drei von den ihnen entsprechenden Polen des reciproken Systems gegeben sind, den Pol der vierten gegebenen Linie durch Construction zu finden.

In Fig. 44. seyen a′ b′, c′, d′ die vier gegebenen Linien, welche sich nach der Voraussetzung sämmtlich in einem Punkte, hier in dem Punkte **P′**, schneiden. **A, B, C** seyen die drei gegebenen Punkte, welche, da die drei geraden Linien, deren Pole sie sind, sich in einem Punkte schneiden, in gerader Linie liegen müssen. Um nun den Pol der vierten gegebenen Linie zu finden, ziehe man eine gerade Linie **MN**, welche die vier gegebenen Linien in **A′, B′, C′, D′** schneidet, lege durch **A′** eine zweite gerade Linie, und nehme auf derselben **A′B″ = AB, A′C″ = AC.** Hierauf ziehe man die Linien **B′B″, C′C″**, welche sich in **O** schneiden mögen, und verbinde **O** mit **D′** durch eine gerade Linie, welche die Linie **A′C″** in **D″** schneiden mag. Verlängert man nun die Linie **AC** über **C** hinaus und macht **CD = C″D″**; so ist **D** der Pol der vierten gegebenen Linie **d′**, wofür der Beweis ganz eben so wie bei der vorhergehenden Aufgabe geführt werden kann.

III. Es sind vier Pole **A, B, C, D** eines Systems, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, und ihre vier Polaren **a′, b′ c′, d′** in einem reciproken Systeme, von denen also auch nicht drei sich in einem Punkte schneiden, gegeben. Man soll 1. zu einem fünften gegebenen Punkte **E** des ersten Systems die Polare **e′** im reciproken, und 2. zu einer fünften gegebenen Polare **e′** im reciproken Systeme den Pol **E** im ersten Systeme durch Construction finden.

Man ziehe die Linien AB, CD (Fig. 45.), die sich in M, die Linien AD, BC, die sich in N schneiden mögen, und verbinde die Durchschnittspunkte A′, C′ von a′, b′ und c′ d′ durch die Linie A′C′, die Durchschnittspunkte B′, D′ von b′, c′ und a′, d′ durch die Linie B′D′; so ist, wie leicht erhellen wird, M der Pol von A′C′, N der Pol von B′D′.

1. Man ziehe, um die erste der beiden Aufgaben aufzulösen, NE und ME, und bestimme die Durchschnittspunkte P und Q mit den Linien a und d. Nun bestimme man nach I. mittelst der vier in gerader Linie liegenden Punkte A, B, M, P und der Polaren a′, b′, A′C′ der drei ersten dieser vier Punkte die Polare von P, und eben so mittelst der vier in gerader Linie liegenden Punkte A, D, N, Q und der Polaren a′, d′, B′D′ der drei ersten dieser Punkte die Polare von Q. Wird nun B′D′ von der Polare des Punktes P in P′, A′C′ von der Polare des Punktes Q in Q′ geschnitten; so ist P′ der Pol von NP, Q′ der Pol von MQ. Verbindet man also P′ und Q′ durch die gerade Linie P′Q′; so ist diese gerade Linie die Polare des Durchschnittspunktes der Linien NP und MQ, d. i. die gesuchte Polare des fünften gegebenen Punktes E.

2. Um die zweite Aufgabe aufzulösen, bestimme man die Durchschnittspunkte A′, B′, C′, D′ der gegebenen Linien a′, b′; b′, c′; c′, d′; a′, d′, so wie auch die Durchschnittspunkte P′, Q′ der Linien B′D′, A′C′ mit der fünften gegebenen Linie e′. Auch bestimme man die Durchschnittspunkte M und N der Linien AB, CD und BC, AD; so ist M der Pol von A′C′, N der Pol von B′D′. Mittelst der vier in einem Punkte A′ zusammentreffenden Linien A′D′, A′B′, A′C′, A′P′ und der Pole A, B, M der drei ersten dieser vier Linien bestimme man nach II. den Pol P von A′B′, und eben so bestimme man mittelst der vier in dem Punkte D′ zusammentreffenden Linien A′D′, C′D′, B′D′, D′Q′ und der Pole A, D, N der drei ersten dieser vier Linien nach II. den Pol Q von D′Q′. Dann ist offenbar PN die Polare von P′, QM die Polare von Q′, folglich der Durchschnittspunkt E von PN und QM der Pol von P′Q′, d. i. der gesuchte Pol der fünften gegebenen Linie e′.

Mittelst dieser beiden Aufgaben kann man zu jedem Systeme das reciproke System construiren, wenn nur entweder vier Punkte oder vier gerade Linien des reciproken Systems gegeben sind, welche vier bestimmten geraden Linien oder vier bestimmten Punkten des gegebenen Systems entsprechen sollen. Daß diese Data nöthig sind, wenn das zu einem gegebenen Systeme gehörende reciproke System vollkommen bestimmt seyn soll, erhellet auf der Stelle daraus, weil die Fundamentalgleichung der Reciprocitäts-Verwandtschaft acht willkührliche Constanten enthält.

20. Wir wollen jetzt annehmen, daß beide Coordinatensysteme rechtwinklig seyen, und wollen für x und y ganz allgemein respective

$$\alpha + x\cos\varphi - y\sin\varphi \text{ und } \beta + x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

setzen, wobei der Artikel Coordinaten (27. 4.) i. d. Z. zu vergleichen ist. Durch diese Substitution wird die Fundamentalgleichung der Reciprocität:

$$\{(a\cos\varphi - b\sin\varphi)y + (a\sin\varphi + b\cos\varphi)x + a\beta + b\alpha + c\}y_1$$
$$+ \{a'\cos\varphi - b'\sin\varphi)y + (a'\sin\varphi + b'\cos\varphi)x + a'\beta + b'\alpha + c'\}x_1$$
$$+ (a''\cos\varphi - b''\sin\varphi)y + (a''\sin\varphi + b''\cos\varphi)x + a''\beta + b''\alpha + 1 = 0.$$

Nun denke man sich die willkührlichen Größen α, β, φ so bestimmt, daß

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = a'\cos\varphi - b'\sin\varphi ,$$
$$a\beta + b\alpha + c = a''\cos\varphi - b''\sin\varphi ,$$
$$a'\beta + b'\alpha + c' = a''\sin\varphi + b''\cos\varphi$$

ist, welches offenbar immer möglich ist, da aus der ersten Gleichung

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{a' - b}{a + b'}$$

folgt, und, wenn φ bestimmt und eine reelle Größe ist, mittelst der zweiten und dritten Gleichung auch für α und β immer reelle Werthe gefunden werden, da diese beiden Gleichungen in Bezug auf α und β vom ersten Grade sind. Setzen wir nun, für die auf die obige Weise bestimmten Werthe von α, β, φ,

$$a\cos\varphi - b\sin\varphi = A,\ a'\sin\varphi + b'\cos\varphi = C,\ a''\beta + b''\alpha + 1 = F;$$
$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = a'\cos\varphi - b'\sin\varphi = B ,$$
$$a\beta + b\alpha + c = a''\cos\varphi - b''\sin\varphi = D ,$$
$$a'\beta + b'\alpha + c' = a''\sin\varphi + b''\cos\varphi = E ;$$

so erhält die Fundamentalgleichung der Reciprocität folgende Form:

$$69.\quad (Ay + Bx + D)y_1 + (By + Cx + E)x_1 + Dy + Ex + F = 0$$

oder

$$70.\quad (Ay_1 + Bx_1 + D)y + (By_1 + Cx_1 + E)x + Dy_1 + Ex_1 + F = 0.$$

Denkt man sich nun beide Systeme auf das so eben näher bestimmte Coordinatensystem der xy bezogen, so daß also jetzt die $x_1 y_1$ zu demselben Coordinatensysteme gehören, wie die xy, und nimmt nun in der Ebene der beiden Systeme einen beliebigen Punkt an, dessen Coordinaten p, q seyn mögen; so ist, wenn man diesen Punkt als zu dem Systeme der xy gehörend betrachtet, die Gleichung der Polare desselben nach (69.)

$$(Aq + Bp + D)y_1 + (Bq + Cp + E)x_1 + Dq + Ep + F = 0 .$$

Betrachtet man aber den Punkt pq als zu dem Systeme der $x_1 y_1$ gehörend, so ist nach (70.)

$$(Aq + Bp + D)y + (Bq + Cp + E)x + Dq + Ep + F = 0$$

die Gleichung seiner Polare. Da nun aber die beiden Coordina-

tensysteme nicht von einander verschieden sind, so ist klar, daß die beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derselben geraden Linie angehören, und daß also jetzt, wenn alle obigen Voraussetzungen erfüllt sind, einem beliebigen Punkte pq in der gemeinschaftlichen Ebene beider Systeme ein und dieselbe Polare entspricht, man mag den in Rede stehenden Punkt als zu dem einen, oder als zu dem andern Systeme gehörend betrachten. Man muß folglich, wie aus dem Obigen hervorgeht, wenn dies bei zwei beliebigen reciproken Systemen der Fall seyn soll, dieselben immer auf eine bestimmte Art auf einander legen, und die Art und Weise, wie dieses Aufeinanderlegen bewirkt werden muß, ergiebt sich ebenfalls aus den obigen Bestimmungen.

21. Das in (15.) bewiesene Theorem ist vorzüglich deshalb so überaus wichtig, weil sich mittelst desselben aus jedem geometrischen Satze, der keine Größenbestimmung enthält, auf die leichteste Weise ein anderer Satz ableiten läßt, wie wir an dem folgenden sehr instructiven Beispiele zeigen wollen.

Zuerst beweisen wir folgenden Lehrsatz:

Durch die drei in gerader Linie liegenden Punkte **A**, **B**, **C** (Fig. 46.) ziehe man drei ganz beliebige gerade Linien **Aa**, **Bb**, **Cc**, welche sich in den drei Punkten **A′**, **B′**, **C′** schneiden mögen. Verbindet man nun zwei von diesen Punkten, z. B. **B′** und **C′**, mit den beiden gegebenen Punkten **B** und **C** durch die geraden Linien **BB′**, **CC′**, welche sich in **O** schneiden, und zieht dann die Linie **A′O**; so schneidet diese Linie die Linie **ABC** immer in demselben bestimmten Punkte **P**, wie auch die drei von **A**, **B**, **C** ausgehenden geraden Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** gezogen seyn mögen.

Man nehme **ABC** als Abscissen-, **Aa** als Ordinatenaxe an, und bezeichne die Abscissen von **B** und **C** durch x' und x'', die Ordinaten von **B′** und **C′** durch y' und y''; so sind, wie leicht erhellen wird, die Gleichungen der Linien **BB′**, **CC′**, **BC′**, **CB′** nach der Reihe:

$$\frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}=1,\quad \frac{y}{y''}+\frac{x}{x''}=1,\quad \frac{y}{y''}+\frac{x}{x'}=1,\quad \frac{y}{y'}+\frac{x}{x''}=1.$$

Sowohl die Summe der ersten und zweiten, als auch die Summe der dritten und vierten Gleichung ist

$$\left(\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}\right)y+\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)x=2.$$

Die Coordinaten des Punktes **O** müssen die erste und zweite der vier obigen Gleichungen, also auch die Summe dieser beiden Gleichungen, d. i. die fünfte Gleichung, befriedigen. Die Coordinaten des Punktes **A′** müssen die dritte und vierte der vier obigen Gleichungen, also auch die Summe dieser beiden Gleichungen,

d. i. die fünfte Gleichung, befriedigen. Folglich wird die fünfte Gleichung sowohl von den Coordinaten des Punktes **O**, als auch von den Coordinaten des Punktes **A′** befriedigt, und ist also die Gleichung der durch die beiden in Rede stehenden Punkte gehenden geraden Linie **A′O** oder **A′P**. Um nun die Abscisse des Punktes **P** zu finden, muß man in der fünften Gleichung, da **ABC** die Abscissenaxe ist, offenbar $y = 0$ setzen. Dadurch erhält man

$$x = \frac{2x'x''}{x' + x''},$$

ein Ausdruck, der bloß von den Abscissen der Punkte **B, C**, d. i. von der Lage dieser Punkte gegen den Punkt **A**, abhängt, von den Coordinaten der Punkte **B′, C′** und dem Coordinatenwinkel ganz unabhängig ist. Dies führt unmittelbar zu dem zu beweisenden Satze.

Construirt man nun zu der Figur, auf welche der vorhergehende Lehrsatz führt, die reciproke Figur; so entsprechen den drei in gerader Linie liegenden Punkten **A, B, C** drei sich in einem Punkte schneidende gerade Linien als Polaren. Diese geraden Linien wollen wir durch α, β, γ, ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt durch $(\alpha\beta\gamma)$ bezeichnen. Den drei durch **A, B, C** beliebig gezogenen geraden Linien **Aa, Bb, Cc** entsprechen drei auf den Linien α, β, γ beliebig angenommene Punkte als Pole. Diese drei Pole wollen wir durch $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ bezeichnen. Den drei Durchschnittspunkten **A′, B′, C′** der Linien **Aa, Bb, Cc** entsprechen die drei Verbindungslinien von $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$, die wir durch α', β', γ' bezeichnen wollen, als Polaren. Den Verbindungslinien von **B** und **B′**, **C** und **C′** entsprechen die Durchschnittspunkte von β und β', γ und γ', die wir durch $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ bezeichnen wollen, als Pole. Der Verbindungslinie **A′O** des dritten Durchschnittspunktes **A′** und des Durchschnittes **O** von **BB′** und **CC′** entspricht der Durchschnittspunkt $(\alpha'\omega)$ von α' und der Verbindungslinie ω von $(\beta\beta')$ und $(\gamma\gamma')$. Dem Punkte **P** der geraden Linie **ABC**, in welchem **ABC** von **A′O** geschnitten wird, entspricht eine gerade Linie π, die durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht, und auf welcher der Punkt $(\alpha'\omega)$ liegt. Da nun der Punkt **P** ein bestimmter ist, wie auch die drei durch **A, B, C** gezogenen Linien **Aa, Bb, Cc** liegen mögen; so ist auch die gerade Linie π eine bestimmte, wie auch die Punkte $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ auf α, β, γ angenommen seyn mögen. Betrachten wir nun bloß die reciproke Figur, so haben wir drei sich in einem Punkte $(\alpha\beta\gamma)$ schneidende gerade Linien α, β, γ; auf jeder derselben einen beliebig angenommenen Punkt $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$; die drei Verbindungslinien α', β', γ' dieser Punkte; die Durchschnittspunkte $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ von β und β', γ und γ'; die Verbindungslinie ω von $(\beta\beta')$ und $(\gamma\gamma')$; den Durchschnittspunkt $(\alpha'\omega)$ von α' und ω; die gerade Linie π, welche

den Punkt $(\alpha'\omega)$ enthält und durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht. Der geometrische Ort des Punktes $(\alpha'\omega)$ ist daher eine gerade Linie, die durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht, wie auch die Punkte $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ auf α, β, γ angenommen werden mögen. Dies giebt folgenden Lehrsatz:

Wenn zwei feste gerade Linien **Aa**, **Ad** (Fig. 46.) gegeben sind, und man durch einen Punkt **A'** zwei beliebige gerade Linien **A'B**, **A'C** zieht und die Durchschnittspunkte **B**, **B'** und **C**, **C'** durch gerade Linien verbindet; so ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes **O** dieser Verbindungslinien eine gerade Linie, die durch den Punkt **A** geht, wie auch der Punkt **A'** auf der Verbindungslinie **AA'** angenommen werden mag.

Wir haben dieses sehr instructive Beispiel der Ableitung eines geometrischen Satzes aus einem andern keine Größenbestimmungen enthaltenden Satze mittelst des Princips der Reciprocität aus der trefflichen Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie von L. J. Magnus. Berlin. 1833. S. 69. entlehnt, und bemerken nun nur noch, daß es, um eine solche Ableitung eines Satzes aus einem andern zu machen, keineswegs unbedingt nöthig ist, sich die reciproke Figur vollständig construirt zu denken, sondern daß es jederzeit hinreicht, wenn man in dem vorgelegten Satze überall gerade Linien für Punkte, Punkte für gerade Linien Zusammentreffen in einem Punkte für Liegen in gerader Linie und Liegen in gerader Linie für Zusammentreffen in einem Punkte setzt, um auf der Stelle den abzuleitenden Satz zu erhalten. Die neuern Geometer pflegen solche aus einander abgeleitete Sätze einander gegenüber zu stellen, wie folgendes Beispiel, dessen erster Satz in (13.) mittelst der allgemeinen Theorie der Collineations-Verwandtschaft bewiesen worden ist, zeigt:

Wenn die drei Verbindungslinien der Spitzen zweier Dreiecke sich in einem Punkte schneiden; so liegen die drei Durchschnittspunkte der diesen Spitzen gegenüberliegenden Seiten in gerader Linie.	Wenn die drei Durchschnittspunkte der Seiten zweier Dreiecke in gerader Linie liegen; so schneiden sich die Verbindungslinien der diesen Seiten gegenüberliegenden Spitzen in einem Punkte.

22. Die Natur dieses Werkes gestattet es uns nicht, die vorhergehende Theorie der Collineation und Reciprocität auf Figuren im Raume auszudehnen, und ihre Anwendung in der Theorie der krummen Linien und krummen Flächen zu zeigen. Wir bemerken daher nur noch, daß die Collineations-Verwandtschaft

nebst den als besondere Fälle derselben erscheinenden geometrischen Verwandtschaften, wovon ausführlich die Rede gewesen ist, zuerst von dem scharfsinnigen Möbius in seinem schon in (12. III.) erwähnten trefflichen barycentrischen Calcul in die Geometrie eingeführt, und als eine Quelle sehr vieler merkwürdiger Folgerungen nachgewiesen worden ist. Die Einführung der Reciprocität (théorie des polaires reciproques) als allgemeines geometrisches Princip in die Geometrie verdankt man Poncelet, worüber vorzüglich eine Abhandlung in den Annales de Mathém. T. VIII. p. 201., eine Abhandlung in Crelles Journ. B. IV. S. 1., und der Traité des proprietés projectives des figures (Paris. 1822.) von Poncelet nachzusehen sind. In der schönen in den Annales de Mathém. T. XVI. p. 209. abgedruckten Abhandlung: Considerations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue hat Gergonne darauf aufmerksam gemacht und an Beispielen nachgewiesen, daß, mit Ausnahme einiger wenigen an sich symmetrischen Sätze, wie z. B. des Euler'schen Theorems von den Polyedern und seines analogen von den Polygonen, alle geometrischen Sätze, die keine metrischen oder Größen-Bestimmungen enthalten, doppelt seyen, „c'est — à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème il en repond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots *points* et *droites*; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots *points* et *plans* qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif." Wie nahe dieses Gergonne'sche Princip der Dualität oder des Dualismus mit der théorie des polaires réciproques von Poncelet zusammenstimmt, übersieht man leicht, und es hat sich daher über die Erfindung dieser geometrischen Principe zwischen den beiden genannten ausgezeichneten Geometern auch ein Streit erhoben, welcher mit ziemlicher Heftigkeit geführt worden ist, wie man aus den Annales de Mathém. T. XVIII. p. 125. und dem Bulletin universel des sciences von Férussac (Bulletin des sc. math. Août 1827. p. 109.) ersehen kann. Am consequentesten findet sich der in Rede stehende merkwürdige geometrische Dualismus in dem trefflichen Werke von Steiner: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Thl. I. Berlin 1832. durchgeführt. Ein besonderes Verdienst hat sich auch Magnus sowohl durch weitere Ausbildung, als auch durch die in dem schon oben erwähnten Werke gelieferte sehr zweckmäßige und lichtvolle Darstellung der merkwürdigen Theorie der Collineation und Reciprocität erworben, weshalb wir auch dieser Darstellung in gegenwärtigem Artikel vorzugsweise gefolgt sind. Endlich s. m. auch noch System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, von J. Plücker. Berl. 1835. S. 48.

Vielecksschnitts-Verhältniß (ratio sectionalis polygonica) nennt Möbius in seinem Barycentrischen Calcul (Leipzig. 1827.) ein Verhältniß, welches aus den Verhältnissen, nach welchen bei einem ebenen oder nicht in einer Ebene liegenden Vielecke jede Seite, — den Anfangs- und Endpunkt derselben zum End- und Anfangspunkte der anliegenden Seiten genommen, — von einem beliebigen dritten in der Seite selbst oder in ihrer Verlängerung liegenden Punkte geschnitten wird, zusammengesetzt ist. Möbius hat von solchen Verhältnissen a. a. O. S. 299. mehrere merkwürdige Sätze bewiesen.

Vollständige Auflösungen der Differentialgleichungen, s. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

Vollständige Integrale, s. Einhüllende Curven und Flächen (7.) und (14.) i. d. Z.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Methode der kleinsten Quadrate ausführlich zu studiren dient am besten eine treffliche Abhandlung von Encke im Berliner astronomischen Jahrbuche vom Jahre 1835 an.

Wendungscurve, s. Einhüllende Curven und Flächen (11.) und Evolution (4.) i. d. Z.

Z.

Zerlegung der gebrochenen Functionen, s. Function I. i. d. Z.

Nachtrag zum Artikel Gleichung.

Ueber Fouriers Methode der geordneten Division.

1. Fourier hat den bei der Auflösung der Zahlengleichungen nöthigen, oft nicht ohne ziemliche Weitläufigkeit ausführbaren numerischen Calcul durch eine besondere Methode der gemeinen Division (division ordonnée) sehr erleichtert, welche auch schon im Artikel Gleichung (87.) im Allgemeinen erwähnt worden ist. Um indeß bei der Auflösung der numerischen Gleichungen so wenig wie möglich zu wünschen übrig zu lassen, soll diese in vielfacher Beziehung Beachtung verdienende Methode nebst ihrem Beweise, den Fourier zu geben gänzlich unterlassen hat, und einigen zu ihrer nähern Bestimmung uns nöthig scheinenden Bemerkungen hier nachgetragen werden.

2. Die Basis des zum Grunde liegenden Zahlensystems soll im Folgenden immer durch x bezeichnet werden, und kann jede beliebige positive ganze Zahl seyn, welche größer als die Einheit ist. Bezeichnen dann

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$$

beliebige positive ganze Zahlen, die sämmtlich kleiner als x sind; so kann, wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, jede nach dem Zahlensysteme, dessen Grundzahl x ist, geschriebene ganze Zahl, oder auch jeder sogenannte Systemsbruch durch den allgemeinen Ausdruck

$$ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_k x^{n-k}$$

dargestellt werden.

Hiernächst gehen wir nun zu dem folgenden für unsere fernere Untersuchung sehr wichtigen Satze über.

3. Wenn A eine ganz beliebige positive ganze Zahl ist, dagegen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$$

positive ganze Zahlen bezeichnen, die sämmtlich kleiner als x sind, und

$$N = Ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_k x^{n-k},$$

wo n jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnen kann, gesetzt wird; so ist jederzeit

$$N < (A+1)x^n.$$

Weil nach der Voraussetzung die positiven ganzen Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$$

sämmtlich kleiner wie die positive ganze Zahl x, die immer größer als die Einheit angenommen wird, sind; so ist offenbar

$$N \lesseqgtr Ax^n + (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^{n-k})$$

oder

$$N \lesseqgtr Ax^n + (x-1)x^{n-k}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{k-1}),$$

d. i. nach der bekannten Summation der geometrischen Progressionen

$$N \lesseqgtr Ax^n + (x-1)x^{n-k} \cdot \frac{x^k - 1}{x-1}$$

oder

$$N \lesseqgtr Ax^n + x^{n-k}(x^k - 1),$$

d. i.

$$N \lesseqgtr (A+1)x^n - x^{n-k},$$

und folglich offenbar immer

$$N < (A+1)x^n,$$

wie bewiesen werden sollte.

4. Wenn A und A' zwei ganz beliebige positive ganze Zahlen, dagegen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$$

positive ganze Zahlen, die sämmtlich kleiner als x sind, bezeichnen, und $A' > A$ ist; so ist für jedes positive oder negative ganze n

$$A'x^n > Ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_kx^{n-k}.$$

Setzen wir der Abkürzung wegen

$$N = Ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_kx^{n-k};$$

so ist nach 3.

$$N < (A+1)x^n.$$

Weil aber A und A' positive ganze Zahlen sind, und $A' > A$ ist; so ist offenbar

$$A' \gtreqless A + 1,$$

und folglich

$$A'x^n \gtreqless (A+1)x^n.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$A'x^n > N,$$

d. i.

$$A'x^n > Ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_k x^{n-k},$$

wie bewiesen werden sollte.

5. Wenn A und B zwei Zahlen von der Form

$$A = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_k x^{n-k},$$

$$B = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_i x^{n-i}$$

sind, wo

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k;$$

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i$$

lauter positive ganze Zahlen, und

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$$

sämmtlich kleiner als x seyn sollen, auch angenommen wird, daß α nicht $= 0$ ist; so ist immer

$$Bx > A.$$

Weil man sich nämlich A unter der Form

$$A = 0.x^{n+1} + ax^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k x^{n-k}$$

dargestellt denken kann, und nach der Voraussetzung $\alpha > 0$ ist; so ist nach 4.

$$\alpha x^{n+1} > A.$$

Weil nun ferner

$$Bx = \alpha x^{n+1} + \alpha_1 x^n + \alpha_2 x^{n-1} + \ldots + \alpha_i x^{n-i+1}$$

ist; so ist natürlich um so mehr

$$Bx > A,$$

wie bewiesen werden sollte.

6. Fourier sondert bei seiner Divisionsmethode vom Divisor und Dividendus immer einige der höchsten Ziffern dieser Zahlen in ihrer natürlichen Folge ab, und bezeichnet dies ganz zweckmäßig und einfach dadurch, daß er über die abgesonderten Ziffern einen Horizontalstrich macht. Die durch die vom Divisor und Dividendus abgesonderten Ziffern dargestellten Zahlen nennt Fourier diviseur designé und dividende designé. Wir werden diese Zahlen im Folgenden den überstrichenen Divisor und Dividendus nennen. Beim Ueberstreichen befolgt Fourier die Regel, daß er, nachdem er eine beliebige Anzahl von Ziffern des Divisors überstrichen hat, jederzeit entweder eben so viele Ziffern des Dividendus oder eine mehr überstreicht, jenachdem nämlich die Zahl, welche durch eine der Anzahl der Ziffern des überstrichenen Divisors gleiche Anzahl höchster Ziffern des Dividendus dargestellt wird, nicht kleiner, oder kleiner wie der überstrichene Divisor ist. Durch diese Regel erreicht man den Zweck, daß, wenn man mit dem überstrichenen Divisor in den

überstrichenen Dividendus dividirt, der Quotient jederzeit kleiner als die Grundzahl x, oder eine einziffrige Zahl ist, d. h. eigentlich, daß die größte in dem Bruche, dessen Zähler der überstrichene Dividendus, der Nenner der überstrichene Divisor ist, enthaltene ganze Zahl jederzeit kleiner als die Basis x, oder eine einziffrige Zahl ist, welches sich auf folgende Art leicht streng beweisen läßt.

Bezeichnen c und a den nach der von Fourier gegebenen Regel überstrichenen Divisor und Dividendus; so haben c und a entweder gleich viele Ziffern, oder a hat eine Ziffer mehr als c. Haben nun zuerst c und a gleich viele Ziffern; so ist nach 5.

$$cx > a,$$

und die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist folglich offenbar kleiner als x. Hat aber a eine Ziffer mehr wie c, so denke man sich a unter der Form

$$a = \alpha x + \alpha_1$$

dargestellt. Weil nun nach der von Fourier gegebenen Regel des Ueberstreichens dem überstrichenen Dividendus nur dann eine Ziffer mehr wie dem überstrichenen Divisor gegeben wird, wenn die Zahl α, welche eben so viele Ziffern wie c enthält, kleiner als c ist; so ist nach dem in 4. bewiesenen Satze in diesem Falle wieder

$$cx > a$$

und die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl also auch jetzt offenbar kleiner wie die Basis x des zum Grunde gelegten Zahlensystems, d. i. eine einziffrige Zahl.

Ist nun auch die Anwendung der von Fourier gegebenen Regel des Ueberstreichens nicht gerade unbedingt nöthig; so wollen wir im Folgenden doch, weil sie allerdings zur Vereinfachung der Rechnung beiträgt, von derselben jederzeit Gebrauch machen.

7. Dies vorausgesetzt, mag nun überhaupt

$$\Delta = cx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \ldots\ldots$$

der gegebene Divisor,

$$D = ax^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots\ldots$$

der gegebene Dividendus seyn; der überstrichene Divisor soll c, der überstrichene Dividendus soll a seyn, wobei wir voraussetzen, daß man bei dem Ueberstreichen die in 6. gegebene Regel befolgt habe.

Um D durch Δ zu dividiren, hat man auf folgende Art zu verfahren.

I. Man nehme die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl k, welche nach 6. kleiner als x oder eine einziffrige Zahl ist; so läßt sich zuerst leicht zeigen, daß die höchste oder erste Ziffer des gesuchten Quotienten nicht größer als k seyn kann.

Weil nämlich k die größte in dem Bruche $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$c(k+1) > a$$

und folglich nach 4.

$$c(k+1)x^m > D .$$

Das höchste Glied des Products

$$\Delta(k+1)x^{m-n}$$

ist aber die Größe $c(k+1)x^m$. Also ist offenbar

$$\Delta(k+1)x^{m-n} > D ,$$

und das höchste oder erste Glied des gesuchten Quotienten kann folglich nicht

$$(k+1)x^{m-n} ,$$

sondern höchstens

$$kx^{m-n} ,$$

die erste Ziffer des gesuchten Quotienten also höchstens k seyn.

Wenn nun

$$a - ck \gtreqless k$$

ist; so ist k jederzeit die richtige erste Ziffer des gesuchten Quotienten, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Nach dem in 3. bewiesenen Satze ist

$$\Delta < (c+1)x^n$$

und folglich

$$\Delta kx^{m-n} < (c+1)kx^m .$$

Weil aber nach der Voraussetzung

$$a - ck \gtreqless k$$

ist; so ist

$$a \gtreqless (c+1)k .$$

Also ist

$$\Delta kx^{m-n} < ax^m$$

und folglich offenbar um so mehr

$$\Delta kx^{m-n} < D$$

oder

$$D - \Delta kx^{m-n} > 0 ,$$

so daß also die erste Ziffer k des gesuchten Quotienten nicht zu groß ist.

Weil also k nach dem Vorhergehenden weder zu klein, noch zu groß ist; so ist k unter der gemachten Voraussetzung die richtige höchste oder erste Ziffer des gesuchten Quotienten.

II. Unter der Voraussetzung, daß

$$a - ck \geqq k$$

ist, ziehe man nun das Product $\Delta k x^{m-n}$ von D ab; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k = \Theta_1$$

gesetzt wird, als Rest die Größe

$$\begin{aligned} D_1 = \Theta_1 x^{m-1} &+ (a_2 - c_2 k) x^{m-2} \\ &+ (a_3 - c_3 k) x^{m-3} \\ &+ (a_4 - c_4 k) x^{m-4} \\ &+ \ldots \ldots \end{aligned}$$

wo nun zuerst zu bemerken ist, daß immer

$$\Theta_1 > 0$$

ist.

Da nämlich

$$a - ck \geqq k$$

und $x > c_1$ ist; so ist

$$(a - ck)x > c_1 k$$

und folglich um so mehr

$$(a - ck)x + a_1 > c_1 k$$

oder

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k > 0,$$

d. i.

$$\Theta_1 > 0,$$

wie behauptet wurde.

Um nun die zweite Ziffer des gesuchten Quotienten zu finden, nehme man die größte in dem Bruche $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl k_1; so läßt sich zuerst leicht zeigen, daß k_1 jederzeit eine einziffrige Zahl ist.

Da nämlich k die größte in $\frac{a}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$c(k + 1) > a,$$

und folglich nach dem im 4. bewiesenen Satze

$$c(k + 1)x > ax + a_1$$

also um so mehr

$$c(k + 1)x + c_1 k > ax + a_1;$$

folglich

$$cx > (a - ck)x + a_1 - c_1 k,$$

oder

$$cx > \Theta_1 ,$$

und daher die größte in $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl natürlich kleiner als x, oder eine einziffrige Zahl.

Ferner läßt sich zeigen, daß die zweite Ziffer des gesuchten Quotienten nicht größer als k_1 seyn kann.

Weil nämlich k_1 die größte in $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$c(k_1 + 1) > \Theta_1$$

und folglich nach 4.

$$c(k_1 + 1)x^{m-1} > \Theta_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots ;$$

also offenbar um so mehr

$$c(k_1 + 1)x^{m-1} > D_1$$

und folglich offenbar auch

$$\Delta(k_1 + 1)x^{m-n-1} > D_1 ,$$

so daß also die zweite Ziffer des gesuchten Quotienten nicht $k_1 + 1$, sondern höchstens k_1 seyn kann.

Wenn nun

$$\Theta_1 - ck_1 \geqq k + k_1$$

ist; so läßt sich behaupten, daß k_1 die richtige zweite Ziffer des gesuchten Quotienten ist.

Nach 3. ist nämlich

$$\Delta < (c + 1)x^n$$

und folglich

$$\Delta k_1 x^{m-n-1} < (c + 1)k_1 x^{m-1} .$$

Nach 3. ist aber auch

$$(c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k < (c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 + 1)k x^{m-2} ,$$

oder, weil $c_2 < x$ ist,

$$(c + 1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k < \{k + (c + 1)k_1\}x^{m-1} .$$

Weil nun nach der Voraussetzung

$$\Theta_1 - ck_1 \geqq k + k_1$$

und folglich

$$\Theta_1 \geqq k + (c + 1)k_1$$

ist; so ist

$$(c+1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k < \Theta_1 x^{m-1} ,$$

und folglich um so mehr

$$(c+1)k_1 x^{m-1} + (c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + \ldots)k < \Theta_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + \ldots ,$$

oder

$$(c+1)k_1 x^{m-1} < \Theta_1 x^{m-1} + (a_2 - c_2 k)x^{m-2} + (a_3 - c_3 k)x^{m-3} + (a_4 - c_4 k)x^{m-4} + \ldots\ldots,$$

d. i.

$$(c+1)k_1 x^{m-1} < D_1,$$

und nach dem Obigen folglich um so mehr

$$\Delta k_1 x^{m-n-1} < D_1.$$

Daher ist unter der gemachten Voraussetzung k_1 nicht zu groß, und k_1 ist also, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein ist, die richtige zweite Ziffer des gesuchten Quotienten

III. Unter der Voraussetzung, daß

$$\Theta_1 - ck_1 \gtrless k + k_1$$

ist, ziehe man jetzt das Product

$$\Delta k_1 x^{m-n-1}$$

von D_1 ab; so erhält man, indem man der Kürze wegen

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 = \Theta_2$$

setzt, als Rest die Größe

$$D_2 = \Theta_2 x^{m-2} + (a_3 - c_3 k - c_2 k_1)x^{m-3} + (a_4 - c_4 k - c_3 k_1)x^{m-4} + (a_5 - c_5 k - c_4 k_1)x^{m-5} + \ldots\ldots$$

und es läßt sich nun wieder beweisen, daß

$$\Theta_2 > 0$$

ist.

Da nämlich

$$\Theta_1 - ck_1 \gtrless k + k_1$$

und $x > c_1$, $x > c_2$ ist; so ist

$$(\Theta_1 - ck_1)x > c_2 k + c_1 k_1,$$

also offenbar

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 > 0,$$

d. i.

$$\Theta_2 > 0.$$

Um nun die dritte Ziffer des gesuchten Quotienten zu finden, nehme man die größte in dem Bruche $\frac{\Theta_2}{c}$ enthaltene ganze Zahl k_2; so läßt sich zuvörderst wieder leicht zeigen, daß k_2 jederzeit kleiner als x ist.

Da nämlich k_1 die größte in $\frac{\Theta_1}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$c(k_1 + 1) > \Theta_1$$

und folglich nach 4.

$$c(k_1 + 1)x > \Theta_1 x + a_2 .$$

Also ist auch

$$cx > (\Theta_1 - ck_1)x + a_2$$

und folglich um so mehr

$$cx > (\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 ,$$

d. i.

$$cx > \Theta_2 ,$$

wodurch die aufgestellte Behauptung offenbar gerechtfertigt ist.

Ferner läßt sich zeigen, daß die dritte Ziffer des gesuchten Quotienten nicht größer als k_2 seyn kann.

Da nämlich k_2 die größte in $\frac{\Theta_2}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$c(k_2 + 1) > \Theta_2$$

und folglich nach 4.

$$c(k_2 + 1)x^{m-2} > \Theta_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + \ldots\ldots$$

Also ist offenbar um so mehr

$$c(k_2 + 1)x^{m-2} > D_2 ,$$

und folglich offenbar auch

$$\Delta(k_2 + 1)x^{m-n-2} > D_2 .$$

Daher kann die dritte Ziffer des gesuchten Quotienten nicht $k_2 + 1$, sondern höchstens k_2 seyn.

Wenn nun

$$\Theta_2 - ck_2 \gtrless k + k_1 + k_2$$

ist; so ist k_2 die richtige dritte Ziffer des gesuchten Quotienten.

Nach 3. ist nämlich

$$\Delta < (c + 1)x^n$$

und folglich

$$\Delta k_2 x^{m-n-2} < (c+1)k_2 x^{m-2} .$$

Nun ist aber nach 3. auch

$$\begin{aligned}(c+1)k_2 x^{m-2} &+ (c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + \ldots.)k \\ &+ (c_2 x^{m-3} + c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + \ldots.)k_1 \\ < (c+1)k_2 x^{m-2} &+ (c_3 + 1)kx^{m-3} + (c_2 + 1)k_1 x^{m-3} \\ &< \{k + k_1 + (c+1)k_2\}x^{m-2} ,\end{aligned}$$

weil $c_2 < x$, $c_3 < x$ ist.

Nach der Voraussetzung ist aber

$$\Theta_2 \leqq k + k_1 + (c+1)k_2 .$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}(c+1)k_2 x^{m-2} + (c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + \ldots.)k \\ + (c_2 x^{m-3} + c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + \ldots.)k_1 \\ < \Theta_2 x^{m-2} ;\end{aligned}$$

also um so mehr

$$\begin{aligned}(c+1)k_2 x^{m-2} + (c_3 x^{m-3} + c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + \ldots.)k \\ + (c_2 x^{m-3} + c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + \ldots.)k_1 \\ < \Theta_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + a_5 x^{m-5} + \ldots..\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}(c+1)k_2 x^{m-2} < \Theta_2 x^{m-2} + (a_3 - c_3 k - c_2 k_1) x^{m-3} \\ + (a_4 - c_4 k - c_3 k_1) x^{m-4} \\ + (a_5 - c_5 k - c_4 k_1) x_m{}^{-5} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{aligned}$$

d. i.

$$(c+1)k_2 x^{m-2} < D_2 .$$

Folglich ist nach dem Obigen um so mehr

$$\Delta k_2 x^{m-n-2} < D_2 ,$$

und k_2 ist also nicht zu groß, so daß also k_2, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein ist, die richtige dritte Ziffer des gesuchten Quotienten ist, wie behauptet wurde.

IV. Unter der Voraussetzung, daß

$$\Theta_2 - ck_2 \leqq k + k_1 + k_2$$

ist, ziehe man nun das Product

$$\Delta k_2 x^{m-n-2}$$

von D_2 ab; so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 = \Theta_3$$

setzt, als Rest die Größe

$$\begin{aligned}D_3 = \Theta_3 x^{m-3} + (a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2) x^{m-4} \\ + (a_5 - c_5 k - c_4 k_1 - c_3 k_2) x^{m-5} \\ + (a_6 - c_6 k - c_5 k_1 - c_4 k_2) x^{m-6} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{aligned}$$

und kann nun wieder zunächst behaupten, daß

$$\Theta_3 > 0$$

ist.

Da nämlich

$$\Theta_2 - ck_2 \leqq k + k_1 + k_2$$

und $x > c_1$, $x > c_2$, $x > c_3$ ist; so ist

$$(\Theta_2 - ck_2)x > c_3 k + c_2 k_1 + c_1 k_2 ,$$

also

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 > 0 ,$$

d. i.

$$\Theta_3 > 0 ,$$

wie behauptet wurde.

Um nun die vierte Ziffer des gesuchten Quotienten zu finden, nehme man die größte in dem Bruche $\frac{\Theta_3}{c}$ enthaltene ganze Zahl k_3. Dann läßt sich wieder zuvörderst behaupten, daß k_3 jederzeit kleiner als x ist.

Da nämlich k_2 die größte in $\frac{\Theta_2}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$c(k_2 + 1) > \Theta_2 ,$$

und folglich nach 4.

$$c(k_2 + 1)x > \Theta_2 x + a_3 .$$

Also ist auch

$$cx > (\Theta_2 - ck_2)x + a_3$$

und folglich um so mehr

$$cx > (\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 ,$$

d. i.

$$cx > \Theta_3 ,$$

woraus die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung auf der Stelle erhellet.

Ferner läßt sich zeigen, daß die vierte Ziffer des gesuchten Quotienten nicht größer als k_3 seyn kann.

Da nämlich k_3 die größte in $\frac{\Theta_3}{c}$ enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$c(k_3 + 1) > \Theta_3 ,$$

und folglich nach 4.

$$c(k_3 + 1)x^{m-3} > \Theta_3 x^{m-3} + a_4 x^{m-4} + a_5 x^{m-5} + \ldots ,$$

also offenbar um so mehr

$$c(k_3 + 1)x^{m-3} > D_3 ,$$

und folglich offenbar auch

$$\Delta(k_3 + 1)x^{m-n-3} > D_3 .$$

Daher kann die vierte Ziffer des gesuchten Quotienten nicht $k_3 + 1$, sondern höchstens k_3 seyn.

Wenn nun

$$\Theta_3 - ck_3 \gtrless k + k_1 + k_2 + k_3$$

ist; so ist k_3 jederzeit die richtige vierte Ziffer des gesuchten Quotienten, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Nach 3. ist

$$\Delta < (c+1)x^n$$

und folglich

$$\Delta k_3 x^{m-n-3} < (c+1)k_3 x^{m-3} .$$

Nach 3. ist aber auch

$$\begin{aligned}(c+1)k_3 x^{m-3} &+ (c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + c_6 x^{m-6} + \ldots.)k \\ &+ (c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + c_5 x^{m-6} + \ldots.)k_1 \\ &+ (c_2 x^{m-4} + c_3 x^{m-5} + c_4 x^{m-6} + \ldots.)k_2 \\ < (c+1)k_3 x^{m-3} &+ (c_4+1)kx^{m-4} + (c_3+1)k_1 x^{m-4} + (c_2+1)k_2 x^{m-4} \\ < \{k + k_1 + k_2 &+ (c+1)k_3\}x^{m-3} ,\end{aligned}$$

weil $c_2 < x$, $c_3 < x$, $c_4 < x$ ist.

Nach der Voraussetzung ist aber

$$\Theta_3 \geqq k + k_1 + k_2 + (c+1)k_3 .$$

Also ist

$$\begin{aligned}(c+1)k_3 x^{m-3} &+ (c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + c_6 x^{m-6} + \ldots.)k \\ &+ (c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + c_5 x^{m-6} + \ldots.)k_1 \\ &+ (c_2 x^{m-4} + c_3 x^{m-5} + c_4 x^{m-6} + \ldots.)k_2 \\ < \Theta_3 x^{m-3}&\end{aligned}$$

und folglich um so mehr

$$\begin{aligned}(c+1)k_3 x^{m-3} &+ (c_4 x^{m-4} + c_5 x^{m-5} + c_6 x^{m-6} + \ldots.)k \\ &+ (c_3 x^{m-4} + c_4 x^{m-5} + c_5 x^{m-6} + \ldots.)k_1 \\ &+ (c_2 x^{m-4} + c_3 x^{m-5} + c_4 x^{m-6} + \ldots.)k_2 \\ < \Theta_3 x^{m-3} &+ a_4 x^{m-4} + a_5 x^{m-5} + a_6 x^{m-6} + \ldots. ,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(c+1)k_3 x^{m-3} < \Theta_3 x^{m-3} &+ (a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2)x^{m-4} \\ &+ (a_5 - c_5 k - c_4 k_1 - c_3 k_2)x^{m-5} \\ &+ (a_6 - c_6 k - c_5 k_1 - c_4 k_2)x^{m-6} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{aligned}$$

d. i.

$$(c+1)k_3 x^{m-3} < D_3 ,$$

und folglich um so mehr nach dem Obigen

$$\Delta k_3 x^{m-n-3} < D_3 ,$$

so daß also k_3 nicht zu groß, und folglich, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein ist, die richtige vierte Ziffer des gesuchten Quotienten ist.

V. Wie sich die vorhergehenden Betrachtungen weiter fortsetzen lassen, liegt schon jetzt deutlich vor Augen. Im Allgemeinen ziehen wir aber aus denselben das folgende Resultat.

Wenn k die größte in dem Bruche

$$\frac{a}{c} .$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k = \Theta_1$$

setzen; wenn dann wieder k_1 die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_1}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 = \Theta_2$$

setzen; wenn dann ferner k_2 die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_2}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 = \Theta_3$$

setzen; wenn dann ferner k_3 die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_3}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_3 - ck_3)x + a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2 - c_1 k_3 = \Theta_4$$

setzen, u. s. w.; wenn dann $k_{\mu-1}$ die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_{\mu-1}}{c}$$

enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und wir

$$(\Theta_{\mu-1} - ck_{\mu-1})x + a_\mu - c_\mu k - c_{\mu-1} k_1 - \ldots - c_1 k_{\mu-1} = \Theta_\mu$$

setzen; so sind unter der Voraussetzung, daß

$$a - ck \gtreqless k,$$

$$\Theta_1 - ck_1 \gtreqless k + k_1,$$

$$\Theta_2 - ck_2 \gtreqless k + k_1 + k_2,$$

$$\Theta_3 - ck_3 \gtreqless k + k_1 + k_2 + k_3$$

u. s. w. u. s. w.

$$\Theta_{\mu-1} - ck_{\mu-1} \gtreqless k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{\mu-1}$$

ist, die Größen

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \ldots \Theta_\mu$$

sämmtlich > 0, und

$$k, k_1, k_2, k_3, \ldots k_{\mu-1}$$

sind die richtigen μ ersten Ziffern des gesuchten Quotienten. Endlich erhellet auch aus dem Obigen, daß immer

$$cx > \Theta_\mu,$$

die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl, welche wir durch k_μ bezeichnen wollen, folglich kleiner als x ist, und daß die $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten nicht größer als k_μ seyn kann.

VI. Hiernach kann man sich nun bei der Entwickelung des Quotienten

$$\frac{D}{\Delta}$$

auf folgende Art verhalten.

Nachdem man eine beliebige Anzahl höchster Ziffern des Divisors überstrichen, und den überstrichenen Dividendus nach der oben gegebenen Regel bestimmt hat, nehme man, wenn wieder c und a den überstrichenen Divisor und Dividendus bezeichnen, die größte in dem Bruche

$$\frac{a}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k.

Hierauf bilde man das Product ck und ziehe dasselbe von a ab; so ist, wenn

$$a - ck \gtrless k$$

ist, k die richtige erste Ziffer des gesuchten Quotienten.

Unter der Voraussetzung, daß die vorige Bedingung erfüllt ist, ziehe man zu der Differenz

$$a - ck$$

die auf den überstrichenen Dividendus a folgende Ziffer a_1 des Dividendus herunter; so erhält man die Größe

$$(a - ck)x + a_1 .$$

Dann bilde man sich die Größe $c_1 k$ und ziehe dieselbe von der vorhergehenden Größe ab; so erhält man die Größe

$$(a - ck)x + a_1 - c_1 k = \Theta_1 .$$

Nun nehme man die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_1}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_1.

Dann bilde man das Product ck_1 und ziehe dasselbe von Θ_1 ab; so ist, wenn

$$\Theta_1 - ck_1 \gtrless k + k_1$$

ist, k_1 die richtige zweite Ziffer des gesuchten Quotienten.

Unter der Voraussetzung, daß die vorhergehende Bedingung erfüllt ist, ziehe man nun zu der Differenz

$$\Theta_1 - ck_1$$

die auf a_1 folgende Ziffer a_2 des Dividendus herunter; so erhält man die Größe

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 .$$

Nun bilde man sich die Größe

$$c_2 k + c_1 k_1$$

und ziehe dieselbe von der vorhergehenden Größe ab; so erhält man die Größe

$$(\Theta_1 - ck_1)x + a_2 - c_2 k - c_1 k_1 = \Theta_2 .$$

Hierauf nehme man die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_2}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_2, bilde das Product ck_2, und ziehe dasselbe von der Größe Θ_2 ab; so ist, wenn

$$\Theta_2 - ck_2 \gtreqless k + k_1 + k_2$$

ist, k_2 die richtige dritte Ziffer des gesuchten Quotienten.

Unter der Voraussetzung, daß die vorhergehende Bedingung erfüllt ist, ziehe man zu der Differenz

$$\Theta_2 - ck_2$$

die auf a_2 folgende Ziffer a_3 des Dividendus herunter; so erhält man die Größe

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 .$$

Nun bilde man die Größe

$$c_3 k + c_2 k_1 + c_1 k_2$$

und ziehe dieselbe von der vorhergehenden Größe ab; so erhält man die Größe

$$(\Theta_2 - ck_2)x + a_3 - c_3 k - c_2 k_1 - c_1 k_2 = \Theta_3 .$$

Nimmt man dann wieder die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_3}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_3, bildet das Product ck_3, zieht dasselbe von Θ_3 ab, und findet, daß

$$\Theta_3 - ck_3 \gtreqless k + k_1 + k_2 + k_3$$

ist; so ist k_3 die richtige vierte Ziffer des gesuchten Quotienten.

Unter der Voraussetzung, daß die vorige Bedingung erfüllt ist, zieht man ferner die auf a_3 folgende Ziffer a_4 des Dividendus zu der Differenz

$$\Theta_3 - ck_3$$

herunter, und findet dadurch die Größe

$$(\Theta_3 - ck_3)x + a_4 .$$

Dann bildet man die Größe

$$c_4 k + c_3 k_1 + c_2 k_2 + c_1 k_3 ,$$

zieht dieselbe von der vorhergehenden Größe ab, und erhält dadurch die Größe

$$(\Theta_3 - ck_3)x + a_4 - c_4 k - c_3 k_1 - c_2 k_2 - c_1 k_3 = \Theta_4 .$$

Nimmt man dann wieder die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_4}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_4, bildet das Product ck_4, zieht dasselbe von Θ_4 ab, und findet, daß

$$\Theta_4 - ck_4 \geqq k + k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

ist; so ist k_4 die richtige fünfte Ziffer des gesuchten Quotienten.

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, ist klar. Nur aber darf man nicht aus den Augen verlieren, daß diese Methode überhaupt bloß so lange anwendbar ist, so lange die Bedingungen

$$a - ck \geqq k$$

$$\Theta_1 - ck_1 \geqq k + k_1,$$

$$\Theta_2 - ck_2 \geqq k + k_1 + k_2,$$

$$\Theta_3 - ck_3 \geqq k + k_1 + k_2 + k_3,$$

$$\Theta_4 - ck_4 \geqq k + k_1 + k_2 + k_3 + k_4,$$

u. s. w. u. s. w.

erfüllt sind. Hören diese Bedingungen auf erfüllt zu seyn; so muß man ein anderes Verfahren eintreten lassen, wovon später die Rede seyn wird.

Die Größten Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, ... nennt Fourier den zweiten, dritten, vierten, fünften, u. s. w. verbesserten partiellen Dividendus.

Die Größen

$$c_1 k,$$

$$c_2 k + c_1 k_1,$$

$$c_3 k + c_2 k_1 + c_1 k_2,$$

$$c_4 k + c_3 k_1 + c_2 k_2 + c_1 k_3,$$

$$c_5 k + c_4 k_1 + c_3 k_2 + c_2 k_3 + c_1 k_4,$$

u. s. w.

bildet man sehr leicht, indem man entweder in Gedanken oder auf einem besondern Streifchen Papier die gefundenen Ziffern des Quotienten den auf den überstrichenen Divisor zunächst folgenden Ziffern des Divisors in umgekehrter Ordnung untersetzt, die über einander stehenden Ziffern in einander multiplicirt, und die sämmtlichen auf diese Weise erhaltenen Producte durch Addition mit einander vereinigt.

Das folgende Exempel wird die Regeln, welche man zu befolgen hat, in ein noch helleres Licht setzen.

$\overline{234}567898765 \,|\, \overline{12345}'6'7'8'9'8'73647 \,|\, 526315$

1170

645 (64 > 5; 5 richtig)

$25 = 5.5$

2ter part. verb. Divid. 620

468

1526 (152 > 5 + 2; 2 richtig)

$40 = 5.6 + 2.5$

3ter part. verb. Divid. 1486

1404

827 (82 > 5 + 2 + 6; 6 richtig)

$77 = 5.7 + 2.6 + 6.5$

4ter part. verb. Divid. 750

702

488 (48 > 5 + 2 + 6 + 3; 3 richtig)

$105 = 5.8 + 2.7 + 6.6 + 3.5$

5ter part. verb. Divid. 383

234

1499 (149 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1; 1 richtig)

$126 = 5.9 + 2.8 + 6.7 + 3.6 + 1.5$

6ter part. verb. Divid. 1373

1170

203 (203 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5; 5 richtig).

Auf diese Weise hat man also die sechs ersten Ziffern des gesuchten Quotienten richtig gefunden. Wollte man weiter rechnen, so würden die vorigen Regeln nicht mehr anwendbar seyn. Wir werden später auf dieses Exempel zurück kommen.

8. Jetzt kehren wir zuvörderst wieder zu unserer allgemeinen Darstellung in 7. V. zurück und nehmen an, daß man durch das gewiesene Verfahren die ersten μ Ziffern

$$k,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots\ k_{\mu-1}$$

des gesuchten Quotienten richtig gefunden habe. Dann ist, für

$$(\Theta_{\mu-1} - ck_{\mu-1})x + a_\mu - c_\mu k - c_{\mu-1}k_1 - \ldots - c_1 k_{\mu-1} = \Theta_\mu,$$

die Größe

$$\begin{aligned} D_\mu = \Theta_\mu x^{m-\mu} &+ (a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - c_{\mu-1}k_2 - \ldots - c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1} \\ &+ (a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - c_{\mu+1}k_1 - c_\mu k_2 - \ldots - c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2} \\ &+ (a_{\mu+3} - c_{\mu+3}k - c_{\mu+2}k_1 - c_{\mu+1}k_2 - \ldots - c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

der vollständige Rest, welcher zuletzt übrig bleibt, d. h. die Größe, welche bei der fernern Division eigentlich der Dividendus ist. Θ_μ ist, wie wir aus 7. V. wissen, > 0.

Um nun die $(\mu + 1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten zu finden, nehme man die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_μ; so ist, wie wir ebenfalls aus 7. V.

wissen, $k_\mu < x$, und die $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten kann nicht größer als k_μ seyn.

Wäre dann ferner

$$\Theta_\mu - ck_\mu \gtreqless k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu ;$$

so würde k_μ die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten seyn.

Nehmen wir aber jetzt an, daß diese Bedingung nicht erfüllt und daß folglich

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

sey; so ist es fraglich, ob k_μ nicht vielleicht zu groß ist, und folglich vermindert werden muß.

In einem solchen Falle bildet man jederzeit die Größe

$$\Theta_{\mu+1} = (\Theta_\mu - ck_\mu)x + a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - \ldots - c_1 k_\mu$$

und hat dann wieder zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $\Theta_{\mu+1} \gtreqless 0$ oder $\Theta_{\mu+1} < 0$ ist.

I. Wenn zuerst

$$\Theta_{\mu+1} \gtreqless 0$$

ist; so ist es unbestimmt, ob k_μ die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten oder zu groß ist, und man hat nun über diesen Fall Folgendes zu bemerken.

Setzt man der Kürze wegen

$$\Theta_\mu x + a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - c_{\mu-1}k_2 - \ldots - c_2 k_{\mu-1} = \Theta'_\mu ;$$

so erhellet zuvörderst leicht, daß diese Größe stets positiv ist.

Nach dem Obigen ist nämlich

$$\begin{aligned} D_\mu = \Theta'_\mu x^{m-\mu-1} &+ (a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - \ldots - c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2} \\ &+ (a_{\mu+3} - c_{\mu+3}k - \ldots - c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3} \\ &+ (a_{\mu+4} - c_{\mu+4}k - \ldots - c_5 k_{\mu-1})x^{m-\mu-4} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wäre nun Θ'_μ negativ, so wäre, weil nach 4.

$$x^{m-\mu-1} > a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + a_{\mu+4}x^{m-\mu-4} + \ldots$$

ist, auch

$$\Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + a_{\mu+4}x^{m-\mu-4} + \ldots$$

und folglich auch D_μ negativ, da doch nach dem Obigen diese Größe offenbar positiv ist. Also muß Θ'_μ positiv seyn, wie behauptet wurde.

Man nehme nun die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta'_\mu}{cx + c_1}$$

enthaltene ganze Zahl k'_μ; so läßt sich zuerst zeigen, daß diese Zahl jederzeit eine einziffrige Zahl oder kleiner als x ist.

Weil nämlich die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta'_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl k_μ eine einziffrige Zahl; so ist

$$cx > \Theta_\mu$$

und folglich nach 4.

$$cx^2 + c_1 x > \Theta_\mu x + a_{\mu+1},$$

d. i.

$$(cx + c_1)x > \Theta_\mu x + a_{\mu+1}.$$

Also ist offenbar um so mehr

$$(cx + c_1)x > \Theta'_\mu,$$

wodurch die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Ferner läßt sich zeigen, daß die $(\mu + 1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten nicht größer als k'_μ seyn kann.

Weil nämlich k'_μ die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta'_\mu}{cx + c_1}$$

enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$(cx + c_1)(k'_\mu + 1) > \Theta'_\mu$$

und folglich nach 4.

$$(cx + c_1)(k'_\mu + 1)x^{m-\mu-1} > \Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + \ldots\ldots$$

Also ist offenbar um so mehr

$$(cx + c_1)(k'_\mu + 1)x^{m-\mu-1} > D_\mu,$$

und folglich offenbar auch

$$\Delta(k'_\mu + 1)x^{m-n-\mu} > D_\mu,$$

so daß also die $(\mu + 1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten nicht $k'_\mu + 1$, sondern höchstens k'_μ seyn kann.

Wenn nun

$$\Theta'_\mu - (cx + c_1)k'_\mu \leqq k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + k'_\mu$$

ist; so ist jederzeit k'_μ die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten, wie auf folgende Art gezeigt werden kann.

Nach 3. ist

$$\Delta < (cx + c_1 + 1)x^{n-1}$$

und folglich

$$\Delta k'_\mu x^{m-n-\mu} < (cx + c_1 + 1)k'_\mu x^{m-\mu-1}.$$

Nach 3. ist aber auch

$$\begin{aligned}(cx + c_1 + 1)k'_\mu x^{m-\mu-1} &+ (c_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + c_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + \ldots)k\\ &+ (c_{\mu+1}x^{m-\mu-2} + c_{\mu+2}x^{m-\mu-3} + \ldots)k_1\\ &+ (c_\mu x^{m-\mu-2} + c_{\mu+1}x^{m-\mu-3} + \ldots)k_2\\ &\quad \text{u. s. w.}\\ &+ (c_3 x^{m-\mu-2} + c_4 x^{m-\mu-3} + \ldots)k_{\mu-1}\end{aligned}$$

$$< (cx + c_1 + 1)k'_\mu x^{m-\mu-1} + (c_{\mu+2} + 1)kx^{m-\mu-2}$$
$$+ (c_{\mu+1} + 1)k_1 x^{m-\mu-2}$$
$$+ (c_\mu + 1)k_2 x^{m-\mu-2}$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$+ (c_3 + 1)k_{\mu-1} x^{m-\mu-2}$$
$$< \{k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (cx + c_1 + 1)k'_\mu\} x^{m-\mu-1},$$

weil $c_3 < x$, $c_4 < x$, $c_5 < x$, ... $c_{\mu+2} < x$ ist.

Nach der Voraussetzung ist aber

$$\Theta'_\mu \leqq k + k_1 + k_2 + \ldots + \ldots + k_{\mu-1} + (cx + c_1 + 1)k'_\mu.$$

Also ist die obige Größe kleiner als

$$\Theta'_\mu x^{m-\mu-1}$$

und folglich um so mehr kleiner als

$$\Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2} x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3} x^{m-\mu-3} + \ldots\ldots,$$

oder

$$(cx + c_1 + 1)k'_\mu x^{m-\mu-1}$$
$$< \Theta'_\mu x^{m-\mu-1} + (a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - \ldots - c_3 k_{\mu-1}) x^{m-\mu-2}$$
$$+ (a_{\mu+3} - c_{\mu+3}k - \ldots - c_4 k_{\mu-1}) x^{m-\mu-3}$$
$$+ (a_{\mu+4} - c_{\mu+4}k - \ldots - c_5 k_{\mu-1}) x^{m-\mu-4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Also ist offenbar nach dem Obigen

$$\Delta k'_\mu x^{m-n-\mu} < D_\mu,$$

und k'_μ ist folglich nicht zu groß, so daß also k'_μ, weil es nach dem Obigen auch nicht zu klein ist, die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten ist.

Daß man nun, indem man immer $cx + c_1$ als den überstrichenen Divisor betrachtet, die Rechnung nach dem in 7. gelehrten Verfahren, so lange sich dieses Verfahren anwenden läßt, weiter fortsetzen kann, erhellet von selbst.

Wenn also

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

und

$$\Theta_{\mu+1} \geqq 0$$

ist, zieht man zu der Zahl Θ_μ die Ziffer $a_{\mu+1}$ des gegebenen Dividendus herunter, überstreicht noch die Ziffer c_1 des gegebenen Divisors, zieht von der durch das Herunternehmen der Ziffer $a_{\mu+1}$ erhaltenen Zahl

$$\Theta_\mu x + a_{\mu+1}$$

die Größe

$$c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + c_{\mu-1}k_2 + \ldots + c_2 k_{\mu-1}$$

ab, und wendet nun, indem man immer $cx + c_1$ als den überstrichenen Divisor betrachtet, wieder das in 7. gelehrte Verfahren so lange an, wie sich dasselbe anwenden läßt.

Das folgende Beispiel wird dies deutlicher machen.

$$\overline{\overline{9}}753864579 \mid \overline{24}6'8'3'5'7'9'24 \mid 253064$$

$$\begin{array}{ll}
 & 18 \\
 & \overline{66}\ (6 > 2;\ 2 \text{ richtig}) \\
 & 14 = 2.7 \\
\text{2ter part. verb. Divid.} \ldots & \overline{52} \\
 & 45 \\
 & \overline{78}\ (7 = 2 + 5;\ 5 \text{ richtig}) \\
 & 45 = 2.5 + 5.7 \\
\text{3ter part. verb. Divid.} \ldots & \overline{33} \\
 & 27 \\
 & \overline{63}\ (6 < 2 + 5 + 3;\ 3 \text{ unsicher}) \\
 & 52 = 2.3 + 5.5 + 3.7 \\
 & \overline{11}
\end{array}$$

Da jetzt offenbar der vorher betrachtete Fall eingetreten ist; so nehmen wir zu 33 die Ziffer 3 des Dividendus herunter, überstreichen gleichzeitig noch die Ziffer 7 des Dividendus, und rechnen nun auf folgende Art weiter.

$$\begin{array}{ll}
 & 333 \\
 & 31 = 2.3 + 5.5 \\
\text{Neuer part. verb. Divid.} \ldots & \overline{302} \\
 & 291 \\
 & \overline{115}\ (11 > 2 + 5 + 3;\ 3 \text{ richtig}) \\
 & 46 = 2.8 + 5.3 + 3.5 \\
\text{2ter part. verb. Divid.} \ldots & \overline{69} \\
 & 0 \\
 & \overline{697}\ (69 > 2 + 5 + 3 + 0;\ 0 \text{ richtig}) \\
 & 61 = 2.6 + 5.8 + 3.3 + 0.5 \\
\text{3ter part. verb. Divid.} \ldots & \overline{636} \\
 & 582 \\
 & \overline{549}\ (54 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6;\ 6 \text{ richtig}) \\
 & 92 = 2.4 + 5.6 + 3.8 + 0.3 + 6.5 \\
\text{4ter part. verb. Divid.} \ldots & \overline{457} \\
 & 388 \\
 & \overline{69}\ (69 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6 + 4;\ 4 \text{ richtig}).
\end{array}$$

Im Vorhergehenden ist die Bedingung

$$\Theta'_\mu - (cx + c_1)k'_\mu \overset{=}{>} k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + k'_\mu$$

als erfüllt vorausgesetzt worden.

Wäre aber diese Bedingung nicht erfüllt, und folglich

$$\Theta'_\mu - (cx + c_1)k'_\mu < k + k_1 + k_2 + \ldots k_{\mu-1} + k'_\mu\ ;$$

so würde man wieder zunächst die Größe

$$\Theta'_{\mu+1}$$
$$= \{\Theta'_\mu - (cx + c_1)\}x + a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - \ldots - c_3 k_{\mu-1} - c_2 k'_\mu$$

bilden, und untersuchen, ob $\Theta'_{\mu+1} \overset{=}{>} 0$ oder $\Theta'_{\mu+1} < 0$ ist.

Fände das Erste Statt, so daß also

$$\Theta'_{\mu+1} \overset{=}{>} 0$$

wäre; so würde man zu der Zahl Θ'_μ die Ziffer $a_{\mu+2}$ des Dividendus herunter nehmen, gleichzeitig noch die Ziffer c_2 des Divisors überstreichen, die Größe

$$c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + c_\mu k_2 + \ldots + c_3 k_{\mu-1}$$

bilden, und dieselbe von

$$\Theta'_\mu x + a_{\mu+2}$$

abziehen. Hierauf würde man, indem die erhaltene Differenz

$$\Theta'_\mu x + a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - c_{\mu+1}k_1 - c_\mu k_2 - \ldots - c_3 k_{\mu-1} = \Theta''_\mu$$

gesetzt wird, die größte in dem Bruche

$$\frac{\Theta''_\mu}{cx^2 + c_1 x + c_2}$$

enthaltene ganze Zahl k''_μ nehmen, und diese Zahl würde dann, wenn

$$\Theta''_\mu - (cx^2 + c_1 x + c_2)k''_\mu \gtreqless k + k_1 + k_2 + \ldots k_{\mu-1} + k''_\mu$$

wäre, die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten seyn.

Dies noch weiter aus einander zu setzen, halten wir für unnöthig, weil alles Obige mit geringen Modificationen auch hier Anwendung findet.

Bemerken müssen wir aber, daß die von uns hier gegebenen Vorschriften von den Regeln, welche Fourier zu befolgen lehrt, einigermaßen abweichen. Fourier sagt nämlich, wobei vorzüglich das auf pag. 192 der Analyse des équations gerechnete Exempel zu vergleichen ist, daß, wenn

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

und zugleich

$$\Theta_{\mu+1} \gtreqless 0$$

sey, wo wie oben

$$\Theta_{\mu+1} = (\Theta_\mu - ck_\mu)x + a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - \ldots - c_1 k_\mu$$

ist, k_μ nicht zu groß und folglich die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten sey. Daß aber dieses Princip, und folglich auch das von Fourier angegebene Verfahren, welches ohne das in Rede stehende Princip nicht bestehen kann, nicht allgemein richtig ist, läßt sich, wie es uns scheint, an unendlich vielen Beispielen nachweisen. Wir wählen dazu das folgende Exempel, welches wir ganz nach dem von Fourier a. a. O. aufgestellten Muster rechnen werden.

$$\overline{442037895}\,|\,\overline{3845'6'589746}\,|\,87$$

$$\overline{352}$$

$$\overline{325}\ (32 > 8;\ 8 \text{ richtig})$$

$$16 = 8.2$$

$$\overline{309}$$

$$\overline{308}$$

$$\overline{16}\ (1 < 8 + 7;\ 7 \text{ unsicher})$$

$$14 = 8.0 + 7.2$$

$$\overline{2}\ (\text{weil sich die Verbesserung anbringen läßt, so ist 7 richtig}).$$

Auf die letzte Art würde man nach Fourier, wenn wir anders seine Worte richtig verstehen, schließen. Daß aber dieser Schluß im vorliegenden Falle unrichtig ist, erhellet auf der Stelle, weil

$$442037895.87 = 38457296865$$

und die zweite Ziffer 7 des gesuchten Quotienten also offenbar zu groß ist.

Hiernach dürften also auch die von Drobisch in seiner schon S. 569 angeführten Schrift gegebenen Regeln in mehrern Punkten einer Berichtigung bedürfen.

Nach den von uns oben gegebenen Regeln läßt sich das vorhergehende Exempel nicht vollständig rechnen, weil dabei der Fall eintritt, den wir jetzt sogleich betrachten werden.

II. Wenn nämlich, immer unter der Voraussetzung, daß

$$\Theta_\mu - ck_\mu < k + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_\mu$$

ist,

$$\Theta_{\mu+1} < 0$$

ist; so kann man jederzeit behaupten, daß die $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten kleiner als k_μ, daß also k_μ zu groß ist, und folglich vermindert werden muß.

Dies läßt sich auf folgende Art beweisen.

Es ist

$$\begin{aligned}
&\Delta k_\mu x^{m-n-\mu} + (c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1} \\
&\quad + (c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + \ldots + c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2} \\
&\quad + (c_{\mu+3}k + c_{\mu+2}k_1 + \ldots + c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= ((cx+c_1)k_\mu + c_{\mu+1}k_1 + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1} \\
&\quad + (c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + c_\mu k_2 + \ldots\ldots + c_2 k_\mu)x^{m-\mu-2} \\
&\quad + (c_{\mu+3}k + c_{\mu+2}k_1 + c_{\mu+1}k_2 + \ldots\ldots + c_3 k_\mu)x^{m-\mu-3} \\
&\quad + (c_{\mu+4}k + c_{\mu+3}k_1 + c_{\mu+2}k_2 + \ldots\ldots + c_4 k_\mu)x^{m-\mu-4} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und nach der Voraussetzung, weil $\Theta_{\mu+1} < 0$ ist, ist

$$\Theta_\mu x + a_{\mu+1} < (cx + c_1)k_\mu + c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1}.$$

Also ist nach 4.

$$\begin{aligned}
&\Delta k_\mu x^{m-n-\mu} + (c_{\mu+1}k + c_\mu k_1 + \ldots + c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1} \\
&\quad + (c_{\mu+2}k + c_{\mu+1}k_1 + \ldots + c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2} \\
&\quad + (c_{\mu+3}k + c_{\mu+2}k_1 + \ldots + c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&> (\Theta_\mu x + a_{\mu+1})x^{m-\mu-1} + a_{\mu+2}x^{m-\mu-2} + a_{\mu+3}x^{m-\mu-3} + \ldots.
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&\Theta_\mu x^{m-\mu} + (a_{\mu+1} - c_{\mu+1}k - c_\mu k_1 - \ldots - c_2 k_{\mu-1})x^{m-\mu-1} \\
&\quad + (a_{\mu+2} - c_{\mu+2}k - c_{\mu+1}k_1 - \ldots - c_3 k_{\mu-1})x^{m-\mu-2} \\
&\quad + (a_{\mu+3} - c_{\mu+3}k - c_{\mu+2}k_1 - \ldots - c_4 k_{\mu-1})x^{m-\mu-3} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \Delta k_\mu x^{m-n-\mu} < 0.
\end{aligned}$$

d. i.

$$D_\mu - \Delta k_\mu x^{m-n-1} < 0 ,$$

so daß also offenbar k_μ zu groß ist, wie behauptet wurde.

Man könnte fragen, um wie viele Einheiten man in diesem Falle k_μ vermindern müsse, um die $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten zu erhalten. Fourier giebt die Regel, daß man k_μ um eine Einheit vermindern müsse, und derselben Ansicht scheint auch Drobisch zu seyn. Fourier sagt p. 189 seines oben angeführten Werks ausdrücklich: si elle (la correction) ne pouvait être faite on en conclurait que le chiffre écrit au quotient est trop fort: il faudrait donc le diminuer d'une unité. Wir wollen sehen, ob und in wie weit diese Regel richtig ist.

Daß dieselbe zuvörderst nicht allgemein gültig ist, läßt sich leicht an Beispielen zeigen. Wir wählen dazu folgendes.

$$\overline{2}9989\,|\,\overline{1}13'1256\,|\,5$$
$$\underline{10}$$
$$\overline{13}\ (1<5;\ 5\ \text{unsicher})$$
$$\underline{45} = 5.9$$

Da also in diesem Falle die Größe $13 - 45$ negativ ist; so ist, wie vorher im Allgemeinen streng bewiesen worden ist, 5 zu groß, und müßte also, um die richtige erste Ziffer des gesuchten Quotienten zu finden, nach Fourier um eine Einheit vermindert werden, wodurch man also 4 als die richtige erste Ziffer des gesuchten Quotienten erhalten würde. Daß aber 4 im vorliegenden Falle noch zu groß ist, erhellet auf der Stelle, weil

$$29989 . 4 = 119956$$

ist.

Weil es interessant und für die möglichste Abkürzung der Rechnung nicht ohne Wichtigkeit ist, die Bedingung zu kennen, welche erfüllt seyn muß, wenn man soll behaupten können, daß $k_\mu - 1$ die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten ist; so wollen wir diese Bedingung hier noch entwickeln, welches auf folgende Art leicht geschehen kann.

Nach dem Obigen würde bekanntlich $k_\mu - 1$ die richtige $(\mu+1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten seyn, wenn

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) \geqq k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1)$$

wäre.

Wäre nun

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1) ;$$

so wäre

$$\Theta_\mu < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (c+1)(k_\mu - 1) .$$

Weil aber k_μ die größte in

$$\frac{\Theta_\mu}{c}$$

enthaltene ganze Zahl ist; so ist

$$ck_\mu \leqq \Theta_\mu,$$

und also

$$ck_\mu < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (c+1)(k_\mu - 1)],$$

woraus leicht

$$0 < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu - c - 1$$

oder

$$k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu > c + 1$$

folgt.

Wenn also

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) < k + k_1 + k_2 + \ldots + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1)$$

ist; so ist jederzeit

$$k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu > c + 1,$$

und so lange folglich

$$k + k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu$$

nicht größer als $c + 1$ ist, ist jederzeit

$$\Theta_\mu - c(k_\mu - 1) \geqq k + k_1 + k_2 + k_{\mu-1} + (k_\mu - 1),$$

also $k_\mu - 1$ die richtige $(\mu + 1)$te Ziffer des gesuchten Quotienten.

Hieraus geht hervor, daß die von Fourier gegebene Regel desto länger bei der Ausführung der Rechnung anwendbar seyn wird, je größer der überstrichene Divisor ist. Bei dem p. 191 seines Werks von Fourier gerechneten Exempel, wo der Fall, mit dem wir uns jetzt beschäftigen, vorkommt, ist der überstrichene Divisor 234, und man wird sich also nach dem, was wir vorher gesehen haben, nicht wundern, daß bei diesem Exempel die von Fourier gegebene Regel anwendbar ist.

Im Allgemeinen läßt sich aber nach unserer Meinung bloß die Regel geben, daß man k_μ so lange nach und nach um ganze Einheiten vermindern muß, bis sich die Rechnung entweder nach den oben in I., oder den in 7. gegebenen Regeln ungehindert weiter führen läßt.

Wir kehren jetzt wieder zu dem in 7. gerechneten Exempel zurück, indem wir dasselbe nun nach der vorher gefundenen Regel weiter fortführen wollen, wobei wir übrigens bemerken, daß dieses Exempel mit dem vorher erwähnten, von Fourier gegebenen Exempel einerlei ist.

$\overline{234567898765} \mid \overline{12345'6'7'8'9'8'7'3647} \mid 52631589$

1170 — 7

645 (64 > 5; 5 richtig)
25 = 5.5

2ter part. verb. Divid. 620
468

1526 (152 > 5 + 2; 2 richtig)
40 = 5.6 + 2.5

3ter part. verb. Divid. 1486
1404

827 (82 > 5 + 2 + 6; 6 richtig)
77 = 5.7 + 2.6 + 6.5

4ter part. verb. Divid. 750
702

488 (48 > 5 + 2 + 6 + 3; 3 richtig)
105 = 5.8 + 2.7 + 6.6 + 3.5

5ter part. verb. Divid. 383
234

1499 (149 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1; 1 richtig)
126 = 5.9 + 2.8 + 3.6 + 1.5)

6ter part. verb. Divid. 1373
1170

2038 (203 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5; 5 richtig)
158 = 5.8 + 2.9 + 6.8 + 3.7 + 1.6 + 5.5

7ter part. verb. Divid. 1880
1872

87 (8 < 5 + 2 + 3 + 1 + 5 + 8; 8 unsicher)
206 (8 ist zu groß)

1638 (für 8 ist 7 geschrieben.)
2427 (242 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5 + 7; 7 richtig)
201 = 5.7 + 2.8 + 6.9 + 3.8 + 1.7 + 5.6 + 7.5

8ter part. verb. Divid. 2226
2106

120 (120 > 5 + 2 + 6 + 3 + 1 + 5 + 7 + 9; 9 richtig)

Nach dem im Obigen gegebenen Regeln wird man nun gewiß die sogenannte geordnete Division in allen Fällen mit Sicherheit auszuführen im Stande seyn. In der Art, wie man die Division gewöhnlich ausführt, indem man nämlich gleich vom Anfange an mit allen Ziffern des Divisors in den Dividendus eingeht, ist unstreitig ein großer Aufwand zweckloser Rechnung enthalten, weil auf der Stelle erhellet, daß zur Bestimmung der ersten Ziffer des Quotienten schon die Berücksichtigung nur weniger Anfangsziffern des Divisors ausreicht, und daß nur allmälig die diesen Anfangsziffern folgenden Ziffern des Divisors auf die Richtigkeit der Ziffern des Quotienten Einfluß haben werden, so daß also vergebliche Mühe aufgewandt wird, wenn man die Ziffern des Divisors früher in die Rechnung einführt, als sie auf die Ziffern des Quotienten Einfluß haben. Diesen Uebel-

stand zu vermeiden ist, wie man leicht übersehen wird, der Hauptzweck der von Fourier gegebenen Regeln der geordneten Division, indem bei derselben die Ziffern des Divisors in der That nur nach und nach, überhaupt nur erst dann in die Rechnung eingeführt werden, wenn sie auf die Ziffern des Quotienten Einfluß haben. Wie sehr aber diese Divisionsmethode geeignet ist, die bei der Auflösung der Zahlengleichungen vorkommenden numerischen Rechnungen zu erleichtern und abzukürzen: davon wird man sich bei einer nähern Ansicht des Artikels Gleichung sogleich überzeugen.

Druckfehler.

S. 25. Z. 10. v. u. st. des zweiten Kommas s. m. ein Semicolon.
— — — 15. v. u. st. z s. m. y.
— 250. — 7. v. u. st. s'^2 s. m. $\partial s'^2$.
— 343. — 14. v. u. hinter können schalte man die Worte zerlegen läßt ein.
— 456. — 4. v. u. st. α_3 s. m. a_3.
— 700. — 20. st. n'est s. m. n est.
— 713. — 10. st. 326. s. m. 336.
— 716. — 4. hinter Größe schalte man das Wort bezeichnen ein.
— 737. — 7. st. x für z s. m. z für x.
— — — 10. hinter Größen schalte man x, y ein.
— 738. — 16. v. u. st. $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ s. m. $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$.
— — — 15. v. u. st. $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ s. m. $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$.
— 752. — 5. v. u. st. $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2}$ s. m. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.
— 760. — 11. st. wichtigen s. m. wichtigr.
— 825. — 11. st. sie s. m. sich.
— 912. — 12. v. u. st. 54 s. m. 54*.

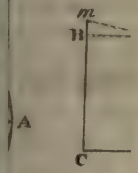
Die beiden zu Fig. 42. auf Taf. IV. gehörenden Theile sind durch einen Haken zu verbinden.

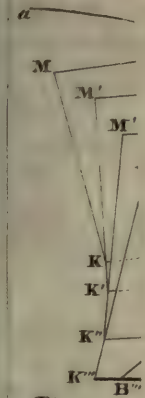
In Fig. 43. auf Taf. IV. sind an die Linien PB und PC die Buchstaben b und c zu schreiben.

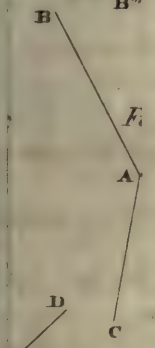
In Fig. 45. auf Taf. IV. ist der Durchschnittspunkt von MQ und NP durch E zu bezeichnen.

Einige nachträgliche Berichtigungen zum ersten Theile.

S. 92. Z. 8. st. Krümmung s. m. Berührung.
— 306. — 9. v. u. st. cos x s. m. cos Θ.
— 337. — 13. v. u. st. α s. m. a.
— 686. — 5. v. u. st. (x, y) ∂y s. m. φ(x, y) ∂y.


m
B
A
C


a
M
M'
M'
K
K'
K''
K'''
B'''


B
F
A
C

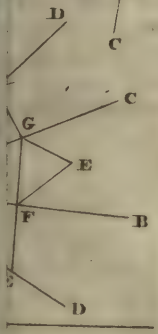
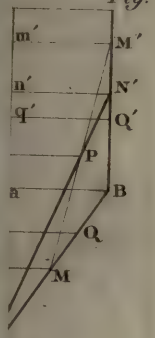

D
C
G
E
F
B
D

Fig.



Q′
N′

B

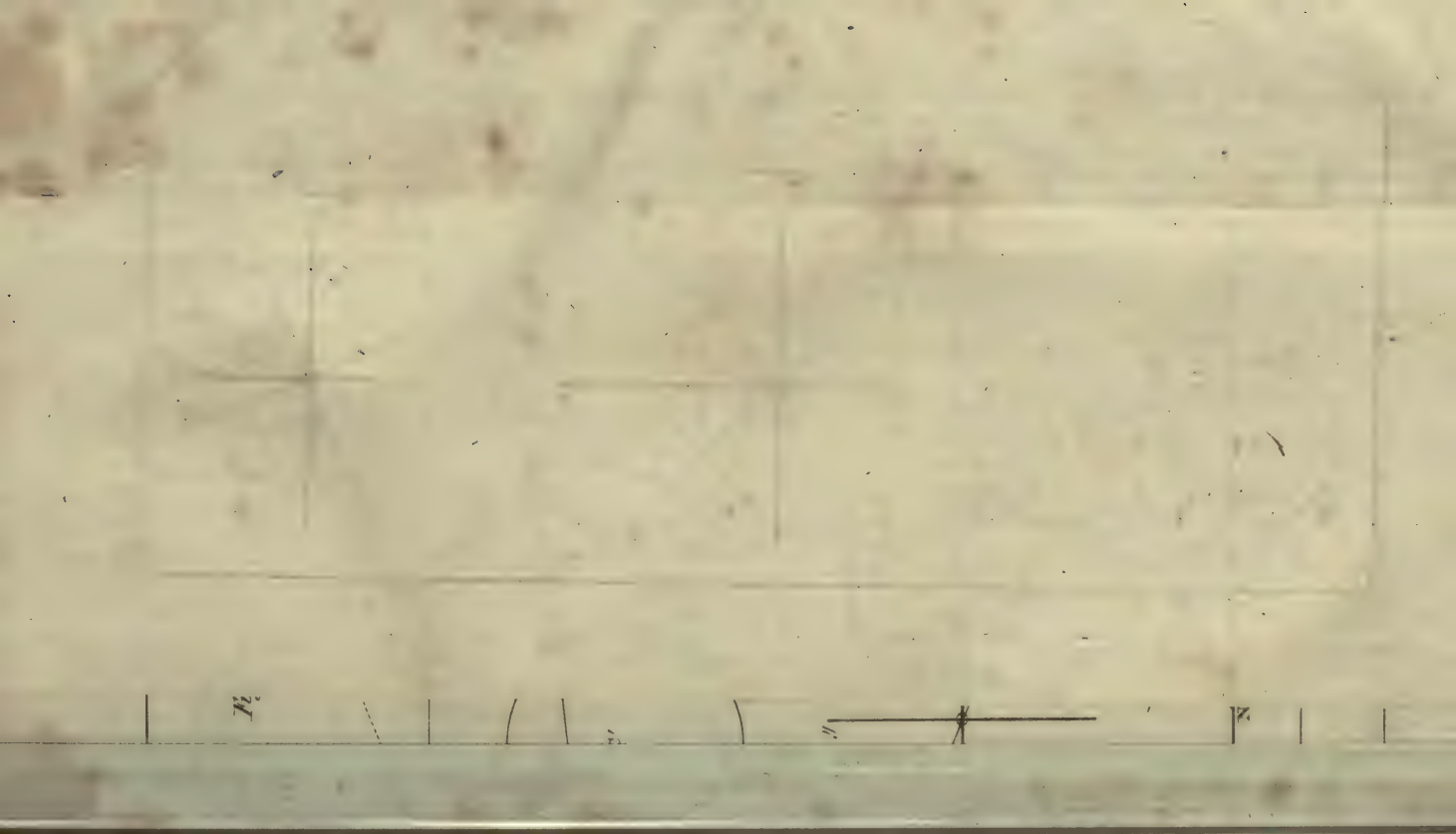
A N

N
Q

G

B

A

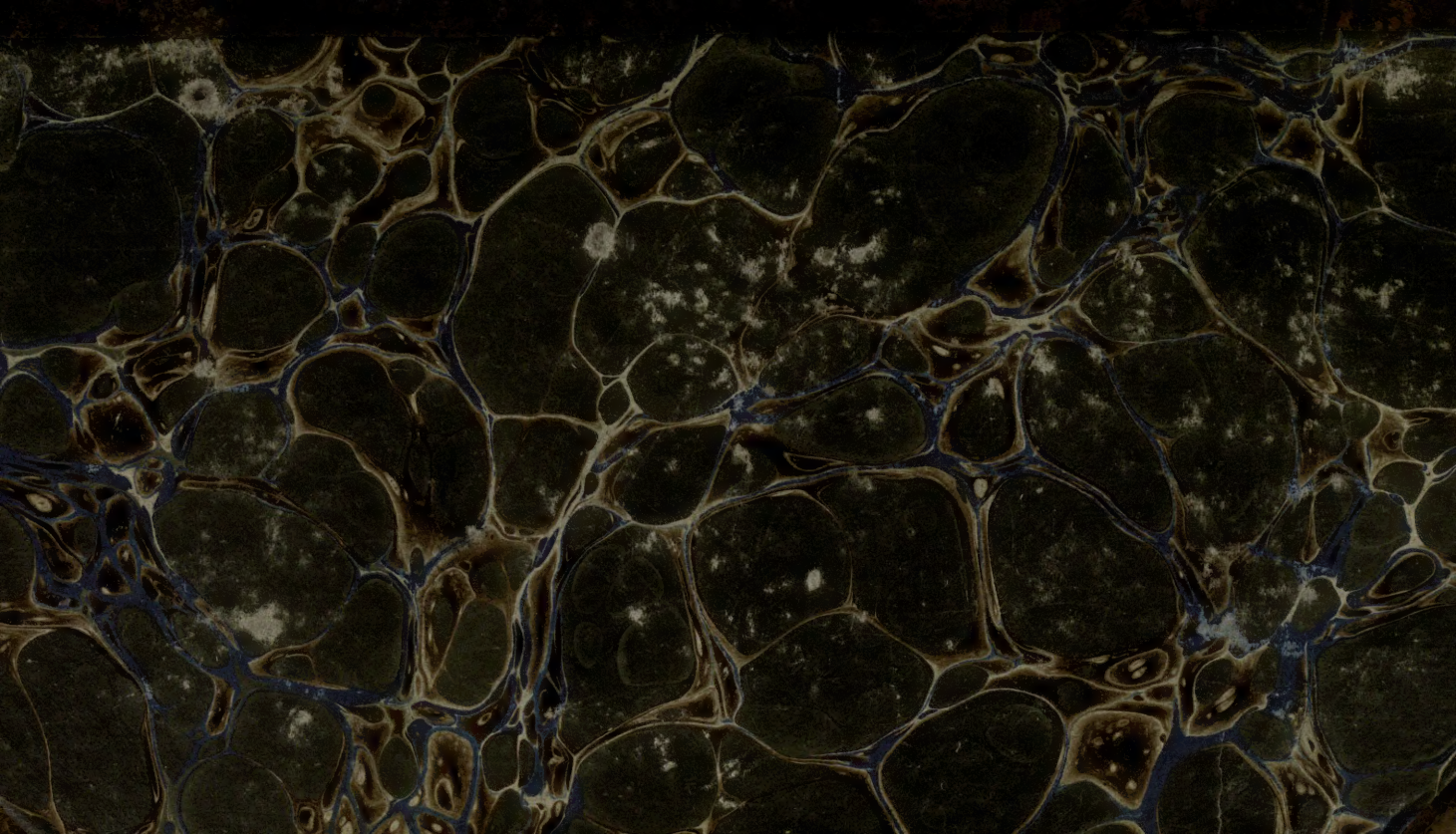


A'
B'
C
P
B

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
5
K562
1833
Bd.2

Klugel, Georg Simon
Supplemente zu Georg Simon Klugel's Worterbuche der reinen Mathematik

P&ASci.